

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

1) A - четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр \Rightarrow
 $A = 1111 \cdot k_1$, где $k_1 \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k_1 \leq 9$.

2) $1111 = 101 \cdot 11$, 101 - простое число \Rightarrow либо A , B , C было квадратом, либо B , либо C тоже должно делиться на 101 . C - двухзначное, т.е. $C < 101 \Rightarrow B : 101$

3) $B : 101$, оно трёхзначное, содержит $1 \Rightarrow B = 101$,
 т.к. из чисел $101 \cdot 1$, $101 \cdot 2$, $101 \cdot 3$ и т.д. до $101 \cdot 9$ только оно содержит 1 .

4) $B : 11$, $A : 11 \Rightarrow C$ должно $: 11$, из двухзначных чисел, которые содержат 5 , такое только $55 \Rightarrow C = 55$.

5) $C : 5$, $B : 5 \Rightarrow A : 5 \Rightarrow k_1 = 5 \Rightarrow A = 5555$.

В итоге ответ: $A = 5555$, $B = 101$, $C = 55$.

Других троек нет (т.к. все числа из условия одноразово), а наша тройка работает, т.к.

$A \cdot B \cdot C = 5555 \cdot 101 \cdot 55 = 5^2 \cdot 101^2 \cdot 11^2 = (5 \cdot 101 \cdot 11)^2$ - верно, это квадрат.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

~~Условие~~ У условия:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

Тогда: 1) либо $x+y+1=0$, но это невозможно, т.к. x, y - положительные.

2) либо $xy = (x-3)(y+3)$

$$xy = xy + 3x - 3y + 9$$

~~Условие~~ $x - y - 3 = 0$
 $y = x - 3$

Подставим в M:

$$\begin{aligned} & x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - (x-3)(x^2 - 6x + 9 + 9x) = \\ & = x^3 - (x-3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - (x^3 + 3x^2 + 9x - 3x^2 - 9x - 27) = \\ & = \cancel{x^3} - \cancel{x^3} - 3\cancel{x^2} - 9\cancel{x} + 3\cancel{x^2} + 9\cancel{x} + 27 = 27 \end{aligned}$$

Ответ: $M = 27$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (начало)

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$(\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x)) = (\cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x)$$

$$-\cos(2 \cdot \pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos(\pi y - \pi x) + \cos(2\pi x) = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi x + \pi y - \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi x - \pi y + \pi x}{2}\right) = 0$$

$$1) \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0 \quad 2) \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: пары $(x; y)$, удовлетворяющие условию: все пары действительных чисел такие, что либо $x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$ либо $3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$.

$$b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

Зная ограничения \arccos : $\arccos \frac{x}{4} \leq \pi, \arccos \frac{y}{9} \leq \pi \Rightarrow$

случай, где $\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \\ \arccos \frac{y}{9} = \pi \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x}{4} = -1 \\ \frac{y}{9} = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$

Значит, нам нужно отобрать $(x; y)$, удовлетво-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

рядомые $(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$,
лежащие в промежутках $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$, $-1 \leq \frac{y}{9} \leq 1$, и

исключая пару $(-4, -9)$:

1) $x+y = 1+2k$, $k \in \mathbb{Z}$: любая пара нечётного числа с чётным,

2) $3x-y = 1+2n$, $n \in \mathbb{Z}$: любая пара нечётного числа с чётным.

Получается, пар всего (кол-во чётн. x) \cdot (кол-во чётн. y) = $1 +$
 $+ (\text{кол-во нечётн. } x) \cdot (\text{кол-во чётн. } y) = 3 \cdot 10 - 1 + 4 \cdot 9 =$
 $= 65$

Ответ: 65 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 (начало)

Пусть всего одинадцатиклассников x человек, а выделено билетов было y . Найдем y .

1) Вероятность в начале месяца Пете и Васе быть на концерт была равна (кол-во случаев, где Петья и Вася оба попали на концерт) / (кол-во случаев всех). Мы выбираем 4 человек из x одинадцатиклассников, т.е. кол-во всех случаев = C_x^4 .

кол-во случаев, где Петья и Вася пойдут = C_{x-2}^2 потому что Петью и Васю на два билета мы уже выбрали, осталось выбрать 2-ух человек из оставшихся $(x-2)$ одинадцатиклассников.

$$\text{Получается, вероятность в начале месяца} = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)! \cdot (x-4)! \cdot 2! \cdot 2!}{(x-4)! \cdot 2! \cdot x!} = \frac{3 \cdot 4}{(x-1) \cdot x}$$

2) Вероятность в конце месяца вычисляется аналогично, просто вместо 4 билетов y нас $(4+y)$ билетов, т.е. кол-во всех случаев = C_x^{4+y}

кол-во случаев, где Петья и Вася пойдут = C_{x-2}^{y+2}

$$\text{А вероятность, что Петья и Вася пойдут на концерт в конце месяца} = \frac{C_{x-2}^{y+2}}{C_x^{4+y}} = \frac{(x-2)! \cdot (y+2)! \cdot (x-4-y)!}{(y+2)! \cdot (x-2-(y+2))! \cdot x!} = \frac{(y+2)! \cdot (y+2)! \cdot (x-4-y)!}{(x-1) \cdot x}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4 (продолжение)

$$= \frac{(4+y)(3+y)}{(x-1)x}$$

3) Тогда по условию:

$$\frac{3 \cdot 4}{x \cdot (x-1)} \cdot 3,5 = \frac{(4+y)(3+y)}{x(x-1)}$$

$$12 \cdot 3,5 = y^2 + 7y + 12$$

$$y^2 + 7y - 30 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 30}}{2} = \begin{cases} 3 & \text{- ответ.} \\ -10 & \text{- посторонний} \end{cases}$$

| $x(x-1) \neq 0$, т.к. 11-мес-
сиков минимум двое
(Петя и Вася)

Ответ: билетов на концерт было выделено 3 в конце месяца.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6 (начало)

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Рассмотрим график фигуры $\Phi(\alpha)$:

1) $x^2 + y^2 \leq 9$ — закрашенная окружность с центром в т. $(0;0)$ и радиусом 3.

2) $(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0$

~~или~~ с помощью метода областей:

$x = 2\cos\alpha$ — вертикальная прямая.

$y = 2\sin\alpha$ — горизонтальная прямая.

А закрасятся две области из четырех, в которых $(x-2\cos\alpha)$ и $(y-2\sin\alpha)$ одного знака.

Из того, что $-2\cos\alpha \geq -2$, $-2\sin\alpha \geq -2$ помня, что закрасятся следующие области:  (правая верхняя и левая нижняя).

Получается, что наша фигура (б.о.о) выглядит примерно так:



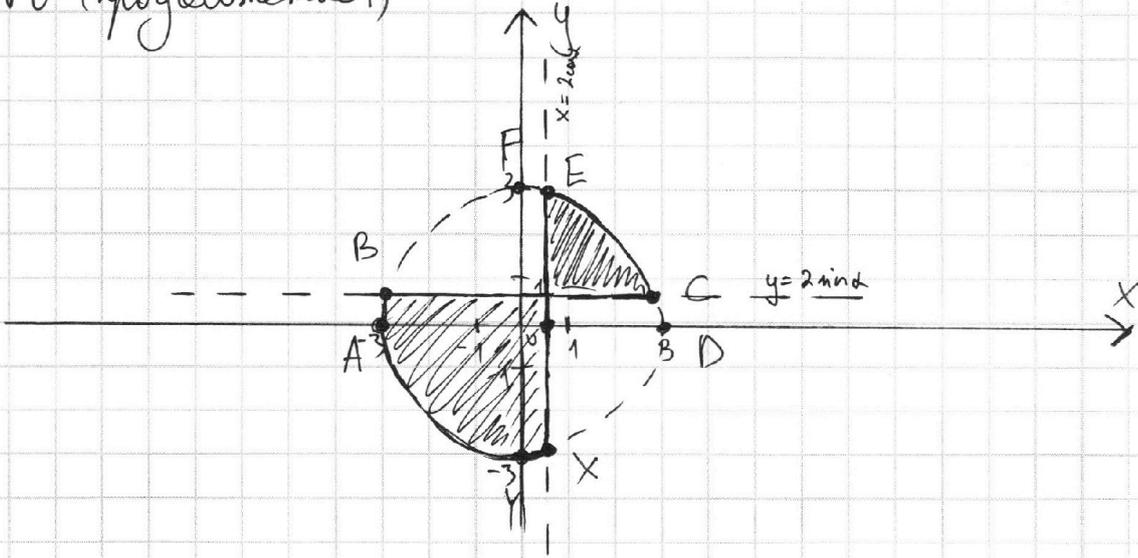
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6 (продолжение)

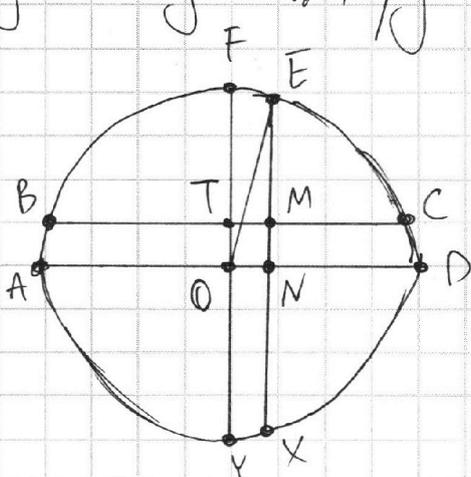


Поставим точки A, B, C, D, E, F, X, Y для упрощения на-
числения.

Заметим, что $\sqrt{AB} = \sqrt{CD}$, $\sqrt{FE} = \sqrt{XY}$.

Тогда часть периметра, лежащая на окружности,
всегда равна $\sqrt{AY} + \sqrt{FD} = \pi r = 3\pi$.

Т.е. величина периметра зависит только от
суммы длин хорд. Найдем её:



$$EX = EN + NX \stackrel{\text{в силу симметрии}}{=} 2 \cdot EN$$

~~EM~~ в $\triangle OEN$ по т. Пифагора:

$$EN = \sqrt{OE^2 - ON^2} = \sqrt{r^2 - ON^2}$$

А мы помним, что $EX \in \text{прямой}$

$$x = 2 \cos \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение 2)

значим, $ON = |2 \cos \alpha|$

$$\text{Тогда } EN = \sqrt{r^2 - ON^2} = \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

$$\text{Аналогично } CT = \sqrt{r^2 - OT^2} = \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

Тогда сумма хорд равна $2 \cdot \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + 2 \cdot \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$

Значит, нам нужно найти максимум функции

$$2(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha})$$

Для этого возьмем производную:

$$(2(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}))' = 2 \cdot \left((9 - 4 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \right)' + \left((9 - 4 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \right)'$$

$$\left((9 - 4 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot (9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4 \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)) \\ = \frac{1}{2} \cdot (9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 4 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left((9 - 4 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot (9 - 4 \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = \\ = -4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (9 - 4 \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

$$2 \cdot \left((9 - 4 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \right)' + \left((9 - 4 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \right)' =$$

$$= 2 \cdot \left(4 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} - 4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (9 - 4 \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$= 8 \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \left((9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} - (9 - 4 \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6 (продолжение 3)

Приравняем к нулю, чтобы найти точки, в которых может быть максимум всей нашей функции:

$$8. \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \left((9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} - (9 - 4 \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} \right) = 0$$

1) $\cos \alpha = 0$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$$

2) $\sin \alpha = 0$

$$\alpha = \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$$

3) $(9 - 4 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} - (9 - 4 \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}}$$

$$\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} = \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

$$9 - 4 \cos^2 \alpha = 9 - 4 \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k_3, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k_3}{2}, k_3 \in \mathbb{Z}$$

(оба подкоренных выражения всегда положительны, т.к. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$), поэтому не надо ничего проверять, а мы возведем в квадрат)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6 (продолжение 4)

Итого у нас норм:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k_1, \quad \alpha_2 = \pi k_2, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k_3}{2}, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

Учитывая, что \sin и \cos входят в выражение только во второй степени, достаточно рассматривать первую четверть.

Подставим все возможные нормы у первой четверти:

$$① \quad \alpha = 0 + 2\pi k_2, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$2(\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}) = 2(\sqrt{9-4 \cdot 1} + \sqrt{9-0}) = 2(\sqrt{5} + 3)$$

$$② \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_3, \quad k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$2(\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}) = 2(\sqrt{9-2} + \sqrt{9-2}) = 4\sqrt{7}$$

$$③ \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k_1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$2(\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}) = 2(\sqrt{9-0} + \sqrt{9-4}) = 2(\sqrt{5} + 3)$$

Теперь сравним их, чтобы найти максимум:

$$2(\sqrt{5} + 3) \quad \vee \quad 4\sqrt{7}$$

$$4\sqrt{5} + 6 \quad \vee \quad 2\sqrt{7}$$

$$5 + 9 + 6\sqrt{5} \quad \vee \quad 28$$

$$36 + 6\sqrt{5} \quad \vee \quad 14^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
6 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6 (продолжение 5)

$$180 < 196$$

\Rightarrow максимум $-4\sqrt{7}$ и достигается он в

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

А значение всего периметра будет равно ~~3\pi~~ $\sqrt{FD} + \sqrt{AY} + \text{сумма хорд} = (3\pi + 4\sqrt{7})$

Ответ: ~~то~~ максимальное значение равно $(3\pi + 4\sqrt{7})$, оно достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}$~~

~~$\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}$~~ 1) $\alpha=0$

$$\sqrt{9-4} + \sqrt{9} = \sqrt{5} + 3$$

$$2) \sqrt{9-4 \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{9-4 \cdot \frac{1}{2}} = 2\sqrt{7}$$

$$3) \sqrt{9-0} + \sqrt{9-4} = \sqrt{5} + 3$$

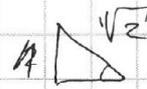
$$2\sqrt{7} \quad \vee \quad \sqrt{5} + 3$$

$$28 \quad \vee \quad 5 + 9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5}$$

$$14 \quad \vee \quad 6\sqrt{5}$$

$$14^2 \quad \vee \quad 36 \cdot 5$$

$$196 \quad \vee \quad 180$$



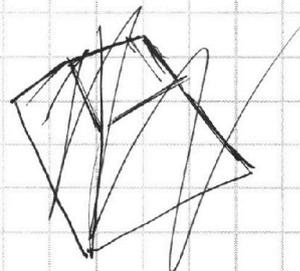
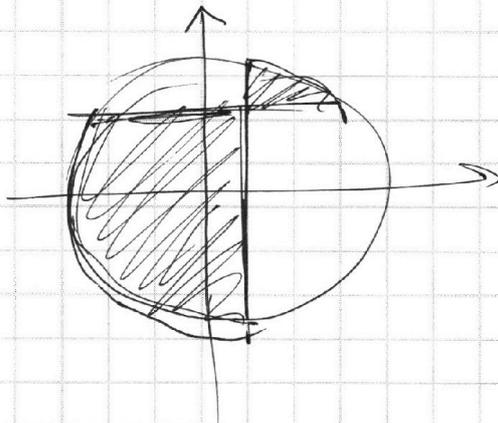
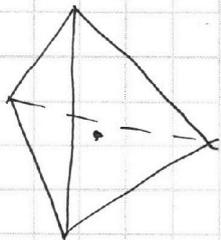
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot 14 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \cdot 136 \\ \hline 196 \\ \cdot 3 \\ \hline 36 \\ \cdot 5 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi 6}{2}$$

$$4\sqrt{7} + \pi r = 4\sqrt{7} + 3\pi$$



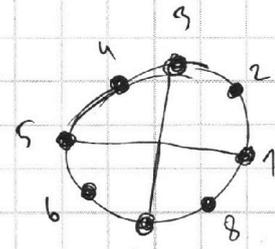
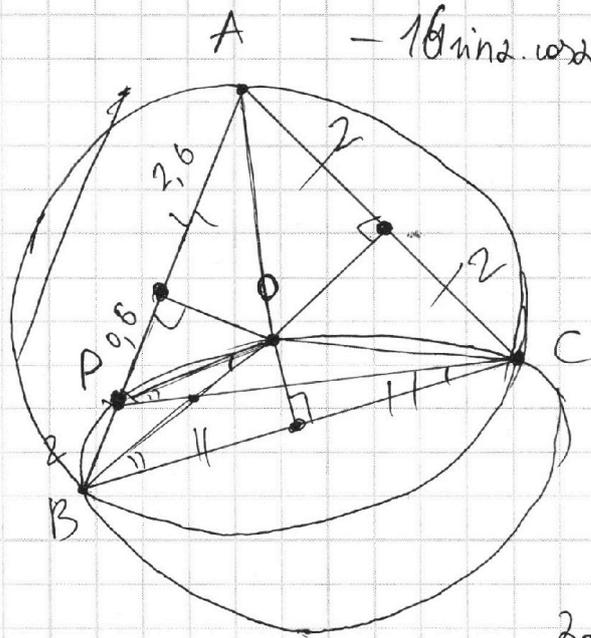


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$-16 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = 0$$

$S_{ABC} = ?$

$$\left(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$AP = \frac{16}{5}$$

$$BP = 2 \quad AC = 9$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\frac{16}{5} = 3 \frac{1}{5}$$

$$5 \frac{1}{5} \quad 2,5 + \frac{1}{10}$$

~~$2,6$~~

$$(9 - 4 \cos^2 \alpha)' =$$

$$(-4 \cos^2 \alpha)' =$$

$$= -4 \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) =$$

$$= 8 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$(-4 \sin^2 \alpha)' =$$

$$-4 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \cdot (9 - 4 \sin^2 \alpha) \cdot (-8 \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$4 \sin \alpha \cos \alpha \cdot (9 - 4 \cos^2 \alpha - 9 + 4 \sin^2 \alpha)$$

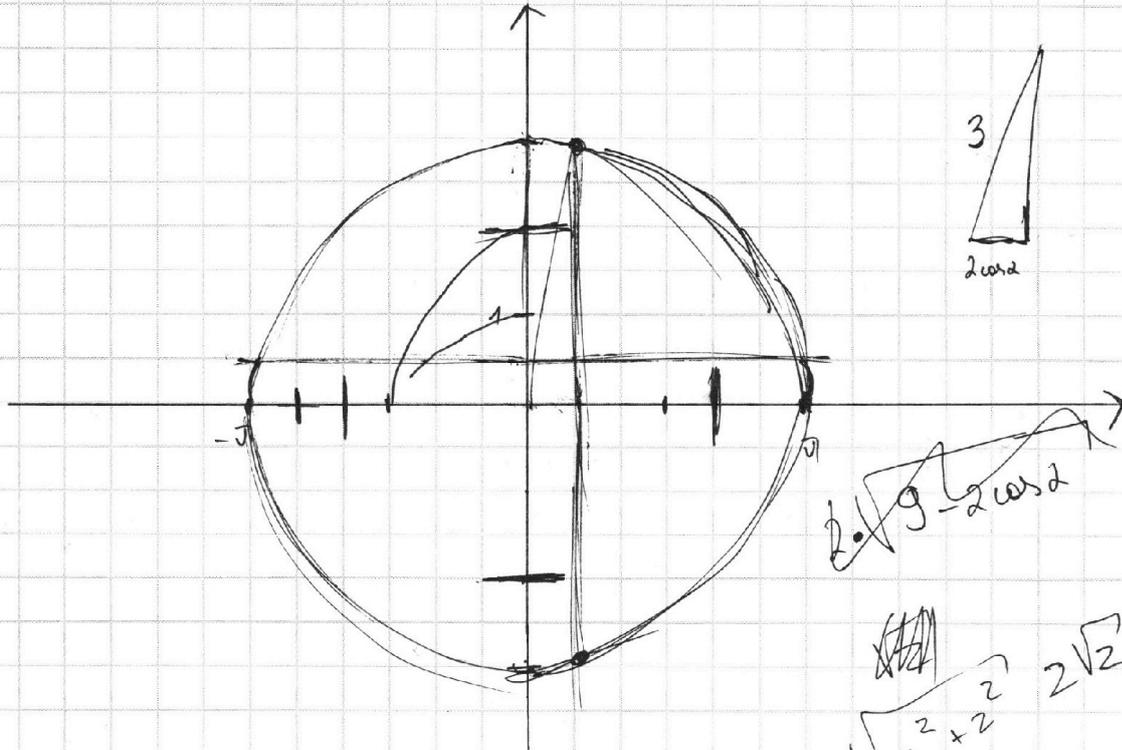


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x = 2 \cos \alpha$$

$$y = 2 \sin \alpha$$

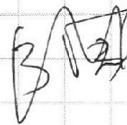
$$\frac{\pi r}{2} \approx 4.5 \quad 2\pi r$$



~~2.31.31~~

$$2 \cdot \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

~~$$\sqrt{3^2 + 3^2}$$~~



$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

~~$$\sqrt{9}$$~~

$$2 \left(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} \right)$$

$$y = \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

$$\left((9 - 4 \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \right)' =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1111
2222
3333
4444

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 7} \\ \underline{7} \\ 41 \\ \underline{36} \\ 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ \underline{11} \\ 11 \\ \underline{11} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \overline{) 7} \\ \underline{7} \\ 31 \\ \underline{31} \\ 0 \end{array}$$

~~X~~
2
3
4
5
6
7

$$1111 = 101 \cdot 11$$

1) $A = 1111 \cdot t$, $C = \overline{5x}$, $B = \overline{ab1}$

$101 \cdot 11$ $\begin{array}{l} :5 \\ \hline 25 \end{array}$ $\begin{array}{l} :5 \\ \hline 20 \end{array}$

~~$\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = -1$~~
 $\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = -1$
 $\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 0$

$t \cdot 101 \cdot 11 \cdot 5^2 \cdot B = ?^2$ $B = 101 \cdot 11 \cdot t \cdot h = x$

2) $C = \overline{5x}$; $A = 1111 \cdot t$; $B = \overline{ab1} = 101 \cdot h$

$?^2 = \overline{5x} \cdot 101 \cdot 11 \cdot t \cdot h \cdot 101$

$A = 5555$ $C = 55$ $B = 101$

$5 \cdot (101 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11) \cdot 101$

$(x-3)(y+3) = xy - 3y + 3x - 9$

$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$(x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy)$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$

$\frac{x+y+1}{xy}$

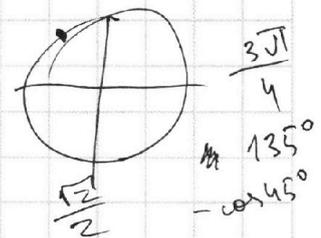
$\frac{x+y}{xy} = \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy}$

$\geq 2\sqrt{\frac{xy}{xy}}$

$2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\frac{2\sqrt{xy} + 1}{xy}$

$\frac{2}{\sqrt{xy}}$



-1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$xy = xy - 3x + 3y - 9$$

$$\text{Вн } y - x - 3 = 0$$

$$y = x + 3$$

$$C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)!}{(x-4)! \cdot 2!} = \frac{(x-3)(x-2)}{2}$$

$$x^3 - (x+3)^3 - 9x \cdot (x+3) \quad C_x^4 = \frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{4!}$$

$$(x-x-3)(x^2 + x(x+3) + (x+3)^2) - 9x(x+3)$$

$$\text{П В } -3(x^2 + x^2 + 3x + x^2 + 6x + 9) \quad \begin{array}{r} -54 \\ -40 \end{array}$$

$$\text{П В } \cdot C_{x-2}^2 - 9x^2 - 27x - 27 - 9x^2 - 27x$$

$$C_x^4 - 18x^2 - 27 \cdot 2x - 27 =$$

$$= -9 \cdot (2x^2 + 6x + 3)$$

$$\begin{array}{r} \cdot 10 \\ 81 \\ -27 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\frac{(x-3)(x-2) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot (x-3)(x-2)(x-1)x}$$

$$x_0 = \frac{27 \cdot 2}{-18 \cdot 2} = -\frac{27}{18} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{12}{x(x-1)}$$

$$-27$$

$$y_0 = -18 \cdot \frac{9}{4} + 27 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} - 27 =$$

$$= -\frac{81}{2} + 81 - 27 = -40,5 + 54 = 13,5$$

$$\frac{(x-2)!}{(x-2-2+y)! \cdot (2+y)!} = \frac{(-27; -\infty)}{(x-4-y+1) \dots (x-2)} \cdot \frac{C_{x-2}^{2+y}}{C_x^{4+y}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$1) \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$~~

~~$$k \in \mathbb{Z} \quad 2) \sin \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0$$~~

~~$$\pi x + \pi y = 2\pi k$$~~

~~$$x + y = 2k$$~~

~~$$3\pi x - \pi y = 2\pi k$$~~

~~$$3x - y = 2k$$~~

~~$$3x = y + 2k$$~~

~~$$y = 3x - 2k$$~~

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$[0; \pi]$ - arccos

использовать:

$$\arccos \frac{x}{4} = \pi$$

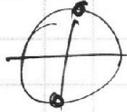
$$\frac{x}{4} = -1$$

$$x = -4$$



~~$$\arccos \frac{y}{9} = \pi$$~~

~~$$y = -9$$~~



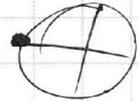
~~$$-4 \leq x \leq 4 \quad \frac{\pi}{2} + \pi k$$~~

~~$$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$$~~

~~$$-9 \leq y \leq 9$$~~

~~$$\cos 2\pi x + \cos(\pi y - \pi x)$$~~

~~$$2 \cdot \cos \frac{2\pi x + \pi y - \pi x}{2} \cdot \cos \frac{2\pi x - \pi y + \pi x}{2} = 0$$~~



~~$$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$$~~

~~$$\cos \frac{3\pi x - \pi y}{2} = 0$$~~

~~$$\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k$$~~

~~$$x + y = 1 + 2k$$~~

~~$$x = 1 \quad y = 2$$~~

~~$$3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k$$~~

~~$$3x - y = 1 + 2k$$~~

~~$$(\sin \pi - \sin 2\pi) \sin \pi = (\cos \pi + \cos 2\pi) \cdot \cos \pi$$~~

~~$$(\sin(-4\pi) - \sin(-9\pi)) \cdot \sin(-4\pi) =$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x!}{(x-y)! \cdot (y)!} = \frac{(x-y+1) \cdot \dots \cdot x}{(y)!}$$

$$\frac{(x-y+1) \cdot \dots \cdot (x-2) \cdot (y)!}{(2+y)! \cdot (x-y+1) \cdot \dots \cdot x}$$

$$= \frac{(3+y)(4+y)}{(x-1) \cdot x}$$

$$\frac{12 \cdot 3,5}{x(x-1)} = \frac{(3+y)(4+y)}{x(x-1)}$$

$$42 = 12 + y^2 + 7y$$

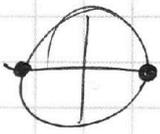
$$y^2 + 7y - 30 = 0$$

$$D = 49 + 120 = 169$$

$$49 + 4 \cdot 30 = 169$$

$$y_{1,2} = \frac{-7 \pm 13}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -10 \end{matrix}$$

Handwritten notes and calculations:
 $12 - 12 \cdot 2,5 = 12 - 30 = -18$
 $12(1 - 2,5) = 12(-1,5) = -18$
 $12 - 2,5 \cdot 12 = 12 - 30 = -18$
 $-4 \cdot 3 - 9 = -12 - 9 = -21$
 $-9 \cdot 3 - 4 = -27 - 4 = -31$
 $-4, -3, -1, 0$
 $6+1$



чѐм: $2+1$
 кѐм: 4
 $30-1+36$
 $66-1$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x \cdot \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos 2\pi x - \cos(\pi y - \pi x) = 0$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi x + \pi y - \pi x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi x - \pi y + \pi x}{2}\right) = 0$$

$-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$

чѐм: $4 \cdot 2 + 1 = 9$

кѐм: $5 \cdot 2 = 10$