



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Таким числом A , оно составлено из 3-х одинаковых цифр $\Rightarrow$ делится на 111, $A = a \cdot 111$, где $a \in [1, 9]$,
но $111 = 11 \cdot 101$ - это простое число, $A \cdot B \cdot C$ з.в.и.
квадратом $\Rightarrow$ либо B , либо C делится на 101,
но 101 - простое, а C - 2-значное $\Rightarrow B : 101$, B - 3-знач.
 $\Rightarrow B$ имеет вид: $\overline{b_0 b_1 b_2}$ но по условию в B есть одна цифра 1, откуда следует, что единств. возможный вариант: $B = 101$. Также одна из чисел должно делиться на 11 (либо B , либо C) т.к.
 $A \nmid 11^2$ т.к. $A = a \cdot 101 \cdot 11$, $a \in [1, 9] \nmid 11$, но $B = 101$
 $\Rightarrow C : 11 \Rightarrow C$ имеет вид: $\overline{c_1 c_2}$, но в C есть цифра 5 по ум. $\Rightarrow C$ определенная однозначная:
 $C = 55 = 5 \cdot 11$, выполняются первые 3 ум., осталось 4-ое:
 $A \cdot B \cdot C = a \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11 = 11^2$, откуда следует, что $a = 5 \cdot y^2$, но $a \in [1, 9] \Rightarrow y = 1$, $a = 5$, тогда единств. возможная тройка чисел, удовл. условию:
 $A = 5 \cdot 101 \cdot 11 = 5555$, $B = 101$, $C = 55$, тогда ответ:
(5555, 101, 55)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$, также заметим, что если мы x ~~уменьшим~~ ~~увеличим~~ на 3, а y увеличим, то знаменатель xy не изменится. Заменим y на $y+3$, тогда K не изменится: $\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$, откуда

следует, что: 1) $x+y+1=0$, $x+y=-1$, 2) $xy=(x-3)(y+3)=$
 $= 3x-3y+xy+9 \Leftrightarrow x-y-3=0$, $x=y+3$

Рассмотрим оба этих случая: 1) $x+y=-1$, $x=-(y+1)$,
 $x^3-y^3-3xy = -(y+1)^3 - y^3 - 3(-(y+1))y =$
поскольку xy - постоянна, $x+y=-1$ не имеет реш.
2) $x=y+3$: $x^3-y^3-3xy = y^3+9y^2+27y+27-y^3-3y(y+3)=$
 $y^3+9y^2+27y-y^3-3y^2-27y+27 = 27$ - это единственный вар-т.
Ответ: $x^3-y^3-3xy = 27$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d) (\sin 2x - \sin 2y) \sin 2x = (\cos 2x + \cos 2y) \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 2x - \sin 2y \sin 2x = \cos^2 2x + \cos 2y \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 2x - \cos^2 2x = \cos 2y \cos 2x + \sin 2x \sin 2y \Leftrightarrow$$



$$-\cos 2 \cdot 2x = \cos(2y - 2x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x + 2y = 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$1) 2x - 2y = 2k\pi \Leftrightarrow 2x - x + y = 2k\pi \Leftrightarrow x + y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2x + 2y = 2l\pi \Leftrightarrow 2x + x - y = 2l\pi \Leftrightarrow 3x - y = 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$$

тогда, найдя все пары (x, y) , получим:

$$(x, 2k\pi - x), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, (x, 3x - 2l\pi),$$

$$x \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{Z}, \text{ т.к. по условию, } x, y - \text{ действит.}$$

$$b) \text{ Пусть } x, y, \begin{cases} x + y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x - y = 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

заменим, что если выполн. 1-ое, то и 2-ое тоже выполн. и наоборот

(если $x + y$ - четн, то и $3x - y$ - четн, т.к. $x \equiv 2\pi, y \equiv -y$)

$\Rightarrow$ если выполн. x, y такие, что $x + y$ - четн. подполн.

Заметим, что ф-ия аркосов может принимать значения $[0, \pi]$

$\Rightarrow$ нам не подн. только вар-т, когда $\cos \frac{x}{2} = -1, \cos \frac{y}{2} = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{y}{2} = 2l\pi + \pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\pi k + 2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = 2\pi l + 2\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ по сути слева - рау, а справа - чр.}$$

$$\Rightarrow \text{х также пареи чловн } (x, y), \text{ то } \arccos \frac{x}{2} + \arccos \frac{y}{2} = 2\pi$$

$$\Rightarrow \forall (x, y), x, y \in \mathbb{Z}, x + y - \text{ четн. подполн.} \Rightarrow$$

таких пар бесконечно много



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 1-ый случай - начало месяца, всего вы-в раздать 4 билета по 11-кл-м; C_S^4 где S - кол-во 11-класс-в. Стоящие на очереди нам вер-ть - это когда у Петю и Вани есть билет, $\Rightarrow$ осталось раздать 2 ост-я билета по $S-2$ 11-кл-м $\Rightarrow$ так как вер-в: $C_{S-2}^2 \Rightarrow$ вероятность; $\frac{C_{S-2}^2}{C_S^4} = \frac{(S-2)! \cdot 4! \cdot (S-4)!}{2! \cdot (S-4)! \cdot S!} = \frac{4 \cdot 3}{S \cdot (S-1)} = P_1$

Рассчитаем вер-ть после добавления новых билетов. Пусть их стало n , тогда по аналогичной ф-ле мы можем посчитать новую вер-ть:

$$P_2 = \frac{C_{S-2}^{n-2}}{C_S^n} = \frac{(S-2)! \cdot n! \cdot (S-n)!}{(n-2)! \cdot (S-n)! \cdot S!} = \frac{n \cdot (n-1)}{S(S-1)}$$

Но из условия нам дано, что $P_2 = 3,5 P_1 \Leftrightarrow$

$$\frac{n(n-1)}{S(S-1)} = 3,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{S(S-1)} \Leftrightarrow n(n-1) = 42 \Leftrightarrow n^2 - n - 42 = 0,$$

$$D = 1 + 168 = 169, \quad n = \frac{1 \pm 13}{2} = 7 \quad (n = -6 - \text{пост. сбросить})$$

Тогда ответ: в конце месяца всего выдано 7 билетов

Примечание: тут, C_n^k - количество сочетаний

51. $\cos \angle = \frac{AC}{AP} = \frac{10}{16}$, т.к. $\triangle ACP$ - равнобедр. PH - высота / медиана. В к-м, $\triangle APH$ - пр. $AH = \frac{AC}{2}$, т.к. PH - медиана.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Также возможно, например, при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $CE + BD =$
 $= 2(\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}) = 2 \cdot 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$, больше, так
мы уже доказали, быть не может $\Rightarrow$ так же.
знач $M = 3\sqrt{11} + 4\sqrt{7}$, достигается при $|\sin \alpha| = |\cos \alpha|$
 $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} k$, $k \in \mathbb{Z}$ - ответ.

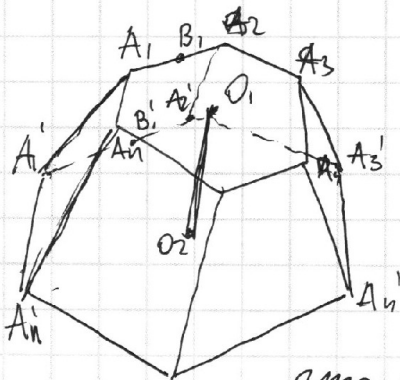


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

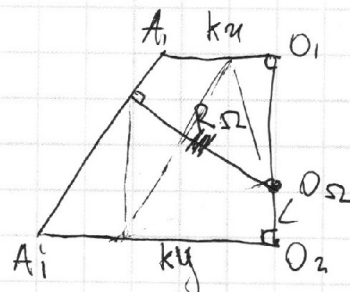
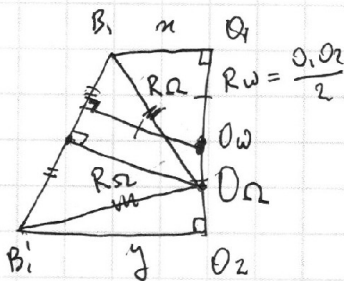
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим пирамиду правильного усеч. пирамиды $A_1 A_2 \dots A_n A'_1 \dots A'_n$, где $A_1 A_2 \dots A_n$ - прав. многоуг., $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ - тоже прав. n-уг.,

Пусть u и y центры O_1 и O_2 - совм.

Потому из симметрии очевидно, что центры обеих ~~эти~~ шаров из ус. находятся на $(O_1 O_2)$ т.к. сама усеч. пирамида - правильная, $(O_1 O_2) \perp (A_1 \dots A_n) \perp (A'_1 \dots A'_n)$. Отсюда следует, что O_ω - в середине отрез. $O_1 O_2$, т.к. кас. $A_1 A_2 \dots A_n$ и $(A'_1 \dots A'_n)$. Также из симм. очевидно, что Ω кас. ребер $A_1 A_2 \dots A_n A'_1 A'_2 \dots A'_n A'_1$ в серединах, пусть B_1 - сер $A_1 A_2$, B'_1 - сер $A'_1 A'_2$, $O_\Omega B_1 = O_\Omega B'_1$, но ДИТ точек, значит, что $O_\Omega \times B_1 = \times B'_1$ - это м-м $\perp B_1 B'_1$ и прох-ая $\perp$ к/з середину $B_1 B'_1$



Пусть $O_1 B_1 = u$, $O_2 B'_1 = y$, $O_1 O_2 = h$, $B'_1 O_\omega$ - сисс $\angle B_1 B'_1 O_2$, $B_1 O_\omega$ - сисс угла $\angle O B_1 B'_1 \Rightarrow \angle B_1 B'_1 O_\omega + \angle O_\omega B_1 B'_1 = 90^\circ \Rightarrow \triangle B_1 O_\omega B'_1 - n/y \Rightarrow B_1 O_\omega^2 + B'_1 O_\omega^2 = B_1 B'_1^2 \Leftrightarrow u^2 + y^2 + \frac{h^2}{2} = h^2 + (u-y)^2 \Rightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{h^2}{2} = 4uy$ пусть $O_2 O_\Omega = l$, $y^2 + l^2 = u^2 + (h-l)^2 \Rightarrow y^2 - u^2 = h^2 - 2hl$
 $\Leftrightarrow l = \frac{h^2 + u^2 - y^2}{2h} = \frac{4uy + u^2 - y^2}{2h} = \frac{u^2 + y^2}{2h}$, $R_\Omega = \sqrt{l^2 + y^2}$

Handwritten signature



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$aaaa = 11 \cdot a \cdot 100 + 11 \cdot a = 11 \cdot a \cdot 101 \quad 11 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101$$

--- 1 сема

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ 1234321 \end{array} \quad \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

29 знаков

5.



$$\frac{1}{n} + \frac{1}{y} + \frac{1}{ny} = \frac{1}{n-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{2\pi n = \pi + 2\pi k}{(n-3)(y+3)} \quad \pi = k + \frac{1}{2}$$
$$\frac{n+y}{ny} = \frac{n+y+1}{ny} = \frac{(n-3)(y+3)}{(n-3)(y+3)}$$
$$\sin \frac{\pi}{4} n - \sin \frac{\pi}{4} y \cdot \sin \frac{\pi}{4} n = \cos \frac{\pi}{4} n + \cos \frac{\pi}{4} y \cdot \cos \frac{\pi}{4} n$$

$$\begin{array}{l} 16 \cdot 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 \cdot 6 \end{array}$$

$$\frac{C_{5-2}^2}{C_5^4} - \text{leaves var.}$$

$$\cos(\pi(n-y)) = -\cos \pi n$$
$$n=y \quad n+y=$$

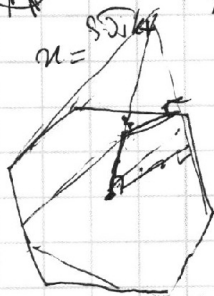
$$\frac{(5-2)! \cdot 4! \cdot (5-4)!}{2! \cdot (5-4)! \cdot 5!}$$

$$156 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$$

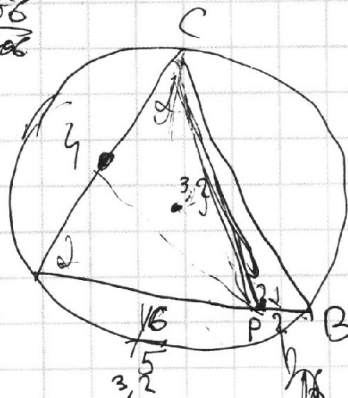
$$4-3,5 = 14-3 = 11$$

$$2 \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{100}{256}$$

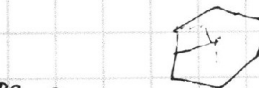
$$\frac{13^2}{10^2} \cdot 13 \cdot 3$$



A



$$\frac{13^2}{10^2} \cdot 13 \cdot 3$$



$$\frac{2 \cdot 6 - 10}{16} \cdot \frac{\sqrt{156}}{16}$$

$$\frac{\sqrt{156}}{32} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 4}{5} =$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 13}{32 \cdot 10} \cdot \sqrt{13}$$
$$1,3 \sqrt{13}$$

