



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha) (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

т.к. A состоит из одинаковых цифр, то это число из мн-ва: $\{1111, 2222, \dots, 9999\}$. Заметим, что все они кратны 1111 , но не кратны 1111^2 , т.к. $1111 = 11 \cdot 101$, а число $A = 1111 \cdot n$, где $1 \leq n \leq 9$, то A не имеет делителя на 11 более одного раза, т.к. A не имеет делителя на 101 более одного раза $\Rightarrow$ чтобы $A \cdot B \cdot C$ - были точными квадратами н.т. числа, нужно, чтобы $B \cdot C$: 1111 , т.е. $B \cdot C$: 11 и $B \cdot C$: 101 , заметим, что т.к. 101 - простое, то $C \cdot 101$ (с-гвоздя число) $\Rightarrow B : 101 \Rightarrow \Rightarrow$ ед. возможное зн-ие $B = 202$, тогда т.к. $C : 11 \Rightarrow \Rightarrow C = 33 \Rightarrow ABC = A \cdot 1111 \cdot 6 = 1111^2 \cdot 6n$, где $1 \leq n \leq 9$ и $n \in \mathbb{Z}$, тогда ABC - квадрат н.т. числа тогда и только тогда, когда $6n$ - квадрат $\Rightarrow \Rightarrow n : 6$, ед. число от 1 до 9, кратное 6 - это 6 $\Rightarrow \Rightarrow A = 6666$.

Ответ: $(6666, 202, 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

По условию: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}, x, y > 0, x \neq 1.$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{y(y+1)} = \frac{2xy - 2(x-1)(y+1)}{xy(x-1)(y+1)} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2+y-x^2}{xy(x-1)(y+1)} = \frac{-2x+2y+2}{xy(x-1)(y+1)}, \text{ т.к. знаменатель } \neq 0,$$

$$x^2 - x - y^2 - y = -2x + 2y + 2 \quad (3) \quad x^2 + x + y^2 - 3y = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} = 2 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 2 \quad (5) \quad \left(x + \frac{1}{2} + y - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - y + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 2)(x - y - 1) = 0, \text{ т.к. } x, y > 0 \Rightarrow x + y + 2 > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x - y = 1}, \text{ тогда } x = y + 1$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 3xy = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 + xy + y^2 - 3xy = \\ &= x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = \boxed{1}, \text{ т.к. } x - y = 1 \end{aligned}$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \alpha) \quad (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \\ &= \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x \quad (=) \quad \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \sin \pi y \sin \pi x - \cos \pi y \cos \pi x \\ (=) \quad \cos 2\pi x &= -\cos(\pi x + \pi y) \quad (=) \quad \cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \cos\left(\frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi x - \pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \quad (=)$$

$$\Rightarrow 2 \cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \quad (=) \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (=)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (=)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 + 2k, \\ x - y = 1 + 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{y}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2k}{3}, \\ x = y + 1 + 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } y \in \mathbb{R}: x = -\frac{y}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2k}{3}, k \in \mathbb{Z}; \text{ или } y \in \mathbb{R}: x = y + 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\delta) \quad \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}; \quad \text{Заметим, что: } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \arccos \frac{y}{4} \leq \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \text{нер-во выполняется при}$$

$$\text{любых } (x, y), \text{ таких, что: } -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \text{ и } -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1, \text{ кроме случаев,}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

когда $\arcsin \frac{y}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow y = 5$ и $\arccos \frac{x}{4} = \pi \Rightarrow x = -4$

$\Rightarrow \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y = 4$, т.е. пара $(5; 4)$ не подходит.

Посчитаем кол-во пар $(x; y)$ удовл. уравнению (а) и пар-во (б):

$-5 \leq x \leq 5$ и $-4 \leq y \leq 4$ - отр. на $(x; y)$:

1) $x = y + 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$; ~~указаны, это не требуется~~

$y = -4$: $x = -3 + 2k, k \in \mathbb{Z}$: $(-3; -4), (-1; -4), (1; -4), (3; -4)$ - ⁵ пар. ~~(0; -4)~~

$y = -3$: $x = -2 + 2k, k \in \mathbb{Z}$: $(-4; -3), (-2; -3), (0; -3), (2; -3), (4; -3)$ - ⁵ пар. ~~(1; -3)~~

$y = -2$: $x = -1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$: $(-5; -2), (-3; -2), (-1; -2), (1; -2), (3; -2)$ - ⁵ пар. ~~(0; -2)~~

$y = -1$: $x = 2k, k \in \mathbb{Z}$: $(-4; -1), (-2; -1), (0; -1), (2; -1), (4; -1)$ - 5 пар. ~~(1; -1)~~

$y = 0$: $x = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$: $(-5; 0), (-3; 0), (-1; 0), (1; 0), (3; 0)$ - 5 пар. ~~(0; 0)~~

$y = 1$: $x = 2 + 2k, k \in \mathbb{Z}$: $(-4; 1), (-2; 1), (0; 1), (2; 1), (4; 1)$ - 5 пар. ~~(1; 1)~~

$y = 2$: $x = 3 + 2k, k \in \mathbb{Z}$: $(-5; 2), (-3; 2), (-1; 2), (1; 2), (3; 2)$ - 5 пар. ~~(0; 2)~~

$y = 3$: $x = 4 + 2k, k \in \mathbb{Z}$: $(-4; 3), (-2; 3), (0; 3), (2; 3), (4; 3)$ - 5 пар. ~~(1; 3)~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть одноклассников было n человек, а добавлен-
ных билетов x , тогда вероятности событие A -

B и Γ получат на концерт в начале месяца: ~~ранее~~

~~ранее~~ ~~выбравшие~~ ~~четыре~~ ~~из~~ ~~n~~ ~~(без повторений)~~ ~~ка~~

$$P(A) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}, \quad C_n^4 - \text{кол-во всех способов выбрать}$$

четыре одноклассника из n ,

а C_{n-2}^2 - кол-во способов выбрать 2 одноклассника

к четверке с Васей и Петей;

$$P(A) = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Аналогично рассмотрим событие B - B и Γ получили

на концерте к концу месяца;

$$P(B) = \frac{C_{n-2}^{2+x}}{C_n^{4+x}} = \frac{\frac{(n-2)(n-3) \dots (n-3-x)}{(x+2)!}}{\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-3-x)}{(x+4)!}} = \frac{(4+x)!}{(2+x)!} \cdot \frac{1}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{(x+4)(x+3)}{n(n-1)}, \quad \text{По усл: } P(B) = 2,5 P(A) (=)$$

$$\Rightarrow \frac{(x+4)(x+3)}{n(n-1)} = \frac{30}{n(n-1)}, \quad \text{т.к. } n > 2; \quad (x+4)(x+3) = 30$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 7x + 12 = 30 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 18 = 0 \text{ по т. Виета:}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -9 \end{cases} \text{ - корни т.к. } 2 + (-9) = -7 \text{ и } 2 \cdot (-9) = -18$$

$x = -9$ - не подходит, т.к. x -кол-во билетов, которые
добавили $\Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = 2$ - нам подходит.

Тогда всего билетов в конце месяца было 6.

Ответ: 6.

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{75+15}{100} = \frac{9}{10} \\ \cos \theta = \frac{75-15}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \varphi = \frac{\sqrt{139}}{10} \\ \sin \varphi = \frac{4}{5} \quad \cos \varphi = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{Рассмотрим случай, когда}$$

$$BC^2 = 81 + \frac{625}{4} - 2 \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{3}{5} = 81 + \frac{625}{4} - \frac{405}{2}$$

$$= \frac{625}{4} + 81 - \frac{5}{2} \cdot 81 = \frac{625}{4} - \frac{3}{2} \cdot 81 = \frac{625 - 486}{4} = \left(\frac{\sqrt{139}}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow BC = \frac{\sqrt{139}}{2}, \text{ по теореме косинусов в } \triangle ABC:$$

$$\cos \angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{81 + \frac{625}{4} + \frac{139}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{139}}{2} \cdot 9} = \frac{81 - \frac{486}{4}}{9\sqrt{139}} =$$

$$= \frac{81 - \frac{3}{2} \cdot 81}{9\sqrt{139}} = -\frac{81/2}{9\sqrt{139}} < 0 \Rightarrow \angle ACB - \text{тупой} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{значит } \cos \varphi = \frac{3}{5} \text{ не подходит для } \triangle ABC - \text{острый.}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{3}{5} \text{ (и тогда } \sin \varphi = \frac{4}{5}) \Rightarrow \sin \varphi = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \boxed{45}$$

Ответ: 45.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

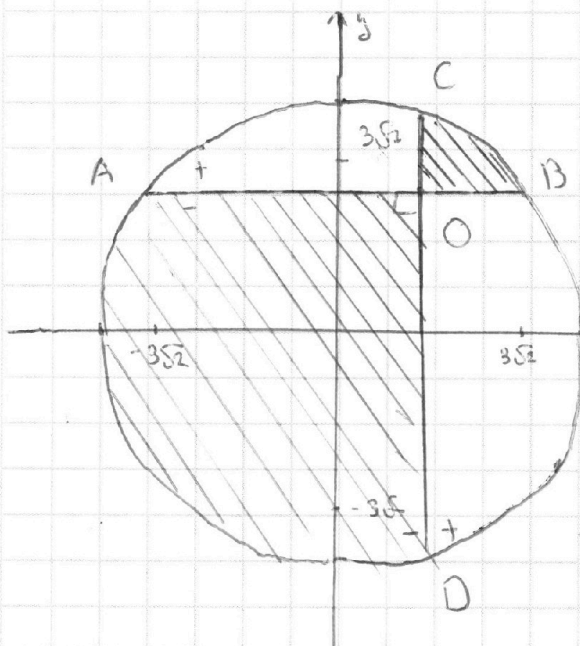
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 25 & (2) \end{cases}$$

(2): $x^2 + y^2 \leq 25$ — ин-во (x, y) , ограниченное окр. $x^2 + y^2 = 25$, с ц. в $(0, 0)$ и рад. 5.

$$(1) \quad (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases} \quad \text{— две области, окр. границ}$$

$x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ и $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$



т.к. $-1 \leq \sin\alpha, \cos\alpha \leq 1$, то прямые могут располагаться от $-3\sqrt{2}$ до $3\sqrt{2}$ на мисселих осей.

Пусть $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$ пересечет окр. в т. A и B, а $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ в т. C и D, т.к.

Эти прямые параллельны осям координат, то $AB \perp CD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\angle BOC + \angle AOD}{2} = 90^\circ \Rightarrow \angle BOC + \angle AOD = 180^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Независимо от положения прямых сумма дуг $\angle BOC$ и $\angle AOD$ равна половине окр., т.е. 5π , т.к. все точки правее CD углов.

$x \geq 3\sqrt{2}$, а все точки выше AB; $y \geq 3\sqrt{2} \Rightarrow \Phi(\alpha)$ — это 2 области на границе: сектор COB и AOD ($AB \cap CD = \emptyset$).

т.к. $\angle BOC + \angle AOD = 5\pi$, то периметр $\Phi(\alpha)$ зависит от суммы $AB + CD$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем длину отрезка CD : где это найдем
ординаты т. C и т. D ; т.е. решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = 3\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \quad (=) \quad 18 \sin^2 \alpha + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow CD = \left| \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} - (-\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}) \right| = 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

$$\text{Аналогично } AB = 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} \cos \alpha,$$

$$\text{тогда: } AB + CD = 2 \left(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} \right)$$

$$\text{Учтем } \sin^2 \alpha = t \in [0; 1];$$

"S(4)

Рассмотрим ф-цию:

$$S(t) = \sqrt{25 - 18t} + \sqrt{25 - 18(1-t)}$$

$$S(t) = \sqrt{25 - 18t} + \sqrt{7 + 18t}, \quad t \in [0; 1]$$

$$S'(t) = \frac{-18}{2\sqrt{25 - 18t}} + \frac{18}{2\sqrt{7 + 18t}}; \quad S'(t) = 0 \quad (=)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{25 - 18t}} = \frac{1}{\sqrt{7 + 18t}} \quad (=) \quad 25 - 18t = 7 + 18t \quad (\text{так } t \in [0; 1] \text{ оба подкоренных } > 0)$$

$$\Rightarrow 36t = 18 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

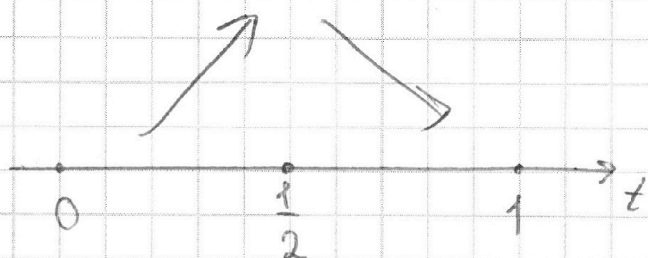


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Положим $t=0$ в $f'(t)$:

$$f'(0) = -\frac{18}{10} + \frac{18}{9\sqrt{7}} = -\frac{9}{5} + \frac{9}{\sqrt{7}} = \frac{-9\sqrt{7}+45}{5\sqrt{7}};$$

$$\text{так } 5 > \sqrt{7} \Rightarrow 45 > 9\sqrt{7} \Rightarrow f'(0) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) - \text{возр. при } t < \frac{1}{2}$$

Положим $t=1$:

$$f'(1) = -\frac{18}{2\sqrt{2}} + \frac{18}{2\sqrt{2}} = \frac{9}{5} - \frac{9}{\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) - \text{убывает при } t > \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2} - \text{т. максимума}$$

р-им $f(t)$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{25-9} + \sqrt{25+9} = 4 + 4 = 8$$

$$\Rightarrow AB+CD = 2f(t) = \text{примем макс. з-н } 16$$

$$\text{при } \sin \alpha = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } \alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\max}(f(\alpha)) = 16 + 5\pi, \text{ при } \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } 16 + 5\pi, \alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$-\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$-\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{y(y+1)} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$\frac{1}{y(y+1)} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$\frac{x(x-1) - y(y+1)}{y(y+1)x(x-1)} = \frac{2xy - 2(x-1)(y+1)}{xy(x-1)(y+1)}$$

$$x^2 - x - y^2 - y = 2xy - 2xy - 2x + 2y + 2$$

$$x^2 + x - y^2 - 3y = 2$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = x^3$$

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{2} + y + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - y - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$(x + y + 1)(x - y - 2) = 0$$

$$x^3 - y^3 = 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy$$

$$2(x^2 + xy + y^2) - 3xy$$

$$2x^2 - xy + 2y^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - y = 2 \Rightarrow x = y + 2$$

$$K = \frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(y+2)} = \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(y+1)(y+1)} = \frac{2}{(y+1)} + \frac{2}{(y+1)^2}$$

$$= \frac{2y+2+2}{y(y+1)} = \frac{2+2(y+1)}{(y+1)^2} = 1$$

$$1 = \frac{y+2}{y(y+1)} = \frac{1+y+1}{(y+1)^2} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{y+2}{(y+1)^2} \Rightarrow y^2 + 2y = y^2 + y + 1 \Rightarrow y = 1$$

$$3) a) \sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \sin \pi y \sin \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$1 = 0 = (-1) = 1$$

$$\cos 2\pi x = -(\cos \pi y \cos \pi x - \sin \pi y \sin \pi x) = -\cos(\pi y + \pi x)$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi y + \pi x) = 0$$

$$2 \cos \frac{2\pi x + \pi y + \pi x}{2} \cos \frac{2\pi x - \pi y - \pi x}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \end{cases}$$

$$3\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k$$

$$\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k$$

$$4\pi x = 2\pi + 4\pi k$$

$$\begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \pi y = -\frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + k \\ y = -\frac{1}{2} + k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 2 + 2k$$

$$\pi y = \pi; \pi x = 2\pi + 2\pi k$$

$$\cos \pi y = -1; \cos \pi x = 1$$

$$-15 \leq -y + 1 + 2k \leq 15$$

$$-16 \leq -y + 2k \leq 14$$

$$y - 16 \leq 2k \leq y + 14$$

$$-20 \leq 2k \leq 16$$

$$-10 \leq k \leq 8$$

6

$$BC = 1111 \cdot 6$$

$$ABC = 1111^2 \cdot 6 \cdot n =$$

$$B = 15, 202; C = 33 \Rightarrow 6n - 1111$$

$$A: 1111 = 11 \cdot 101$$

$$ABC = 1111 \cdot BC$$

$$M = \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq M \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi$$

$$\frac{x}{5} = 1$$

$$\frac{y}{4} = -1$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \dots \frac{(n-8+x)}{6}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \dots \frac{(n-3-x)}{6}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \dots \frac{n}{2}$$

$$2\sqrt{25-18\sin^2\alpha} + 2\sqrt{25-18\cos^2\alpha}$$

$$81 - \frac{48t}{4} = 81 - \frac{12t}{1} \cdot 21 = \left(\frac{1}{1} \cdot 21 \right)$$