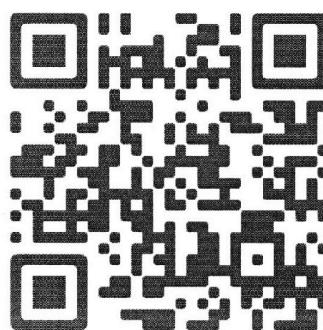


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 2

$$x, y \geq 0 \quad x, y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$x \neq 4$$

$$y \neq -4$$

$$x \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$(x+y+3) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-4)(y+4)} \right) = 0$$

$$(x+y+3) \frac{(xy+4x-4y-16-xy)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$x+y+3=0$$

невозможно, т.к.

x и y должны быть
по условию

$$x+y+4x-4y-16-xy=0$$

$$4x-4y-16=0$$

$$x=y+4$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) =$$

$$= \cancel{y^3} + 12\cancel{y^2} + 48y + 64 - \cancel{y^3} - \cancel{12y^2} - \cancel{48y} = 64$$

ОТВЕТ: $M = 64$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\cancel{\sin\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right)} \sin \pi y = \cancel{\cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right)}.$$

$$\cdot \cos \pi y$$

$$\cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \sin \pi y - \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \cos \pi y \right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} + \pi\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} - \pi\right) \right) \right) = 0$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} + \pi\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} - \pi\right) \right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}(y+x) = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi}{2}(3y-x) = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \quad \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+x = 1+2k \\ 3y-x = 1+2n \end{cases} \quad \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

Пары действительных чисел, которые подходят:

$$(x; 1+2k-x) \quad (x; \frac{x+1+2n}{3})$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 4

x - кол-во одногодчикашек

в начале месяца

4 билета

Вероятность, что получит одни из шашечек $\frac{4}{x}$

Вероятность, что получит второй тоже $\frac{3}{x-1}$

$$\varphi_0 = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$$

вероятн., что получит оба в начале месяца

в конце месяца

4+у билета

Вероятность, что оба получат анонимные

$$\varphi = \frac{4+y}{x} \cdot \frac{3+y}{x-1}$$

по условию $\varphi_0 = \frac{\varphi}{11}$

$$\frac{12 \cdot 11}{x(x-1)} = \frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)}$$

$$x \neq 0 \\ x \neq 1 \quad (\text{т.к есть хотя бы 2 одногод-ка})$$

$$12 \cdot 11 = (4+y)(3+y)$$

$$12 \cdot 11 = 12 + y^2 + 7y$$

$$y^2 + 7y - 120 = 0$$

по теореме Виета $y = -15$
D.K., т.к. $y > 0$

всего было выдвинуто: $4+8=12$ билетов

ОТВЕТ: 12

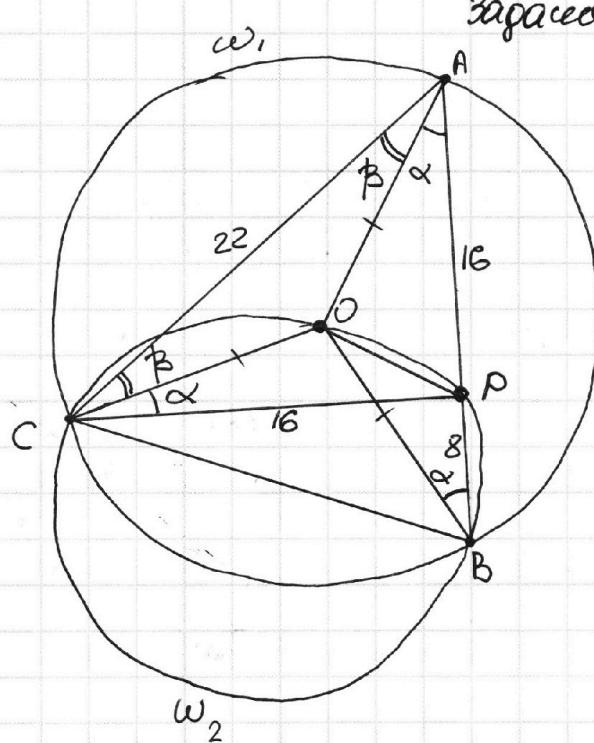


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 5 $AC=22 \quad AP=16 \quad BP=8$

Решение: 1) $AO = CO = OP = R$

$\triangle AOC, \triangle AOB, \triangle BOC$ – равнобедренные треугольники

$$\angle CAO = \angle ACO = \beta \\ \angle BAO = \angle OBA = \alpha$$

проводим OP, CP

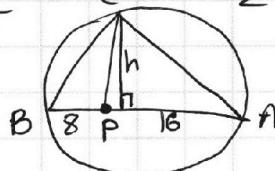
$\angle OBP = \angle PCO = \alpha$
(вписаные углы, которые опираются на одну дугу)



$$\angle ACP = \beta + \alpha = \angle CAP \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle ACP$ – равнобедренный $\Rightarrow CP = AP = 16$

$$2.) \begin{cases} S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} h \cdot AP = 16 \\ S_{\triangle BCP} = \frac{1}{2} h \cdot BP = 8 \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ACP} = 2 S_{\triangle BCP}$$



$$3.) S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACP} + S_{\triangle BCP} = S_{\triangle ACP} + \frac{1}{2} S_{\triangle ACP} = \frac{3}{2} S_{\triangle ACP}$$

4.) по оп-не Герона: $S_{\triangle ACP} = \sqrt{p(p-AP)(p-CP)(p-AC)}$

$$p = \frac{AC+CP+AP}{2} = \frac{16+16+22}{2} = 27$$

$$S_{\triangle ACP} = \sqrt{27(27-22)(27-16)(27-16)} = \sqrt{3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11} = 33\sqrt{15}$$

$$5.) \left\{ S_{\triangle ABC} = \frac{3}{2} S_{\triangle ACP} = \frac{3}{2} \cdot 33\sqrt{15} = \frac{99\sqrt{15}}{2} \right. \quad \text{Ответ:} \\ \left. S = \frac{99\sqrt{15}}{2} \right.$$

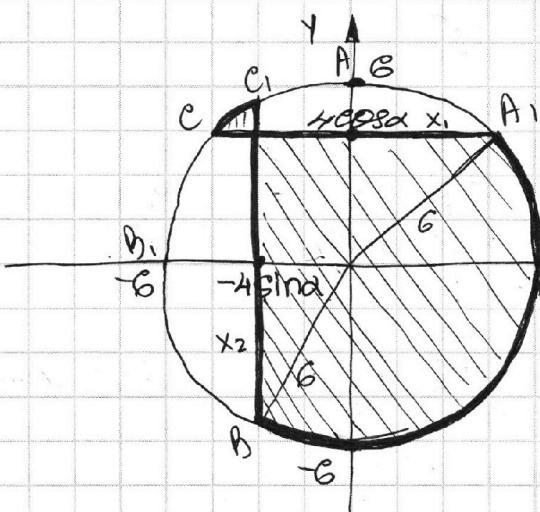


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x_1 = \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha}$$

$$x_2 = \sqrt{36 - 16\sin^2\alpha}$$

две линии "жирных
дуг" равны
 $2\pi R = 12\pi$ — фигура, "таких" дуг

периметр будет максимален при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (рад)

$$\text{и } \alpha = \frac{5\pi}{4} \text{ (рад)}$$

$$\tan\alpha = 1$$

$$-4\sin\alpha = 4\cos\alpha \Rightarrow 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{так. } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Рассмотрим при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

$$P_{\max} = 2x_1 + 2x_2 + \left(12\pi - 2 \cdot 6 \cdot \arccos \frac{4\cos\alpha}{6} \right) - 2 \cdot 6 \cdot \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{6}$$

здесь 2-x дуги AA₁ и BB₁,

здесь 2-x дуги BC и CA

$$P_{\max} = 4\sqrt{36 - 16 \cdot \frac{1}{2}} + \left(12\pi - 12\arccos \frac{\sqrt{2}}{3} \right) - 12\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\alpha = \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$

$$M = P_{\max} = 8\sqrt{7} + 12\left(\pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{3} - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\varPhi(\alpha)$

Задача № 6

$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36 & \text{— окружность } R=6 \text{ } O(0;0) \\ \text{наши подходит } 10, 180 \\ \text{вместы} \end{cases}$$

(1) ки 2 ситуации: чтобы произведение было ≤ 0 , скобки должны быть разных знаков

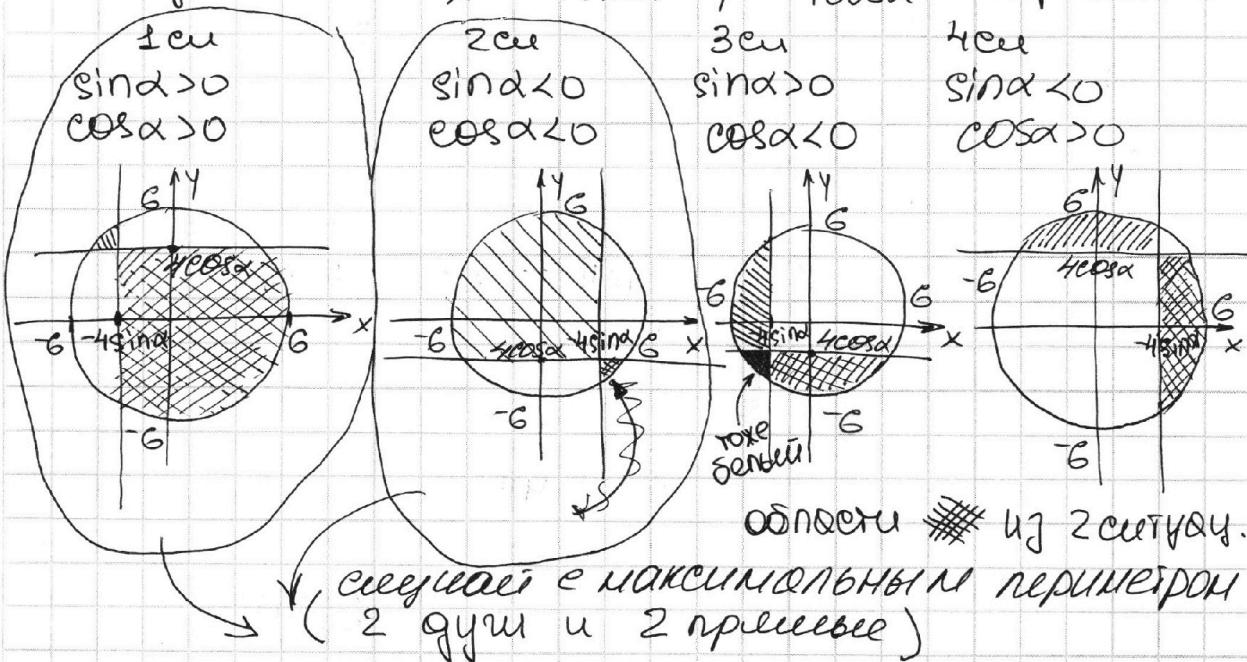
1) $x \leq -4\sin\alpha$ 2) $x \geq -4\sin\alpha$

$y \geq 4\cos\alpha$ $y \leq 4\cos\alpha$

~~с точки зрения периметра~~

Рассмотрим все случаи в первой ситуации:

$x = -4\sin\alpha$ $y = 4\cos\alpha$ — прямые



Оба случая с максимальными периметрами абсолютно аналогичны с точки зрения 1, но в них разные α . Рассмотрим 1-е



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sin(90-\alpha)}{24} = \frac{\sin(90-\beta)}{22} =$$

~~$\sin(\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4})$~~

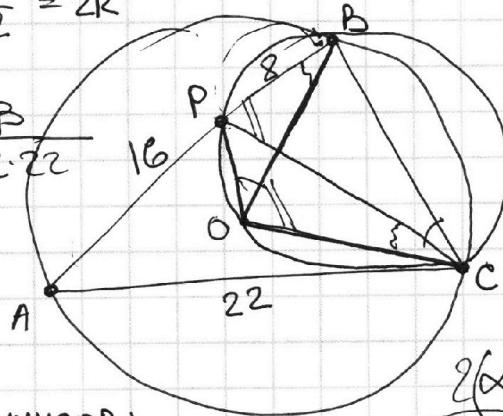
$$= \frac{\sin(90-\delta)}{x} = 2R$$

$$\cos(\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4}) > \cos(-\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{\cos \alpha}{24} = \frac{\cos \beta}{22} = 2R$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\cos \beta}{22 \cdot 2 \cdot 22}$$



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$90 - (\alpha + \beta) = \gamma$$

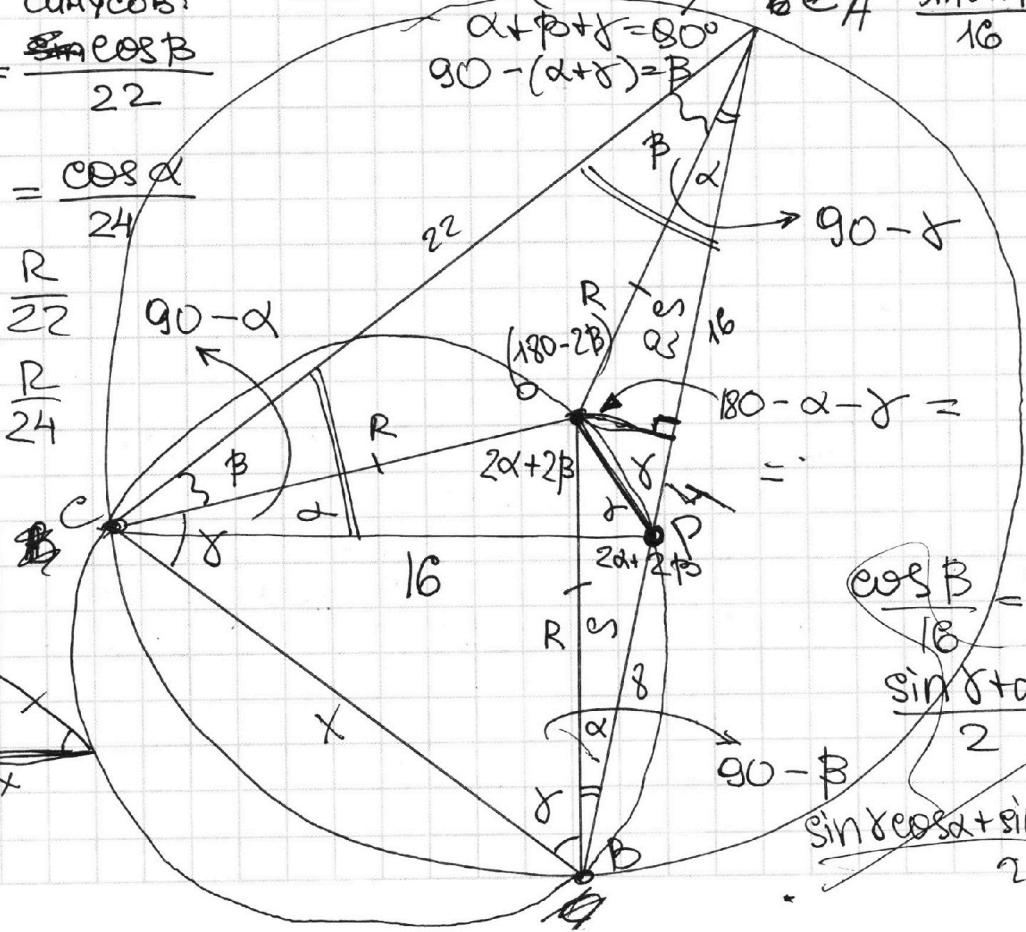
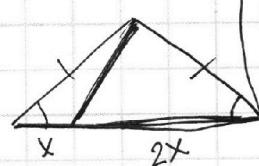
$$B \not\subset A \quad \frac{\sin \alpha + \beta}{16} = \frac{\sin \gamma}{22}$$

теорема синусов:
 $\frac{\sin \beta}{R} = \frac{\sin \alpha}{24}$

$$\frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\cos \alpha}{24}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R}{22}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{24}$$



$$\frac{\cos \beta}{16} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{8}$$

$$\frac{\sin(\beta + \alpha)}{2} = \sin \beta$$

$$\sin \gamma \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



1

1

1

1

1

1

$$\frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\sin(2(\alpha+\beta))}{X}$$

$$\frac{\cos \alpha}{24} = \frac{\cos \alpha}{24} = \frac{\cos \beta}{22} = 2R$$

$$\frac{\sin \beta}{R} = \frac{\cos 2\alpha}{24}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{R}$$

$$\frac{24}{R} = 2 \cos \alpha$$

$$\frac{\cos \alpha}{24} = \frac{\cos \alpha}{R}$$

~~$$\frac{\cos B}{22} = \frac{R \cdot 24 \sin \beta}{22}$$~~

$$S_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} R \cos \alpha = 24$$

$$\cos \alpha = \frac{24}{2R} = \frac{12}{R}$$

$$\cos \beta = \frac{22}{2R} = \frac{11}{R}$$

$$\frac{\sin \alpha + \beta}{X} = \frac{\cos B}{22} = \frac{\cos \alpha}{24}$$

$$\frac{\sin \alpha + \beta}{X} = \frac{11}{22R} = \frac{1}{2R}$$

$$\sin \alpha + \beta = \frac{X}{2R}$$

~~$$X = 2R \cos \gamma$$~~

~~$$\frac{\sin \gamma}{R} = \frac{\sin(2(\alpha+\beta))}{X}$$~~

$$S_{\text{triangle}} = \frac{1}{2} R \cos \gamma = \frac{3}{2} R \cos \theta$$

$$\frac{\cos \gamma}{X} = \frac{\cos \theta}{2R}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \\
 x^3 - y^3 - 12xy - ? & \\
 \frac{y+x+3}{xy} &= \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \\
 (x+y+3) \left(\frac{(x-4)(y+4) - xy}{xy(x-4)(y+4)} \right) &= 0 \quad x, y > 0 \\
 (x+y+3)(xy+4x-4y-xy-16) &= 0 \quad x \neq 4 \\
 x+y+3=0 & \quad x-y-4=0 \quad y \neq -4 \\
 -(y+3) > 0 & \quad x+y=-3 \quad x-y=4 \\
 x \geq 0 & \quad y+3 \leq 0 \quad x=-y-3 \quad x=y+4 \\
 y \leq -3 & \\
 M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy \\
 M &= (-y-3)^3 - y^3 + 12y(y+3) = -(y^3 + 3 \cdot 3 \cdot y^2 + \\
 &+ 3 \cdot 9 \cdot y + 27) - y^3 + 12y^2 + 36 = -2y^3 - 9y^2 + \\
 &- 27y - 27 + 12y^2 + 36y = -2y^3 + 3y^2 - 27 + 9y - 27 \\
 x=4 & \quad x=y+4 \geq 0 \\
 & \quad y \geq -4 \\
 M &= (y+4)^3 - y^3 - 12xy = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - \\
 &- 12y^2 - 48y = 64
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
_ ИЗ _

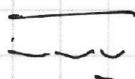
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A aaaaa

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\cdot \cos(0)$$

B



$$2x = \alpha + \beta$$

$$2y = \alpha - \beta$$

TUT ECTB 7

$2(x+y) = 2\alpha$ A·B·C - КВАДРАТ НАТУРАЛЬНОГО

$$\alpha = x + y \text{ ЧИСЛА}$$

C



$$TUT ECTB 1$$

$$\beta = x - y$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} (\cos(x+y) - \cos(x-y))$$

$$A = 10000a + 100a + 10a + a$$

$$B = 100z + 10y + z \quad 700 + 10y + z$$

$$C = 10x + 1$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(x+y))$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) \sin \pi y = 2 \cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right)$$

$$\cdot \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cdot \cos \pi y$$

$$\cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) \left(\sin \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cdot \sin \pi y - \cos \left(\frac{\pi(y-x)}{2} \right) \cos \pi y \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi(y+x)}{2} \right) = 0$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi y - \pi x + \pi y}{2} \right) - \cos \left(\frac{\pi y - \pi x - \pi y}{2} \right) \right) -$$

$$\frac{\pi(y+x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$-\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi y - \pi x + \pi y}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi y - \pi x - \pi y}{2} \right) \right) = 0$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$y+x = 1+2k$$

$$\cos \left(\frac{3\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} \right) = 0$$

$$y+x = 3y - x$$

$$2x = 2y$$

$$x=y$$

$$2x = 1+2k$$

$$x=y = \frac{1+2k}{2}$$

$$\frac{3\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$3y - x = 1 + 2k \quad k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

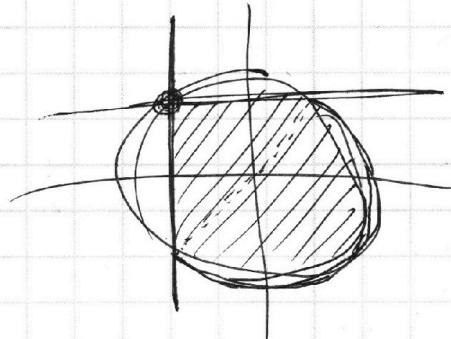
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+a)(y-b) \leq 0$$

$$x = -a \quad y = b$$

$$x \geq -a \quad y \leq b$$

$$x \leq -a \quad y \geq b$$

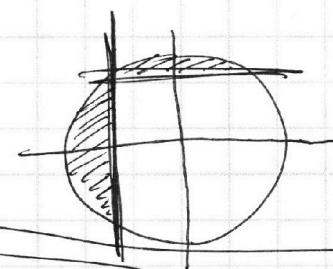


$$x = -4\sin\alpha$$

$$y = 4\cos\alpha$$

1 чет

$$\begin{aligned} x &\geq -4\sin\alpha \\ y &\leq 4\cos\alpha \end{aligned}$$

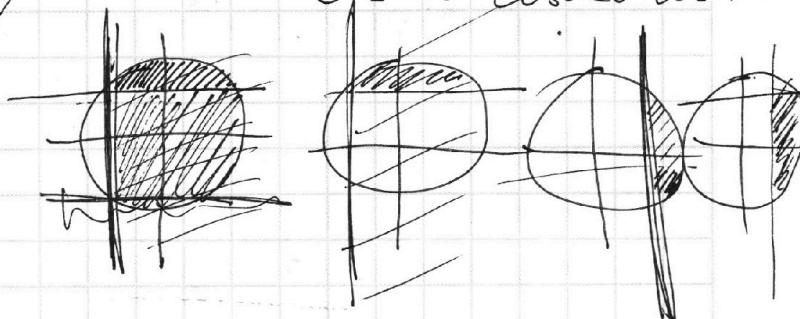


2 чет

$$\begin{aligned} x &\leq -4\sin\alpha \\ y &\geq 4\cos\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \sin\alpha > 0 & \sin\alpha > 0 \\ \cos\alpha > 0 & \cos\alpha < 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sin\alpha < 0 & \sin\alpha < 0 \\ \cos\alpha < 0 & \cos\alpha > 0 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

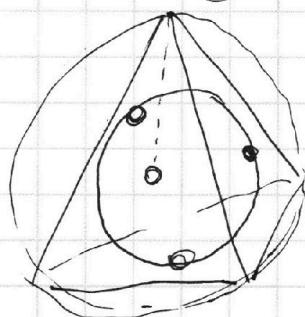
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$P = 2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{36-16\sin^2\alpha}} (+32\cos\alpha\sin\alpha) + 2 \frac{1}{2\sqrt{36-16\sin^2\alpha}} (-32\sin\alpha\cos\alpha)$$

кои-бо учеников
хобилго

4+4 билго $\times \cos-60$
учеников



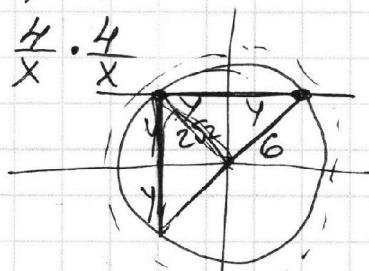
вероятность что Все пойдут

вероятность что Река

$$\frac{4}{x}$$

$$\frac{4}{x}$$

вероятность что одн



$$\frac{16}{x^2} \cdot 11 = \frac{(4+y)^2}{x^2}$$

$$16 \cdot 11 = 16 + 8y + y^2$$

$$y^2 + 8y + 16 - 16 \cdot 11 = y^2 + 8y - 160 = 0$$

$$P = 2\pi \cdot 6 + 2\sqrt{36-16\sin^2\alpha} + 2\sqrt{36-16\sin^2\alpha} = 12 + 160 = 176$$



$$4 \cdot 3 \cdot 11 = (4+y)(3+y)$$

$$12 \cdot 11 = 12 + y^2 + 7y$$

$$y^2 + 7y - 120 = 0$$

$$D = 40 + 480 = 520$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 15 \\ \hline 20 \\ \hline 120 \end{array}$$

принято

$$y \leq 4\cos\alpha$$

$$x \geq -4\sin\alpha$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = -4\sin\alpha$$

$$y = 4\cos\alpha$$

$$y = 2\sqrt{2}$$

$$x = 2\sqrt{2}$$

$$16\sin^2\alpha + 16\cos^2\alpha \leq 32$$

