

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Для начала поймём, что четырёхзначное число вида $\overline{aa} \overline{aa}$ делится на 11 (по признаку делимости $a+a-a-a : 11$), а частное от их деления имеет вид \overline{aa} . Это логично:

$$\begin{array}{r} \times \overline{aa} \\ \hline 11 \\ \hline \overline{aa} \overline{aa} \\ + \overline{aa} \\ \hline \overline{aa} \overline{aa} \end{array} \quad (\text{здесь } a - \text{какое-то цифра})$$

Значит в произведение $A \cdot B \cdot C$ входит множителем вид:

11; \overline{aa} (здесь a — цифра из которой составлено первое число)

Теперь поймём, что $\overline{aa} = a \cdot 101$. Это тоже довольно логично:

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ \hline a \\ \hline \overline{aa} \end{array} \quad (\text{здесь } a - \text{какое-то цифра})$$

Теперь мы можем сказать, что в число $A \cdot B \cdot C$ входит множители $a; 11; 101$ (a — цифра из которой составлено число A). Но т.к. $A \cdot B \cdot C$ — квадрат натурального числа, значит каждый из множителей входит в него чётное количество раз. Заметим, что 101 входит в число A только один раз, значит это должно входит ещё один раз в число B или C (больше одного раза не может,



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

м.к. $101 \cdot 101$ — уже большое чем 4-значное число. Так же 101 не может входить в число C , т.к. оно 4-значное.
Значит 101 входит в разложение числа B . Значит число B имеет вид $\overline{B0B}$. Но хотя бы одна цифра B число $B = 2$. Значит $B = 202$. И так, теперь имеем следующую картинку: $A = a \cdot 101 \cdot 11$; $B = 2 \cdot 101$; $C = C$ (пока пока не знаем, кроме условия). Рассуждаем дальше, видим, что 2 входит пока лишь один раз, как и 11. Т.к. a -цифра и не может делиться на $11 \Rightarrow C \neq 11$. Но т.к. $C \in \mathbb{N}$ и B с есть если бы одна цифра 3 $\Rightarrow C = 33$.
Теперь посмотрим на $A \cdot B \cdot C$, в него входят: $a; 11; 101; 2; 101; 3; 11$. Видим, что нету пары у 2 и 3, значит $a:2$ и $a:3$ (при этом a -цифра) $\Rightarrow a = 6$. Значит мы нашли единственную тройку чисел: $(6666; 202; 33)$, удовлетворяющую условию. (Я не упомянул в решении, что 101 — простое, но это и так понятно)
Ответ: $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

Для начала поработаем с числом M . Поймём, что:

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y).$$

Теперь поработаем с K :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

Приведём все к одному знаменателю:

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$x, y \neq 0$ (т.к. они положительные)

$y+1 \neq 0$ (аналогично)

$x \neq 1$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

т.к. $x+y+2 \neq 0$ (т.к. x, y - положительные)

||

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1$$

$$x - y = 1$$

||

$$M = x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = (x-y)^3 = 1^3 = 1$$

Ответ: $M = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \frac{1}{2} (\cos(\pi x - \pi y) - \cos(\pi x + \pi y)) = \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} (\cos(\pi x - \pi y) + \cos(\pi x + \pi y))$$

Применили две формулы.

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \frac{1}{2} \cos(\pi x + \pi y) + \frac{1}{2} \cos(\pi x - \pi y)$$

Перенесли в разные стороны.

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$2 \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$$

¶

$$\begin{cases} \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases}$$

$m, k \in \mathbb{Z}$

Сократим на $\pi \neq 0$:

$$\begin{cases} \frac{3x + y}{2} = \frac{1}{2} + k \\ \frac{x - y}{2} = \frac{1}{2} + m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 + 2k \\ x - y = 1 + 2m \end{cases} \quad m, k \in \mathbb{Z}$$

¶

Нам подходят пары чисел $(x; y)$ таких, что

$$3x + y - 1 = 2k \text{ и } x - y - 1 = 2m, \text{ где } m, k - \text{целые числа.}$$

Объединяя: а) $3x + y - 1 = 2k$; $x - y - 1 = 2m$ ($m, k \in \mathbb{Z}$) — нам подходит

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

Пусть кол-во 11-классиков — n , а кол-во добавленных билетов — k . Тогда Вероятность Петя и Вася попасть на концерт равна:

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^n} = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{n! (n-4)!}{n!} = \frac{12}{n(n-1)}$$

(C_{n-2}^2 — кол-во ситуаций когда 2 билета у Петя и Вася, C_n^n — кол-во возможные всевозможных ситуаций)

Аналогично посчитаем Вероятность того что Выиграл один билет:

$$\frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{4+k}} = \frac{(n-2)!}{(2+k)!(n-4-k)!} \cdot \frac{(4+k)!(n-4-k)!}{n!} = \\ = \frac{(k+3)(k+4)}{n(n-1)}$$

(C_{n-2}^{2+k} — кол-во ситуаций когда 2 билета у Петя и Вася, C_n^{4+k} — кол-во возможные всевозможных ситуаций).

Так как Вероятности по условию увеличились в 2,5 раза, можем записать уравнение:

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{12}{n(n-1)} - 2,5 = \frac{(k+3)(k+n)}{n(n-1)}$$

Т.к. кол-во 11-классиков минимум 2 (Петя и Вова)

$$\begin{matrix} \downarrow \\ n(n-1) \neq 0 \end{matrix}$$

п

сокращаем

$$30 = (k+3)(k+n)$$

$$k^2 + 7k + 12 = 30$$

$$k^2 + 7k - 18 = 0$$

$$\Delta = 49 + 4 \cdot 18 = 121$$

$$k_1 = \frac{\pm 11 - 7}{2}$$

$k_1 = -9$ — не подходит, т.к. мы добавили билем, и
получившее кол-во, и напечатанное

$$k_2 = 2 — подходит$$

п

в конце места выделил дополнительную 2 билем

$$\text{Значит ит. сто } 4+2=6$$

Объем: 6 билем.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Downarrow \quad S_{BCP} = S_{ACP} \cdot \frac{BP}{AP} = 27 \cdot \frac{\frac{5}{15}}{2} = 27 \cdot \frac{10}{15} = 27 \cdot \frac{2}{3} = 18$$

||

$$S_{ABC} = S_{ACP} + S_{BCP} = 27 + 18 = 45$$

Ответ: $S_{ABC} = 45$



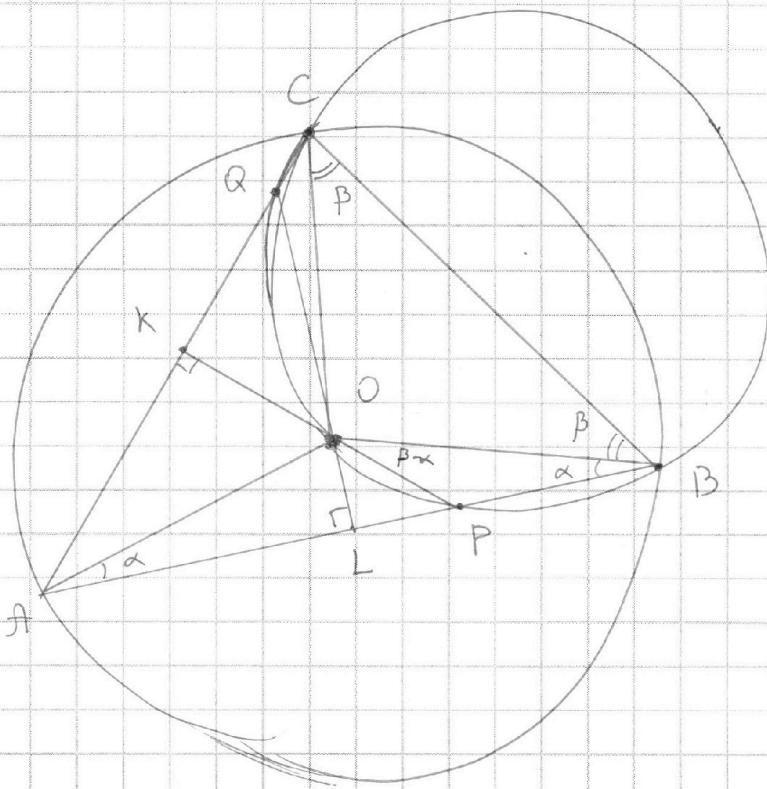
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5



Обозначим $\angle OAB = \alpha$, а $\angle CBO = \beta$. Тогда:

$$\angle BCO = \beta; \angle OBA = \alpha \quad (\triangle COB - p/\delta; \triangle AOB - p/\delta)$$

Проведём OP, OQ (Q - может пересечь ω_2 с яс.)

$$\angle COB = 180 - 2\beta$$

⇓

$$\angle BOP = 180 - \alpha - \beta - (180 - 2\beta) = \beta - \alpha \quad (\text{м.к. } \triangle OPB - \text{вписанной})$$

Построим OK и OL - перпендикуляры из O на яс и яв (отм же будут медианами и биссектрисами, м.к.)

$$\triangle AOC - p/\delta \text{ и } \triangle AOB - p/\delta$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle AOC = 180 - (180 - 2\alpha - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta \quad (\text{ч.к. } \triangle ABC \text{ и } \triangle AOC)$$

$$\angle COK = \angle AOK = \alpha + \beta \quad (\text{ч.к. } OK - \text{биссектриса})$$

Заметим, что:

$$\angle COK + \angle COB + \angle BOP = (\alpha + \beta) + (180 - 2\beta) + (\beta - \alpha) = 180^\circ$$



K, O, P — лежат на одной прямой



Аналогично A, O, Q — лежат на одной прямой (все тоже самое, ч.к. картина. Видите не изменяется)

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ACP$. По теореме Пифагора:

$$AP^2 = AK^2 + KP^2$$



$$KP^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} - \frac{81}{4} = \frac{144}{4}$$



$$KP = \frac{12}{2} = 6$$



$$S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} \cdot KP \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$$

Проведём CP. CP делит $\triangle ABC$ на $\triangle ACP$ и $\triangle BCP$, при-

чем $\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}} = \frac{AP}{BP}$ (ч.к. ч.к. высоты однанаковы, это озна-
чает, что основания с одинаковой длиной лежат на
одной прямой)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

$$\text{д} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \pi r = 5\pi - \text{диаметр } gy^2$$

Решение:

$$M = 5\pi + 8 + 8 = 16 + 5\pi$$

Ответ: $M = 16 + 5\pi$, при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

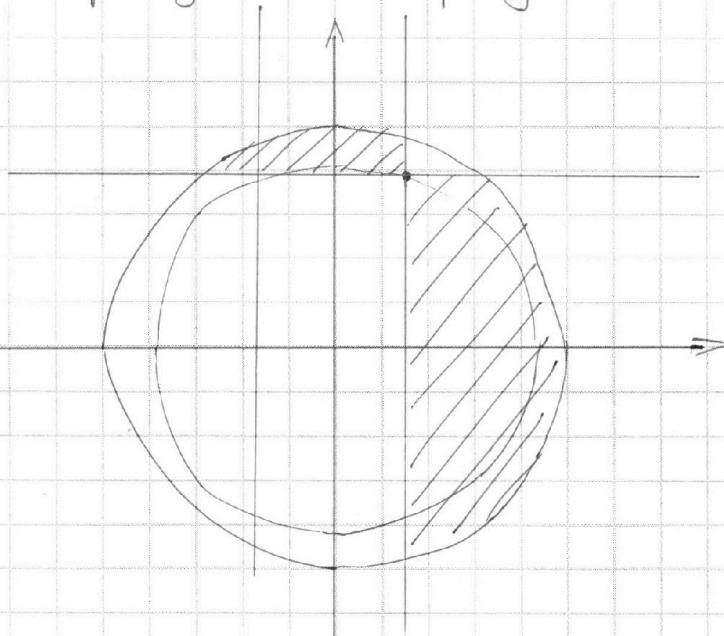


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь поймем, что если тонка пересечет будем видеть
одну арку, то ситуация будет симметричной как
то из ситуаций, где тонка пересечет выше. Вта-
зим мы можем рассмотреть только когда тонка не-
пересекает в верхней полуточности и попадает в
значение(а) x , повторяющие максимум, расположенные
снизу. Теперь взглянем на рисунок:



Проведём ещё одну прямую, симметричную $y = 3\sqrt{2}\cos x$.

Очевидно, что при перемещении тонки пересечет по окруж-
ности, периметр будет возрастать (по часовой стрел-
ке). Достигнем же пока периметр, когда тонка

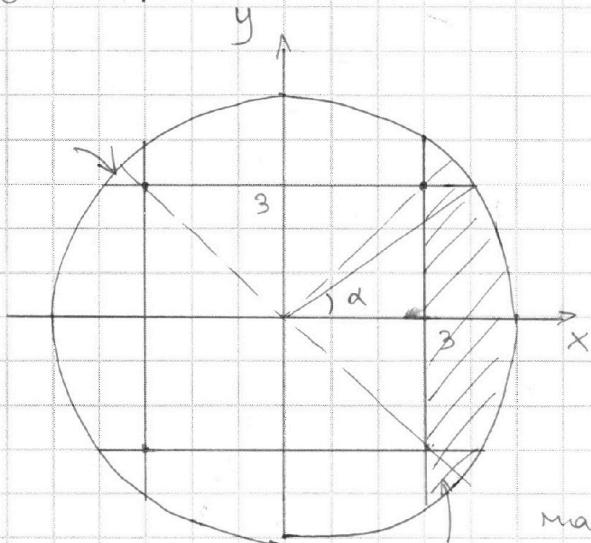
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

пересечения будем иметь координаты $(3; 3)$. Найдём M .



$$x = y = 3$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

Всего может достигаться максимума — π . И это легко

найти:

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{4}$$

$$\alpha = \frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Найдём M . ~~Помимо математического решения~~ Решение

Для начала найдём пересечение прямых с осью координат:

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

$$y = \pm 5 \text{ (аналогично)}$$

5
-5
5
-5

Заметим, что кусоком обозначенное сплошной

линией перенесли, тогда эта линия получит полуокружность



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 5 \cos \alpha \cdot 3\sqrt{2}) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

Второе уравнение системы задаёт круг с центром

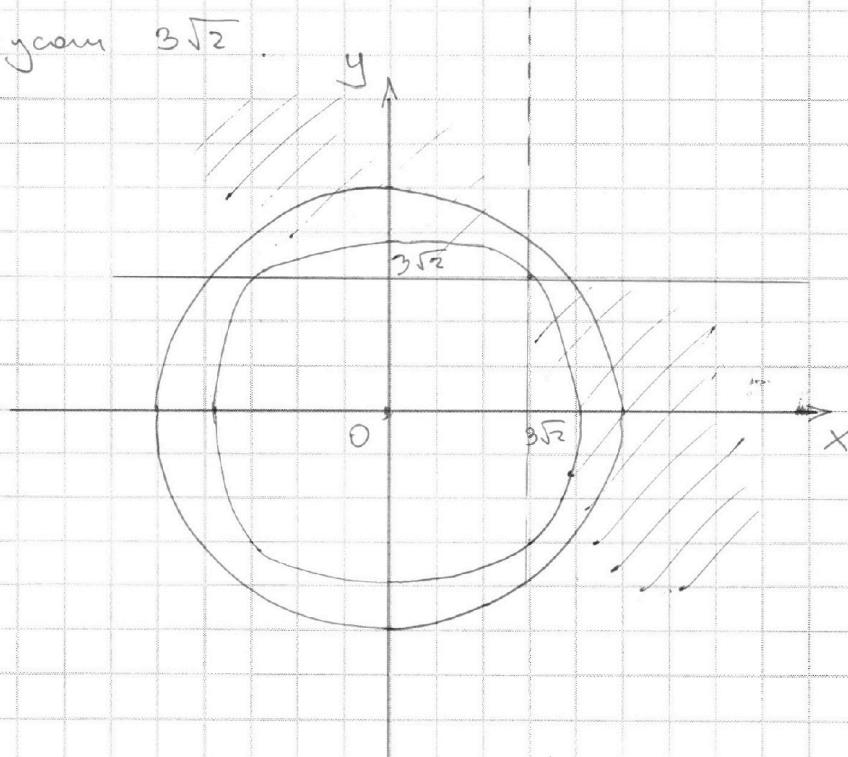
$B(0;0)$ и радиусом 5. Первое же уравнение задаёт

4 куска плоскости, ограниченных прямыми $x = 3 \sin \alpha \cdot 3\sqrt{2}$ и $y = 5 \cos \alpha \cdot 3\sqrt{2}$ (при фиксированном α) из которых

наибольшую длину имеют 2 (см. рис.). При движении α , будем перемещаться между пересечениями этих прямых.

Перемещаться будет по окружности с центром $B(0;0)$

и радиусом $3\sqrt{2}$.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$3x + y - 1 = 2k$$

$$x - y - 1 = 2m$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$3x = 2k + 1 - y$$

$$x = \frac{2k+1-y}{3}$$

$$y = 2k+1 - 3x$$

$$x \in [-5; 5]$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{2k+1-3x}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{x}{5} \in [-1; 1]$$

$$x = -1$$

$$x \in [-5; 5]$$

$$\frac{2k+1-3x}{4} \in [-1; 1]$$

$$2k+1-3x \in [-4; 4]$$

$$-\frac{1}{5}$$

$$n \quad 2$$

$$4$$

$$\frac{4}{n}$$

$$\frac{4}{n}$$

$$y$$

$$\frac{16}{n^2}$$

$$x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{16}{n^2}$$

$$\frac{(4+k)}{n} \cdot \frac{(4+k)}{n}$$

$$\frac{40}{n^2} = \frac{(4+k)^2}{n^2}$$

$$40 = (4+k)^2$$

$$40 = 16 + 8k + k^2$$

$$k^2 + 8k - 24 = 0$$

$$\Delta: 64 + 4 \cdot 24 = 64 + 96 = 160$$

$$\begin{matrix} 1 \\ +72 \\ +ug \\ \hline 12 \end{matrix}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$30 = (k+3)(k+u)$$

$$\cancel{C_{n-2}^4}$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^u} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{2!(n-u)!} \cdot \frac{u! \cdot (n-u)!}{n!} =$$

$$= \frac{12}{(n-1)n} = \frac{12}{n^2-n}$$

k

$$\cancel{\frac{C_{n-2-k}^2}{C_n^{u+k}}}$$

$$\frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{u+k}} = \frac{(n-2)!}{(2+k)!(n-u-k)!} \cdot \frac{(u+k)!(n-u-k)!}{n!} =$$

$$12 = (k+3)(k+u)$$

$$= \frac{(k+3)(k+u)}{n^2-n}$$

$$12 = k^2 + uk + 3k + 12$$

$$k^2 + 7k = 0$$

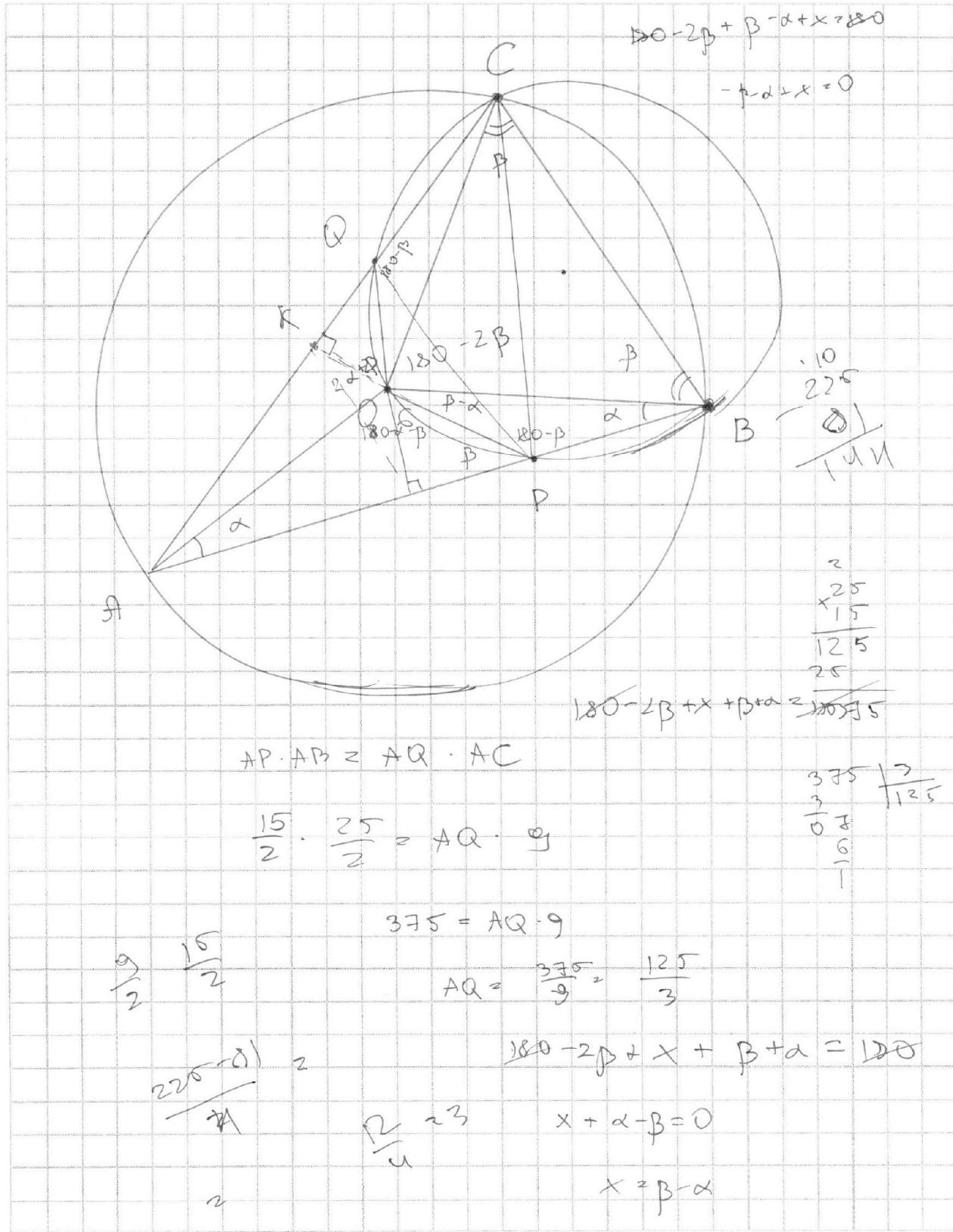




На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

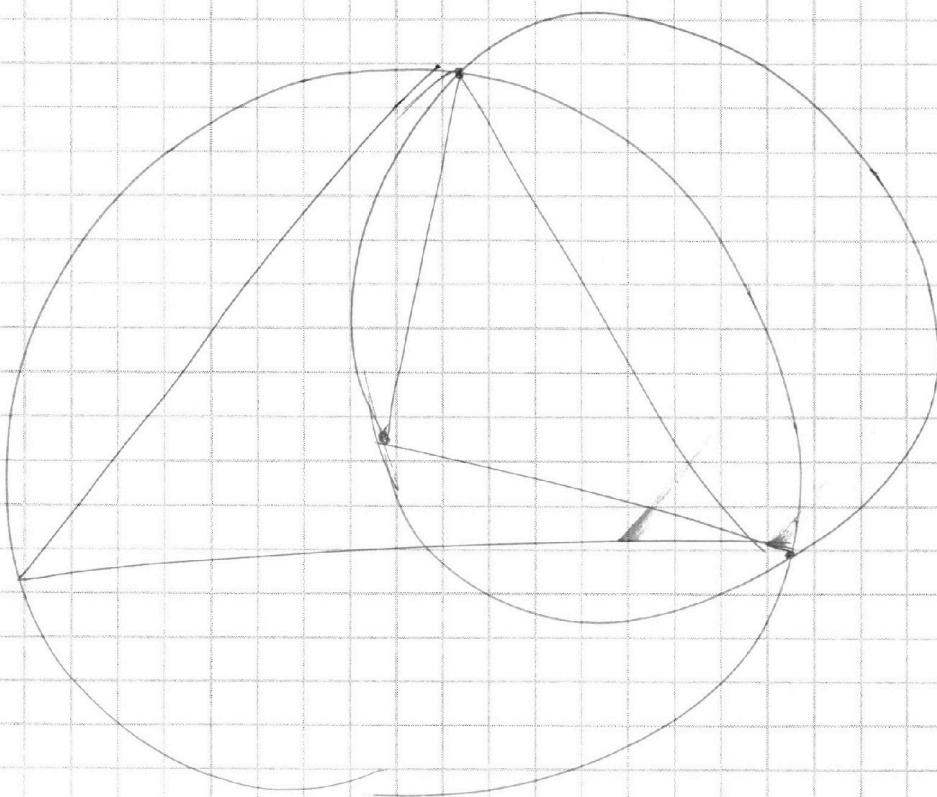
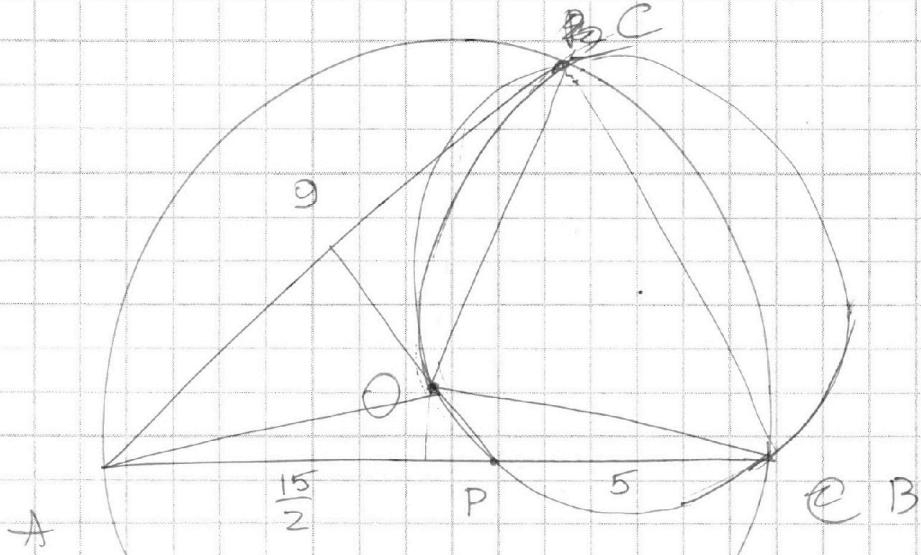
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

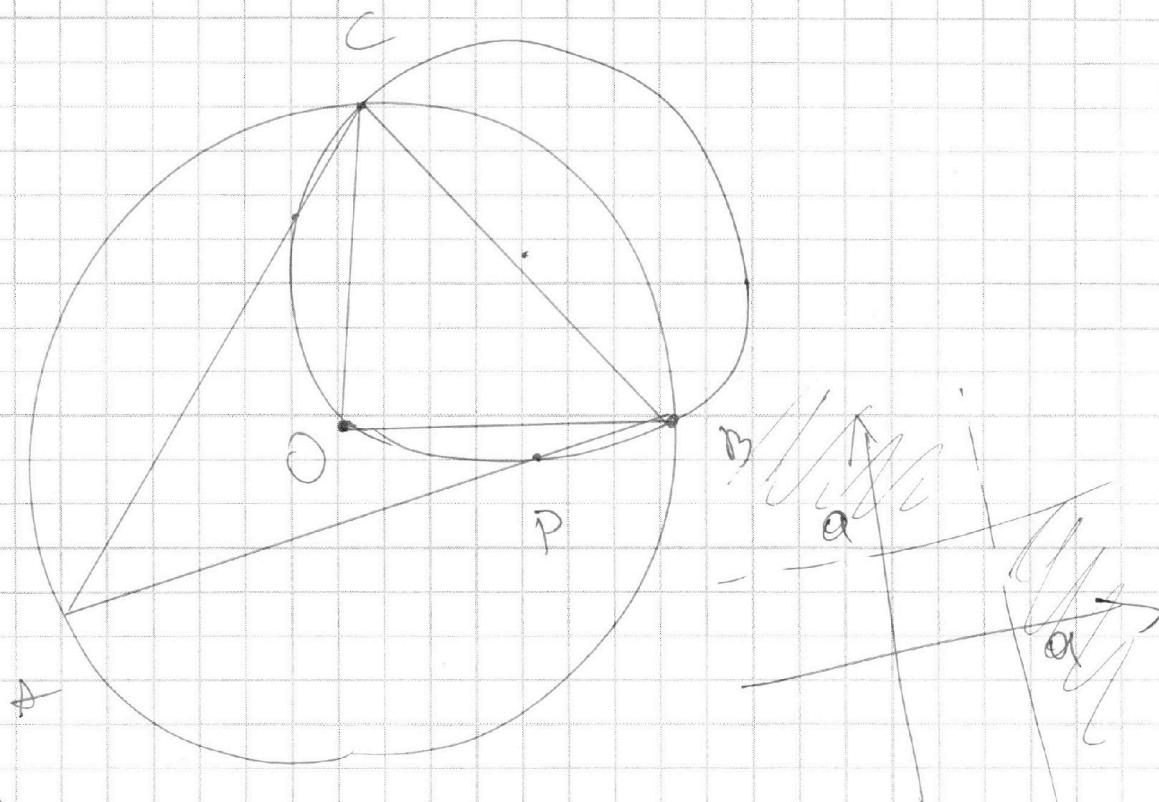




На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

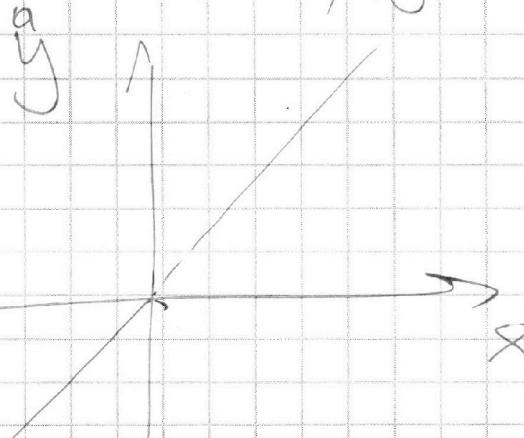
СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$\left\{ \begin{array}{l} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{array} \right.$$

$$(x-a)(y-a) \leq 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

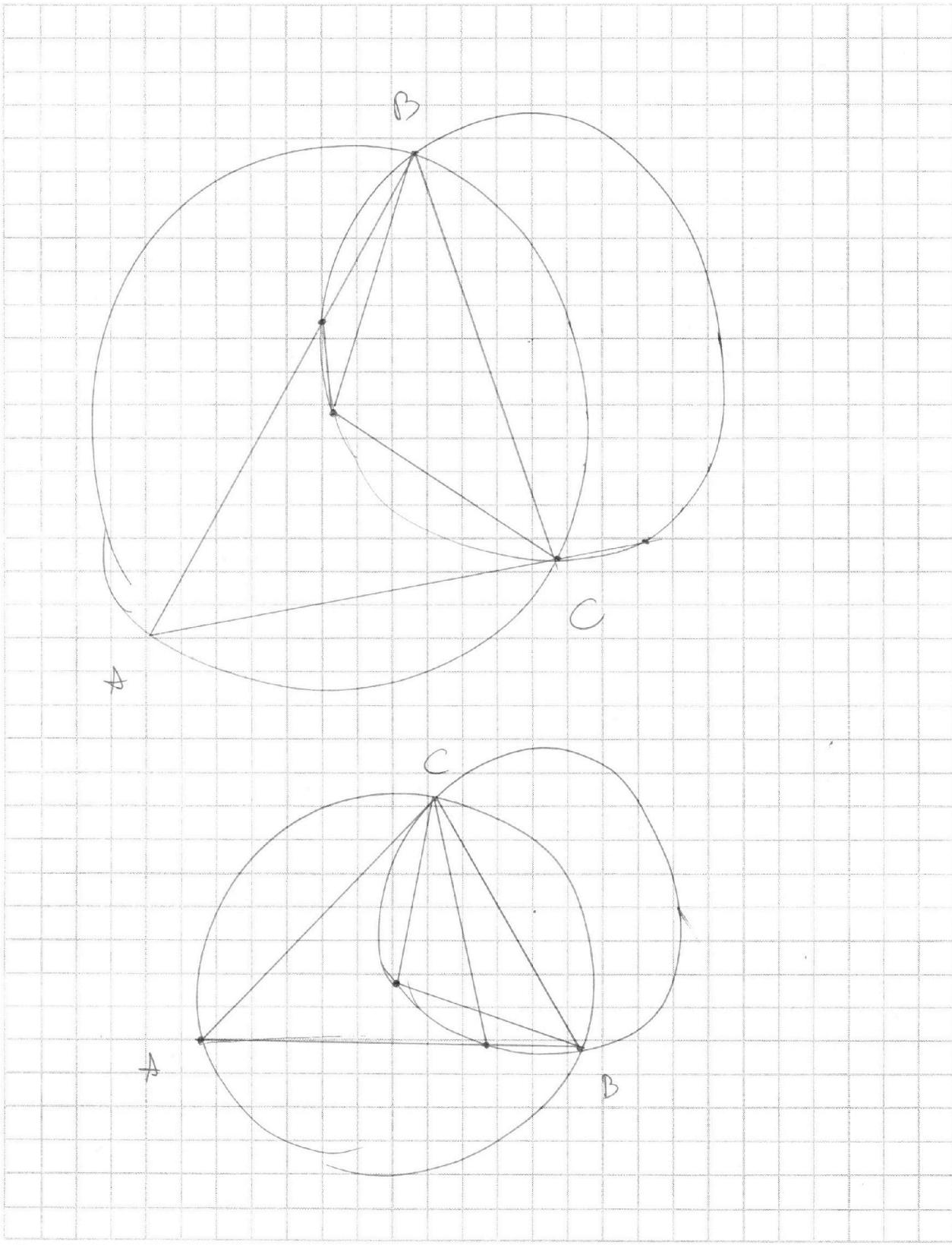
5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

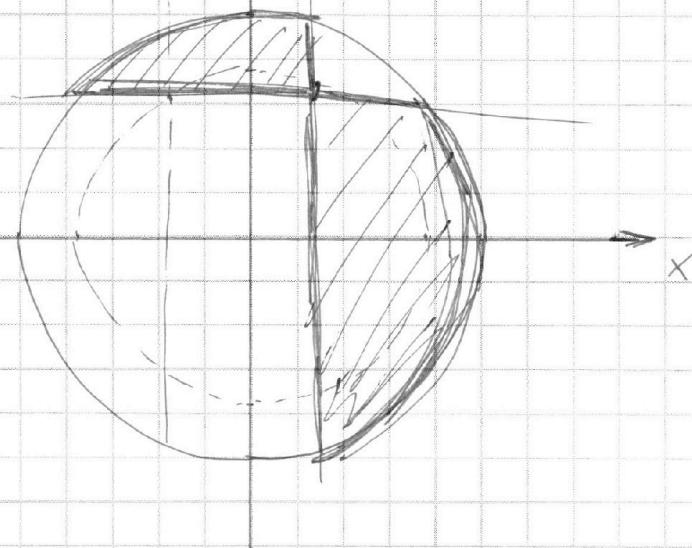
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$xy - x3\sqrt{2} \cos\alpha - y3\sqrt{2} \sin\alpha + 3\sqrt{2}^2 = 0$$

$$3\sqrt{2} \sqrt{5}$$

$$9 \cdot 2 \sqrt{25}$$

4

$$\sin x + \cos x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

I-

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

$$(x-y)^3 = (x-y)(x^2 - 2xy + y^2) \approx$$

$$\approx x^3 - 2x^2y + xy^2 - yx^2 + 2xy^2 + y^3 =$$

$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3 \approx$$

$$\frac{y+1 + x-1 + 2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\approx x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$$

$$\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+1 + x-1 + 2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x-y=4$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$

$$x+y+2 \neq 0$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1$$

$$\textcircled{x-y=4}$$

$$x^2y^2 \approx$$

$$\approx (x^2-y^2)$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = 3xy \approx$$

$$= x^2 + xy + y^2 - 3xy \approx$$

$$= x^2 - 2xy + y^2 \approx$$

$$= (x-y)^2$$

I-

I-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(A; B; C)

$$A = \overline{9999}$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ | \\ 1111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ | \\ 7 \\ \hline 41 \\ 35 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ | \\ 101 \\ | \\ 101 \end{array}$$

$$101$$

$$11 \cdot 101$$

$$101$$

$$(202)$$

$$B = 202$$

$$A = 2222$$

$$202$$

$$\begin{array}{r} 2222 \\ | \\ 202 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 202 \\ \times 11 \\ \hline 202 \\ 202 \\ \hline 202 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 101 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 10111 \end{array}$$

$$101 \cdot 11 \cdot a$$

$$\begin{array}{r} 6 \cdot 101 \\ 101 \cdot 11 \cdot a \\ 202 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 303 \\ \times 11 \\ \hline 303 \\ 303 \\ \hline 3333 \end{array}$$

$$202 \cdot 202 \cdot 11 - C$$

$$202$$

$$x \text{ и } y$$

$$101 \cdot a \cdot 11$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{2}{(x-1)(y-1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \pi x + \frac{1}{2} (\cos \pi(x-y) - \cos \pi(x+y)) = \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} (\cos \pi(x-y) + \cos \pi(x+y))$$

$$\sin^2 \pi x + \frac{1}{2} \cos \pi(x-y) - \frac{1}{2} \cos \pi(x+y) = \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} \cos \pi(x-y) + \frac{1}{2} \cos \pi(x+y)$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \frac{1}{2} (\cos \pi(x+y) + \cos \pi(x-y))$$

$$-\cos 2\pi x = \cos \pi(x+y)$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y$$

$$2 \cos x \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos(\pi x + \pi y) + \cos 2\pi x =$$

$$= 2 \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi y - \pi x}{2}$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x+y}{2} = \frac{1}{2} + k$$

$$3x+y = 1+2k$$

$$\frac{\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$y-x = 1+2k$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$y-x = 1+2k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$= \sin(x+y) + \sin(x-y) =$$

$$= \sin x \cos y + \sin y \cos x + \sin x \cos y - \sin y \cos x >$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin \pi x + \sin \pi y = 2 \sin \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}$$

$$\cancel{\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x}$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin \pi y \sin \pi x = \frac{1}{2} (\cos \pi(x-y) - \cos \pi(x+y))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos \pi x \cos \pi y = \frac{1}{2} (\cos \pi(x-y) + \cos \pi(x+y))$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

1

1

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!