



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin \alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Для начала поймём, что четырёхзначное число вида $\overline{aaba}$ делится на 11 (по признаку делимости $a+a-a-a : 11$), а частное от их деления имеет вид $\overline{a0a}$. Это логично:

$$\begin{array}{r} \times a0a \\ \hline 11 \\ + a0a \\ a0a \\ \hline aaaa \end{array}$$

(где a — какая-то цифра)

Значит в произведение $A \cdot B \cdot C$ входят множители вида: 11; $\overline{a0a}$ (где a — цифра из которой составлено первое число)

Теперь поймём, что $\overline{a0a} = a \cdot 101$. Это тоже довольно логично:

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ \hline a \\ \hline a0a \end{array}$$

(где a — какая-то цифра)

Теперь мы можем сказать, что в число $A \cdot B \cdot C$ входят множители $a; 11; 101$ (a — цифра из которой состоит число A). Но т.к. $A \cdot B \cdot C$ — квадрат натурального числа, значит каждый из множителей входит в него чётное количество раз. Заметим, что 101 входит в число A только один раз, значит оно должно входить ещё один раз в число B или C (больше одного раза не может,



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. $101 \cdot 101$ — уже больше чем 4-значное число. Также 101 не может входить в число C , т.к. оно двузначное. Значит 101 входит в разложение числа B . Значит число B имеет вид $\overline{606}$. ~~Но~~ Но хотя бы одна цифра в числе B — 2 . Значит $B = 202$. Итак, теперь имеем следующую картинку: $A = a \cdot 101 \cdot 11$; $B = 2 \cdot 101$; $C = C$ (про C пока ничего не знаем, кроме условия). Рассуждаем дальше, видя, что 2 входит пока лишь один раз, как и 11 . Т.к. a -цифра и не может делиться на $11 \Rightarrow C : 11$. Но т.к. $C \in \mathbb{N}$ и в C есть хотя бы одна цифра $3 \Rightarrow C = 33$. Теперь посмотрим на $A \cdot B \cdot C$, в него входят: a ; 11 ; 101 ; 2 ; 101 ; 3 ; 11 . Видим, что есть пары у 2 и 3 , значит $a : 2$ и $a : 3$ (при этом a -цифра) $\Rightarrow a = 6$. Значит мы нашли единственную тройку чисел: $(6666; 202; 33)$, удовлетворяющую условию. (Я не упомянул в решении, что 101 — простое, но это и так понятно)

Ответ: $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

Для начала поработаем с числом M . Поймём, что:

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y).$$

Теперь поработаем с K :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

Приведём всё к одному знаменателю:

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$x, y \neq 0$ (т.к. они положительные)

$y+1 \neq 0$ (аналогично)

$x \neq 1$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

Т.к. $x+y+2 \neq 0$ (т.к. x, y - положительные)

$\Downarrow$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1$$

$$x - y = 1$$

$\Downarrow$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = (x-y)^3 = 1^3 = 1$$

Ответ: $M = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \frac{1}{2} (\cos(\pi x - \pi y) - \cos(\pi x + \pi y)) = \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} (\cos(\pi x - \pi y) + \cos(\pi x + \pi y))$$

Применим две формулы.

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \frac{1}{2} \cos(\pi x + \pi y) + \frac{1}{2} \cos(\pi x - \pi y)$$

Перенесем в разные стороны.

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$2 \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \quad m, k \in \mathbb{Z}$$

Сократим на $\pi \neq 0$:

$$\begin{cases} \frac{3x+y}{2} = \frac{1}{2} + k \\ \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y = 1+2k \\ x-y = 1+2m \end{cases} \quad m, k \in \mathbb{Z}$$

$\Downarrow$

Нам подходят пары чисел $(x; y)$ таких, что

$$3x+y-1=2k \text{ или } x-y-1=2m, \text{ где } m, k - \text{целые числа.}$$

Ответ: а) $3x+y-1=2k$; $x-y-1=2m$ ($m, k \in \mathbb{Z}$) - нам подходят



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

Пусть кол-во 11-классников — n , а кол-во добавленных билетов — k . Тогда вероятность Пете и Васе попасть на концерт внезапно равна:

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{4!(n-4)!}{n!} = \frac{12}{n(n-1)}$$

(C_{n-2}^2 — кол-во ситуаций когда 2 билета у Пети и Васи, C_n^4 — кол-во вообще всех возможных ситуаций)

Аналогично посчитаем вероятность после выделения доп. билетов:

$$\frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{4+k}} = \frac{(n-2)!}{(2+k)!(n-4-k)!} \cdot \frac{(4+k)!(n-4-k)!}{n!} = \frac{(k+3)(k+4)}{n(n-1)}$$

(C_{n-2}^{2+k} — кол-во ситуаций когда 2 билета у Пети и Васи, C_n^{4+k} — кол-во вообще всех возможных ситуаций).

Так как вероятность по условию увеличилась в 2,5 раза, можем записать уравнение:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{12}{n(n-1)} \cdot 2,5 = \frac{(k+3)(k+4)}{n(n-1)}$$

Т.к. кол-во 11-классников минимум 2 (Петя и Вова)

$$n(n-1) \neq 0$$

сокращаем

$$30 = (k+3)(k+4)$$

$$k^2 + 7k + 12 = 30$$

$$k^2 + 7k - 18 = 0$$

$$D = 49 + 4 \cdot 18 = 121$$

$$k_1 = \frac{-7 \pm 11}{2}$$

$k_1 = -9$ — не подходит, т.к. мы добавили билеты, и положительное кол-во, и натуральное

$$k_2 = 2 \text{ — подходит}$$

$\Downarrow$

В конце месяца выделили дополнительно 2 билета

Значит их стало $4 + 2 = 6$

Ответ: 6 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{BCP} = S_{ACP} \cdot \frac{BP}{AP} = 27 \cdot \frac{5}{15} = 27 \cdot \frac{10}{15} = 27 \cdot \frac{2}{3} = 18$$



$$S_{ADC} = S_{ACP} + S_{BCP} = 27 + 18 = 45$$

Ответ: $S_{ADC} = 45$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

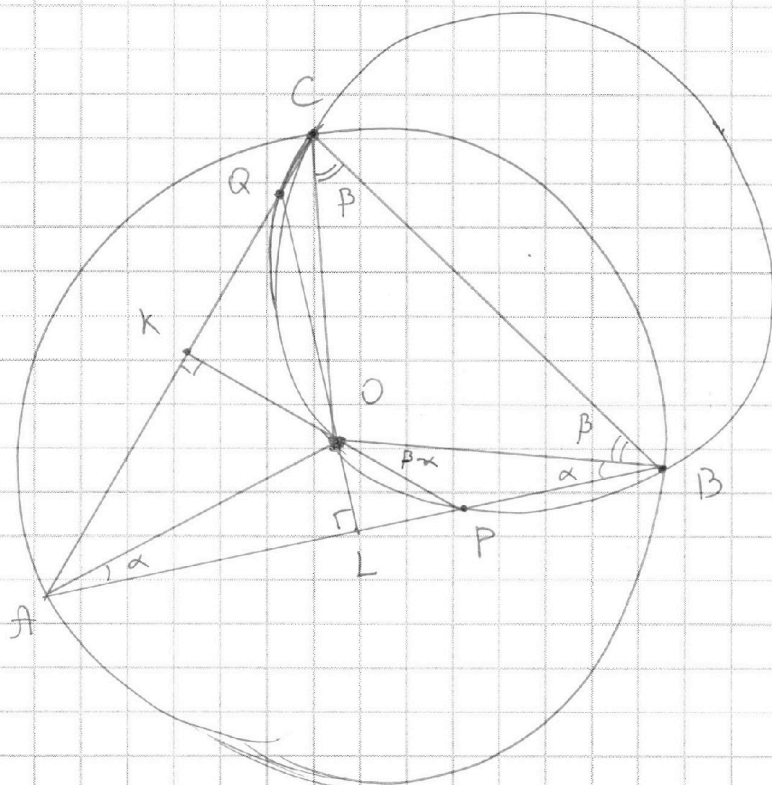
7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5



Обозначим $\angle OAB = \alpha$, а $\angle CBO = \beta$. Тогда:

$$\angle BCO = \beta; \angle OBA = \alpha \quad (\triangle COB - p/d; \triangle AOB - p/d)$$

Проведём OP, OQ (Q — точка пересечения ω_2 с AC)

$$\angle COB = 180 - 2\beta$$

$\Downarrow$

$$\angle BOP = 180 - \alpha - \beta - (180 - 2\beta) = \beta - \alpha \quad (\text{т.к. } COBP - \text{вписанный})$$

Построим OK и OL — перпендикуляры из O на AC и AB (они же будут медианами и биссектрисами, т.к.

$$\triangle AOC - p/d \text{ и } \triangle AOB - p/d)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle AOC = 180 - (180 - 2\alpha - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta \text{ (т.к. } \triangle ABC \text{ и } \triangle AOC)$$

$$\angle COK = \angle AOK = \alpha + \beta \text{ (т.к. OK - биссектриса)}$$

Заметим, что:

$$\angle COK + \angle COB + \angle BOR = (\alpha + \beta) + (180 - 2\beta) + (\beta - \alpha) = 180^\circ$$

$\Downarrow$

K, O, P - лежат на одной прямой

Аналогично A, O, Q - лежат на одной прямой (всё тоже самое, т.к. картинка вообще не поменяется)

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ACP$ по теореме Пифаго-

ра:

$$AP^2 = AK^2 + KP^2$$

$\Downarrow$

$$KP^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} - \frac{81}{4} = \frac{144}{4}$$

$\Downarrow$

$$KP = \frac{12}{2} = 6$$

$\Downarrow$

$$S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} \cdot KP \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$$

Проведём CP. CP делит $\triangle ABC$ на $\triangle ACP$ и $\triangle BCP$, при-

чем $\frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle BCP}} = \frac{AP}{BP}$ (т.к. их высоты одинаковы, это одна

и та же высота т.к. точки C и основания лежат на одной прямой)



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

⇓

$$M = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi r = 5\pi - \text{длина дуги}$$

Тогда:

$$M = 5\pi + 8 + 8 = 16 + 5\pi$$

$$\text{Ответ: } M = 16 + 5\pi, \text{ при } \alpha = \frac{4}{5} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

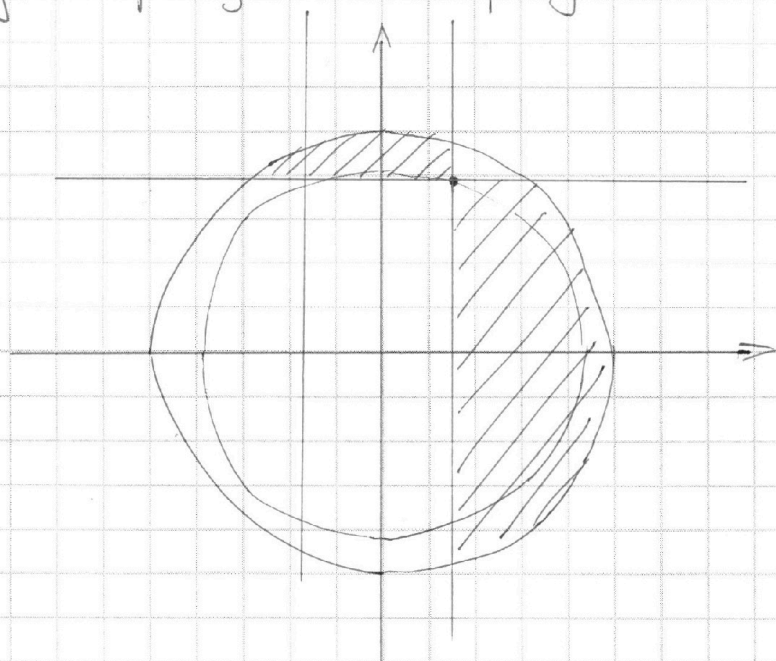
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь поймём, что если точка пересечена будет в подосью абсцисс, то ситуация будет симметричной какой-то из ситуаций, где точка пересечена выше. Значит мы можем рассмотреть только когда точка пересечена в верхней полуокружности и попутно найти значение(x) а, повторяющиеся максимум, расположенные симу. Теперь взглянем на рисунок:



Проведём ещё одну прямую, симметричную $y = 3\sqrt{2} \cos x$. Очевидно, что при перемещении точки пересечения по окружности, периметр будет возрастать (по часовой стрелке). Достигнет же пика периметр, когда точка



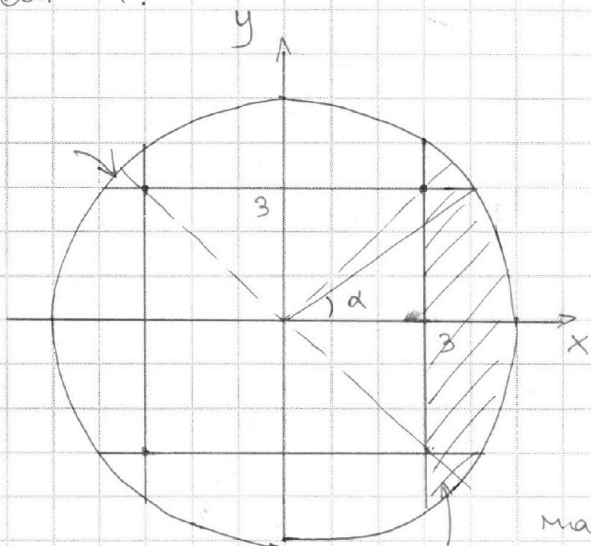
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пересечения будет иметь координаты $(3; 3)$. Найдем M .



$$x = y = 3$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

Всего точек достижения максимума — 4. Это легко

найти:

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{4}$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = \frac{7\pi}{4}$$

Найдем M . ~~Заметим, что такие прямые — разбросаны~~

Для начала найдем пересечение прямой с окружностью:

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

$$y = \pm 4 \text{ (аналогично)}$$

$$\text{общая точка}$$

Заметим, что куски отбрасываются сторонами

полю пересек, тогда мы получим полю окружности



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

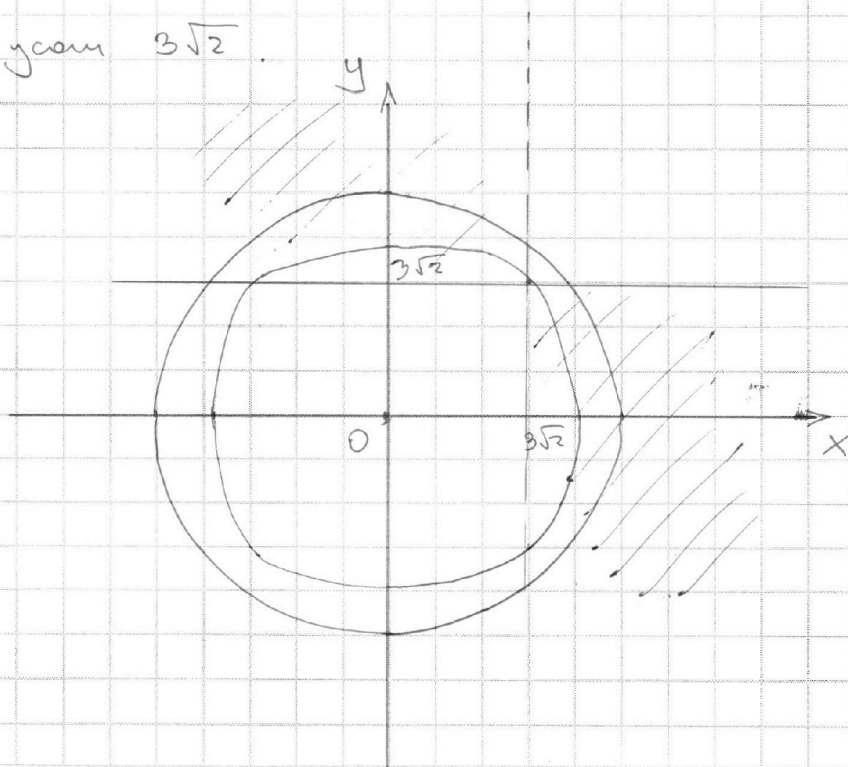
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

Второе уравнение системы задаёт круг с центром в $(0;0)$ и радиусом 5. Первое же уравнение задаёт и кусок плоскости, ограниченный прямой $x = \sin \alpha \cdot 3\sqrt{2}$ и $y = \cos \alpha \cdot 3\sqrt{2}$ (при фиксированном α) из которых нам подходят только 2 (см. рис.). При изменении α , будет перемещаться точка пересечения этих прямых. Перемещаясь будет по окружности с центром в $(0;0)$ и радиусом $3\sqrt{2}$.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3x + y - 1 = 2k \\ x - y - 1 = 2m \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$3x = 2k + 1 - y$$

$$x \in [-5; 5]$$

$$x = \frac{2k + 1 - y}{3}$$

$$y = 2k + 1 - 3x$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{2k + 1 - 3x}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

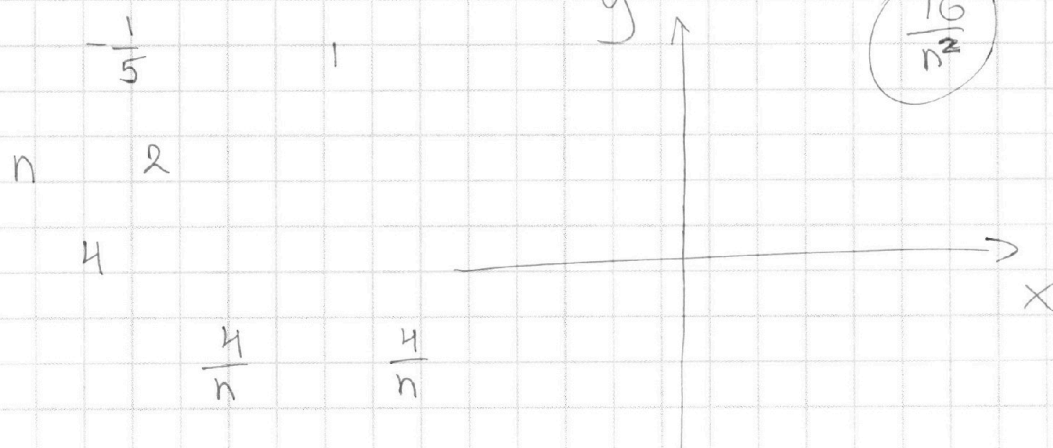
$$\frac{x}{5} \in [-1; 1]$$

$$x = -1$$

$$x \in [-5; 5]$$

$$\frac{2k + 1 - 3x}{4} \in [-1; 1]$$

$$2k + 1 - 3x \in [-4; 4]$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{16}{n^2}$$

$$\frac{(4+k)!}{n} \cdot \frac{(4+k)!}{n}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 49 \\ \hline 121 \end{array}$$

$$\frac{40}{n^2} = \frac{(4+k)^2}{n^2}$$

$$40 = (4+k)^2$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$40 = 16 + 8k + k^2$$

$$30 = (k+3)(k+4)$$

$$k^2 + 8k - 24 = 0$$

$$20 < 64 + 4 \cdot 24 = 64 + 96 = 160$$

$$\frac{C_n^4}{C_n^2} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (n-4)!}{n!} =$$

$$= \frac{12}{(n-1)n} = \frac{12}{n^2 - n}$$

k

$$\frac{C_n^{2+k}}{C_n^{4+k}} =$$

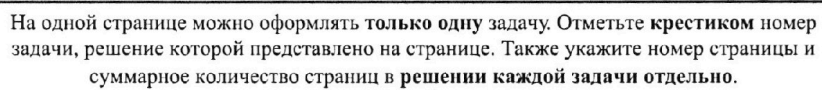
$$= \frac{(n-2)!}{(2+k)!(n-4-k)!} \cdot \frac{(4+k)! \cdot (n-4-k)!}{n!} =$$

$$12 = (k+3)(k+4) = \frac{(k+3)(k+4)}{n^2 - n}$$

$$12 = k^2 + 4k + 3k + 12$$

$$k^2 + 7k = 0$$

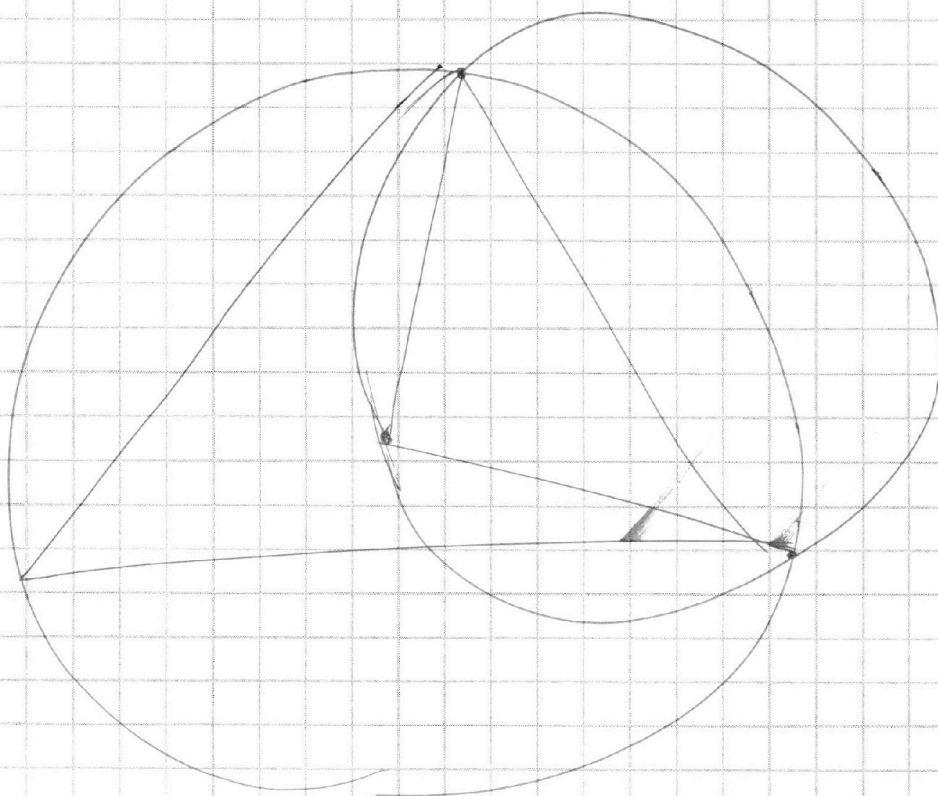
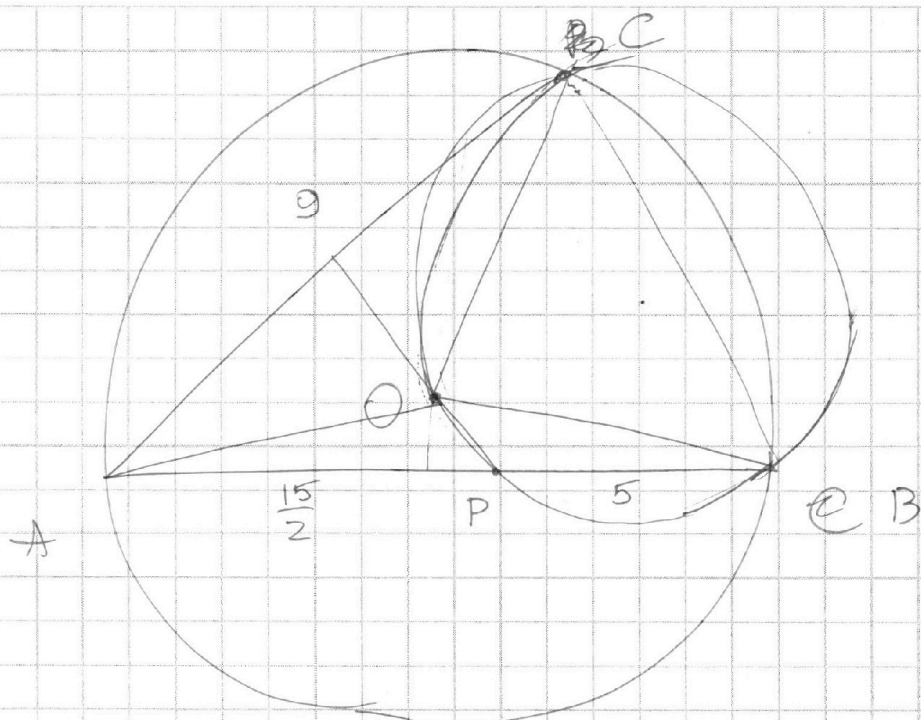
$$X = \beta - \alpha$$

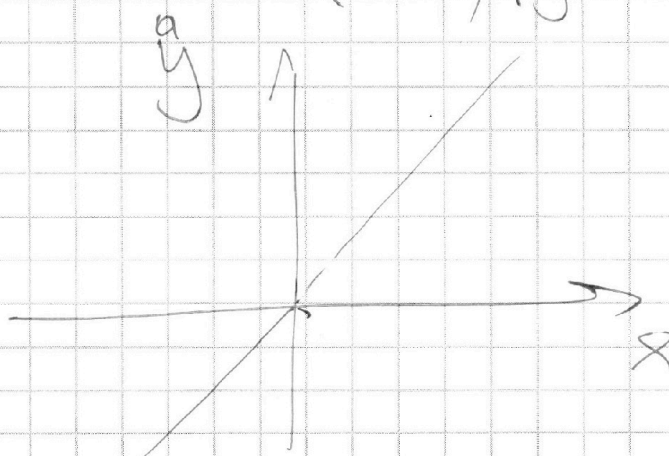


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





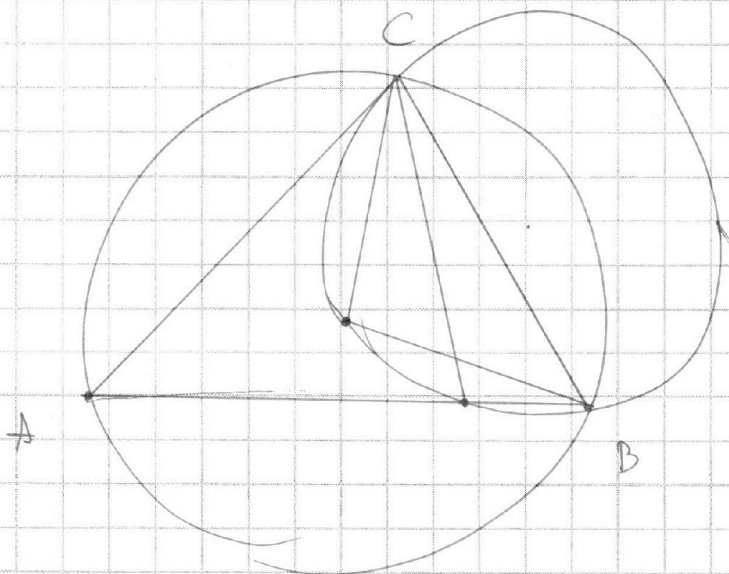
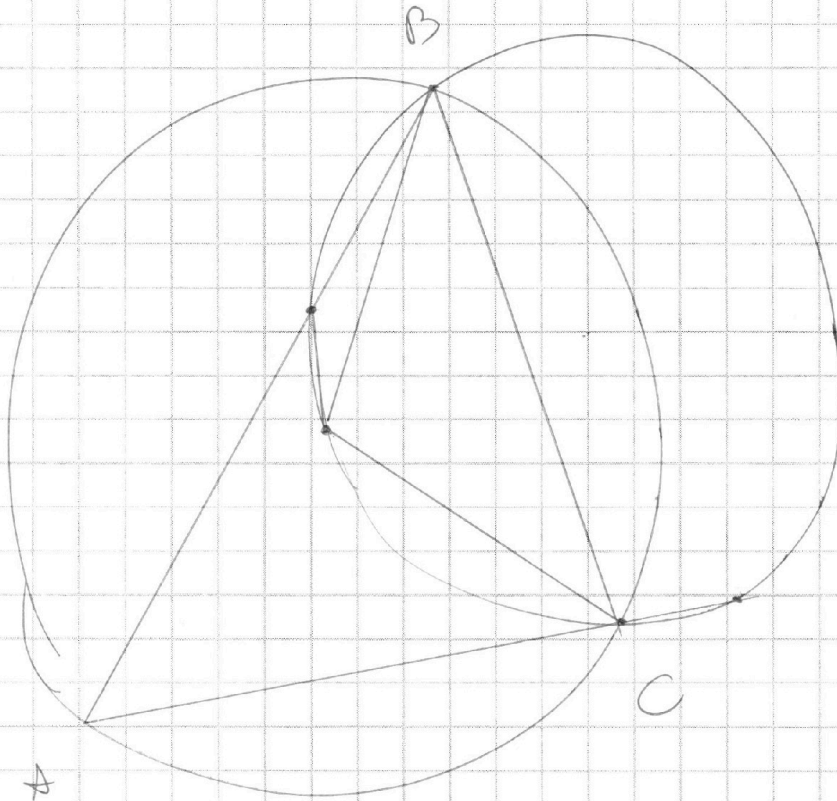


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☐

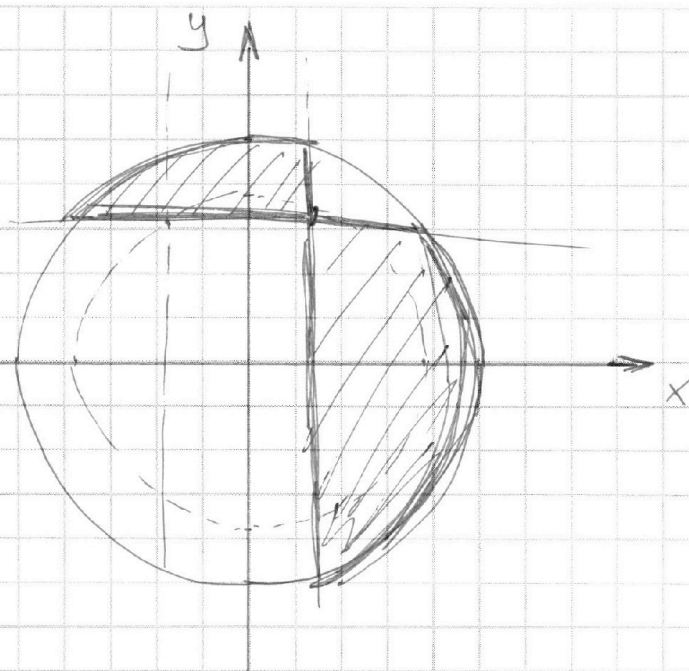
5 ☐

6 ☐

7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$xy - x3\sqrt{2}\cos\alpha - y3\sqrt{2}\sin\alpha + 9/18\sin\alpha\cos\alpha$$

$$3\sqrt{2}\sqrt{5}$$

$$9/2\sqrt{25}$$

←

$$\sin x + \cos x$$

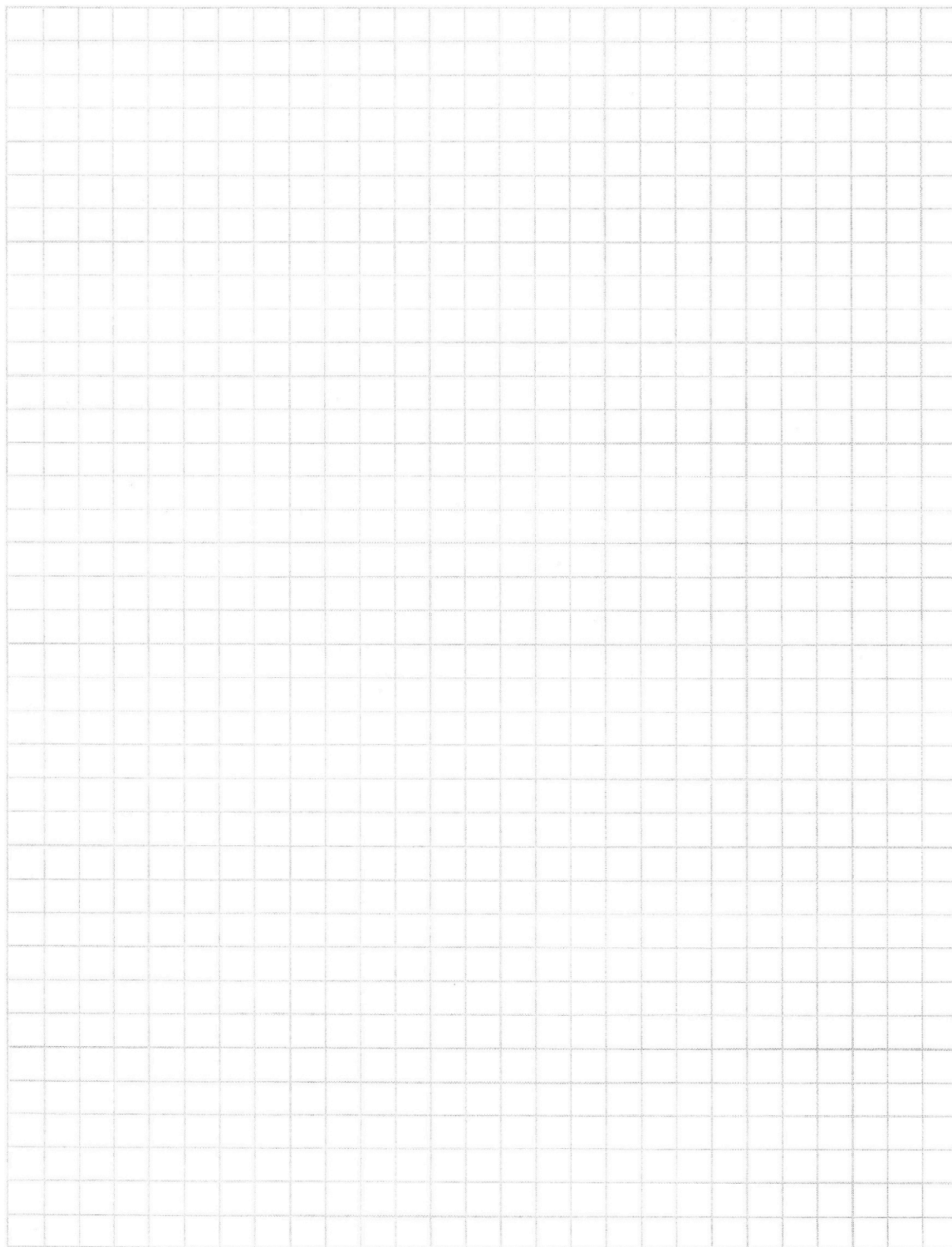


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

$$(x-y)^3 = (x-y)(x^2 - 2xy + y^2) =$$

$$= x^3 - 2x^2y + xy^2 - yx^2 + 2xy^2 + y^3 =$$

$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3 =$$

$$= x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$$

$$x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x+y+2 \neq 0$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1$$

$$x - y = 1$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x - y = 1$$

$$x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$

$$x^2y^3 =$$

$$= (x^2 - y^2)$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 3xy =$$

$$= x^2 + xy + y^2 - 3xy =$$

$$= x^2 - 2xy + y^2 =$$

$$= (x-y)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{01}$

$(A; B; C)$

$$A = \overline{aaaa}$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 7} \\ \underline{7} \\ 41 \\ \underline{35} \\ 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 202 \\ 11 \\ \hline 202 \\ 202 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ \underline{101} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ \underline{11} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ 101 \\ \hline 101 \\ 101 \end{array}$$

$$101 \cdot 11 \cdot a$$

$$101 \overline{) 11}$$

$$\begin{array}{l} 6 \cdot 101 \\ 101 \cdot 11 \cdot a \\ 202 \end{array}$$

$$11 \cdot 101$$

$$(101)$$

$$(202)$$

$$\begin{array}{r} \times 303 \\ 11 \\ \hline 303 \\ 303 \\ \hline 333 \end{array}$$

$$B = 202$$

$$A = 2222$$

$$202 \cdot 202 \cdot 11 = C$$

$$202$$

$$202$$

$$x \sim y$$

$$101 \cdot a \cdot 11$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \pi x + \frac{1}{2} (\cos \pi(x-y) - \cos \pi(x+y)) = \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} (\cos \pi(x-y) + \cos \pi(x+y))$$

$$\sin^2 \pi x + \frac{1}{2} \cos \pi(x-y) - \frac{1}{2} \cos \pi(x+y) = \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} \cos \pi(x-y) + \frac{1}{2} \cos \pi(x+y)$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \frac{1}{2} (\cos \pi(x-y) + \cos \pi(x+y))$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi(x+y)$$

$$-\cos 2\pi x = \cos \pi(x+y)$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y$$

$$2 \cos x \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos(\pi x + \pi y) + \cos 2\pi x =$$

$$= 2 \cdot \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi y - \pi x}{2}$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x+y}{2} = \frac{1}{2} + k$$

$$3x+y = 1+2k$$

$$\frac{\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$y-x = 1+2k$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 3x+y-1 &= 2k \\ 3x+y &= 1+2k \\ 2x &= 2y \\ x &= y \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha =$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \pi x + \sin \pi y = 2 \sin \frac{\pi}{2} (x + y) \cos \frac{\pi}{2} (x - y)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \pi y \sin \pi x = \frac{1}{2} (\cos \pi (x - y) - \cos \pi (x + y))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \pi x \cos \pi y = \frac{1}{2} (\cos \pi (x - y) + \cos \pi (x + y))$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

