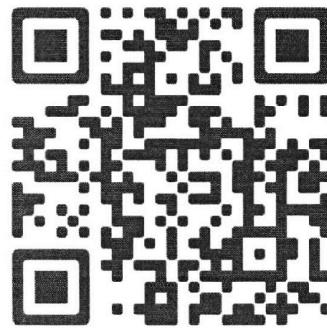




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число A состоит из однозначных цифр, то это число из мин-ва: $\{1111; 2222; \dots, 9999\}$. Заметим, что

Все числа кратны 1111, но не кратны 1111^2 , т.к. $1111 = 11 \cdot 101$, а число $A = 1111 \cdot n$, где $1 \leq n \leq 9$, то A

не делит делится на 11 более одного раза, т.к. A не делает делится на 101 более одного раза \Rightarrow чтобы $A \cdot B \cdot C$ -

- быть точным квадратом нам нужно, чтобы $B \cdot C$:

; 1111, т.е. $B \cdot C$; 11 и $B \cdot C$; 101, заметим, что

т.к. 101 - простое, то $C \nmid 101$ (C - однозначное) $\Rightarrow B \cdot C \mid 101 \Rightarrow$

\Rightarrow однозначные зн-ки B = 202, тогда т.к. C; 11 \Rightarrow

$\Rightarrow C = 33 \Rightarrow ABC = A \cdot 1111 \cdot 6 = 1111^2 \cdot 6n$, где ~~n~~ $1 \leq n \leq 9$ и $n \neq 2$,

т.к. ABC - квадрат нам нужно

делить на 6, т.к. деление на 6 означает деление на 2 и на 3

$\Rightarrow n \mid 6$, т.к. число от 1 до 9, кроме 6 - это 6 \Rightarrow

$\Rightarrow A = 6666$.

Ответ: (6666; 202; 33)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 1 условие.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}, \quad x, y > 0, \quad x \neq 1.$$

$$LHS = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy} \quad (=)$$

$$LHS = \frac{-\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{y(y+1)}}{xy(x-1)(y+1)} = \frac{2xy - 2(x-1)(y+1)}{xy(x-1)(y+1)} \quad (=)$$

$$LHS = \frac{y^2 + y - x^2 - x - y^2 - y}{xy(x-1)(y+1)} = \frac{-2x + 2y + 2}{xy(x-1)(y+1)}, \quad \text{mn. зн неравен 0},$$

$$x^2 - x - y^2 - y = -2x + 2y + 2 \quad (=) \quad x^2 + x + y^2 - 3y = 2$$

$$(\Rightarrow) \quad \left(x^2 + x + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} - \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4} \right) + \frac{9}{4} = 2 \quad (=)$$

$$(\Rightarrow) \quad \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(y + \frac{3}{2} \right)^2 + \cancel{\frac{3}{2}} = \cancel{\frac{3}{2}} \quad (\Rightarrow) \quad \left(x + \frac{1}{2} + y + \frac{3}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} - y - \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad (x+y+2)(x-y-1) = 0; \quad \text{mn } x, y > 0 \Rightarrow x+y+2 > 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \boxed{x-y=1}, \quad \text{тогда } x=y+1$$

$$M = x^2 - y^2 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy = x^2 + xy + y^2 - 3xy =$$

$$= x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = \boxed{1}, \quad \text{mn } x-y=1$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{a)} (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \\ = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x \Leftrightarrow \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \sin \pi y \sin \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\pi x = -\cos(\pi x + \pi y) \Leftrightarrow \cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$1 \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x - \pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 \Rightarrow 2 \cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$1 \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 + 2k, \\ x - y = 1 + 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{y}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2k}{3}, \\ x = y + 1 + 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Однако: $y \in \mathbb{R}: x = -\frac{y}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; или

$y \in \mathbb{R}: x = y + 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$.

$$\delta) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}; \quad \text{Заметим, что: } \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \arccos \frac{y}{4} \leq \pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \text{Неп-во выполняется при}$$

неко^д (x, y) , т.к., что: $-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$ и $-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$, кроме этого,

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Когда } \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{5} = 1 \Rightarrow x = 5 \text{ и } \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{4} = 0 \Rightarrow y = 0, \text{ т.е. пара } (5; 0) \text{ - не подходит.}$$

Найдите все пары $(x; y)$ удовл. уравнения (a) и пары (c):

$$-5 \leq x \leq 5 \text{ и } -4 \leq y \leq 4 - \text{ср. на } (x; y).$$

1) $x = y + 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$; ~~Учитывая, что~~ $y = -4; x = -3 + 2k, k \in \mathbb{Z}$: $(0; -4), (-1; -4), (-2; -4);$

$$(1; -4), (3; -4) \text{ - подходит 5 пар.}$$

$$y = -3; x = -2 + 2k, k \in \mathbb{Z}: (-4; -3), (-2; -3), (0; -3),$$

$$(2; -3), (4; -3) \text{ - } \cancel{5} \text{ пары оч!}$$

$$y = -2; x = -1 + 2k, (-5; -2), (-3; -2), (-1; -2), (1; -2),$$

$$(3; -2), \cancel{(5; -2)} \text{ - } \cancel{5} \text{ пар подходит.}$$

$$y = -1; x = 2k; (-4; -1), (-2; -1), (0; -1), (2; -1),$$

$$(4; -1) - 5 \text{ пар. оч!}$$

$$y = 0; x = 1 + 2k: (-5; 0), (-3; 0), (-1; 0), (1; 0), (3; 0)$$

$$- \cancel{5} \text{ пар. оч!}$$

$$y = 1; x = 2 + 2k: (-4; 1), (-2; 1), (0; 1), (2; 1), (4; 1)$$

$$- 5 \text{ пар. оч!}$$

$$y = 2; x = 3 + 2k: (-5; 2), (-3; 2), (-1; 2), (1; 2), (3; 2), -$$

$$(5; 2) \cancel{5} \text{ пар. оч!}$$

$$y = 3; x = 4 + 2k: (-4; 3), (-2; 3), (0; 3), (2; 3), (4; 3) - 5 \text{ пар!}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

~~$y=4: x = 5+2k \cdot (-5; 4), (-3; 4), (-1; 4), (1; 4), (3; 4)$~~

- 5 пар. $y=5$ - не окн.

Второе где решен $y = x + y + 1 + 2k$ подходит: $5 \cdot 9 = 45$ пар

~~$y=4: x = 5+2k \cdot (-5; 4), (-3; 4), (-1; 4), (1; 4), (3; 4)$~~

- 5 пар, м/з (5; 4) - не окн.

Тогда подходит: $4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 49$ пар.

~~$x = \sqrt{\frac{y}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k} = \sqrt{\frac{-y+1+2k}{3}} \quad 3x+y = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$~~

Заметим, что, если $3x+y$ - нечетное число, то мы можем
сделать подбором членов к ур. решения \Rightarrow

\Rightarrow построим пары $x; y: -5 \leq x \leq 5$ и $-4 \leq y \leq 4$

Будут ~~некоторые~~ пары, для которых $3x+y$

$3x+y$; если x - нечетн. $(-5; -3; -1; 1; 3; 5)$, то

подходит любые четные y ($-4; -2; 0; 2; 4$), т.е. всего пар

8 пар $6 \cdot 5 - 1 = 29$ (пара (5; 4) пару не подходит)

Если x - четн. $(-4; -2; 0; 2; 4)$, то y должна быть нечетн.,

т.е. $(-3; -1; 1; 3)$, макс пар $5 \cdot 4 = 20 \Rightarrow$

\Rightarrow всего пар будет ~~29~~ 49. Заметив, что эти пары

одинаковы с любым пар первое решения \Rightarrow Ответ: 49

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть одноклассников было n человек, а ~~однодневных~~ билетов ~~4~~, тогда вероятность события A -

B . и Π . попадут на концерт в начале месяца.

~~однодневных билетов~~ ~~однодневных~~ ~~попадают из n (без повторений)~~

$$P(A) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}, \quad C_n^4 - \text{количество всех способов выбрать}$$

~~четыре однодневных билета из n ,~~

а C_{n-2}^2 - из n способов выбрать 2 однодневных

из четырех ~~в~~ ^в Васей и Тимоша;

$$P(A) = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Аналогично рассмотрим событие B - B . и Π . окажутся

на мероприятии в конце месяца:

$$P(B) = \frac{C_{n-2}^{2+x}}{C_n^{4+x}} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)\dots(n-3-x)}{(x+2)!}}{n(n-1)(n-2)\dots(n-3-x)} = \frac{\frac{(4+x)!}{(2+x)!} \cdot d}{\frac{(2+x)!}{(2+x)!} \cdot n(n-1)} =$$

$$= \frac{(x+4)(x+3)}{n(n-1)}, \quad \text{Но так: } P(B) = 0,5 P(A) \quad (=)$$

$$\Rightarrow \frac{(x+4)(x+3)}{n(n-1)} = \frac{30}{n(n-1)}; \quad \text{так } n \geq 2; \quad (x+4)(x+3) = 30$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 7x + 12 = 30 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 18 = 0 \text{ по т. Виета.}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -9 \end{cases}$$

$$- корни m \ L 2 + (-9) = -7 \text{ и } 2 \cdot (-9) = -18$$

$x = -9$ - не подходит, тк x -количество билетов, которые
покупали $\Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = 2$ - кот подходит.

Тогда всего билетов в кассе оказалось 6.

Ответ: 6.

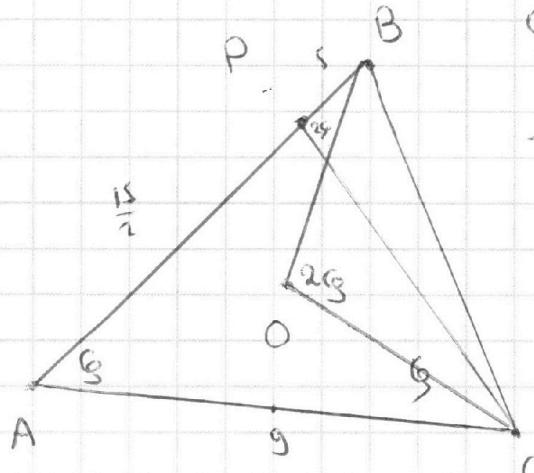


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle BAC = g$, тогда, $\angle BOC =$

- центральный угол, опирающийся на дугу

$\angle BOC = 2g$ (если $\triangle ABC$ -острый,

то т. О лежит внутри него), то

четырехугольник $POCB$ - выпуклый, то

$\angle BOC = \angle BPC = 2g$, так как $\angle APC$, $\angle BPC$ - внешний угол =)

$$\Rightarrow \angle BPC = \angle PAC + \angle APC \Rightarrow 2g = g + \angle PCA \Rightarrow \angle PCA = g,$$

тогда $\angle APC = p/g$ (по признаку, что углы при его основании равны), тогда $\Rightarrow AP = PC = \frac{15}{2}$.

По м. косинусов для $\triangle ABC$: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos g$,

а для $\triangle BPC$: $BC^2 = PC^2 + PB^2 - 2PC \cdot PB \cos 2g \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos g = PC^2 + PB^2 - 2PC \cdot PB \cos 2g$$

$$81 + \frac{625}{4} - 2 \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cos g = \frac{225}{2} + 25 - 2 \cdot \frac{15}{2} \cdot 5 \cos 2g$$

$$81 + \frac{625}{4} - 225 \cos g = \frac{225}{2} + 25 - 75(2\cos^2 g - 1)$$

$$81 + 100 - 225 \cos g = 25 - 150 \cos^2 g + 75$$

$$150 \cos^2 g - 225 \cos g + 81 = 0 \Leftrightarrow 50 \cos^2 g - 75 \cos g + 27 = 0$$

$$\Delta = 75^2 - 4 \cdot 50 \cdot 27 = 25(225 - 216) = 225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos g = \frac{75+15}{100} = \frac{9}{10}$$

$$\cos g = \frac{75-15}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin g = \frac{\sqrt{139}}{10} & \text{Две оставшиеся задачи можно решить}\\ \sin g = \frac{4}{5} & \cos(g) = \frac{9}{10} \end{cases}$$

$$BC^2 = 81 + \frac{625}{9} - 2 \cdot 9 \cdot \frac{25}{10} = 81 + \frac{625}{9} - \frac{405}{2} =$$

$$= \frac{625}{4} + 81 - \frac{5}{2} \cdot 81 = \frac{625}{4} - \frac{3}{2} \cdot 81 = \frac{625 - 486}{4} = \left(\frac{\sqrt{139}}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow BC = \frac{\sqrt{139}}{2}, \text{ но так как у нас } \triangle ABC;$$

$$\cos \angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{81 + \frac{625}{4} + \frac{139}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{139}}{2} \cdot 9} = \frac{81 + \frac{486}{4}}{9\sqrt{139}} =$$

$$= \frac{81 - \frac{3}{2} \cdot 81}{9\sqrt{139}} = - \frac{81/2}{9\sqrt{139}} < 0 \Rightarrow \angle ACB \text{ -钝角} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{здесь } \cos g = \frac{9}{10} \text{ - не подходит для } \triangle ABC \text{ -острый.}$$

$$\Rightarrow \cos g = \frac{3}{5} \text{ (чтобы } \frac{3}{5} \text{)} \Rightarrow \sin g = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin g = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{8} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \boxed{45}$$

Объем: 45.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решенис которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

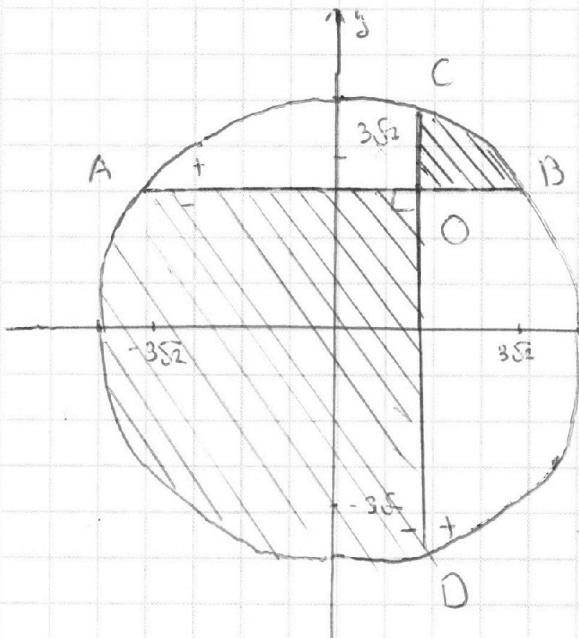
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 \leq 25 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $x^2 + y^2 \leq 25$ - мн-во $\{(x,y)\}$, ограничение окр. $x^2 + y^2 = 25$, с ц. в. в $(0,0)$ и рис. 5.

$$(1) \quad (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x \geq -3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \geq -3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$

- где области, окр. прямими

$x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ и $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$



м.н. $-1 \leq \sin\alpha, \cos\alpha \leq 1$, то иначе могут расположаться от $-3\sqrt{2}$ до $3\sqrt{2}$ на числовой оси.

Пусть $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$ пересекут окр. B в m. A и B, а $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ в m. C и D, т.к.

Эти прямые параллельны осям координат, то $AB \perp CD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\angle BCD + \angle ADB}{2} = 90^\circ \Rightarrow \angle BCD + \angle ADB = 180^\circ \Rightarrow$$

\Rightarrow Независимо от положение прямых сумма дуг $\angle BCD$ и $\angle ADB$

равна полубине окр., т.е. 5π , т.к. все точки правее CD лежат.

$x \geq 3\sqrt{2}$, т.е. все выше линии AB; $y \geq 3\sqrt{2} \Rightarrow \phi(2) - \text{это } 2$

области на 2 разные; скажем COB и AOD ($AB \cap CD = \emptyset$).

т.к. $\angle BCD + \angle ADB = 5\pi$, то периметр $\phi(2)$ зависит от суммы $AB + CD$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Начнем с длины отрезка CD : где этого найдем
ординаты т. C и т. D ; т.е. решим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = 3\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \quad (\Rightarrow 18 \sin^2 \alpha + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha})$$

$$\Rightarrow CD = \left| \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} - (-\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}) \right| = 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

Аналогично $AB = 2\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$,

$$\text{тогда: } AB + CD = 2 \left(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} \right)$$

Пусть $\sin^2 \alpha = t \in [0; 1]$; "S(4)"

Рассмотрим оп-цию:

$$f(t) = \sqrt{25 - 18t} + \sqrt{25 - 18(1-t)}$$

$$f(t) = \sqrt{25 - 18t} + \sqrt{7 + 18t}, \quad t \in [0, 1]$$

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{25 - 18t}} + \frac{18}{2\sqrt{7 + 18t}}, \quad f'(t) = 0 \quad (=)$$

$$(\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{25 - 18t}} = \frac{1}{\sqrt{7 + 18t}} \quad (=) \quad 25 - 18t = 7 + 18t \quad (\text{так как } t \in [0, 1] \text{ оба корня положительны})$$

$$(\Rightarrow 36t = 18 \Rightarrow t = \frac{1}{2})$$

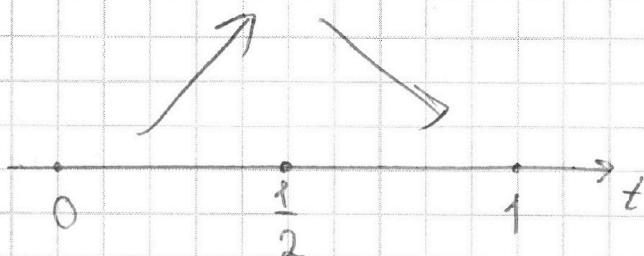
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Представим $t=0$ в $S'(t)$:

$$S'(0) = -\frac{18}{10} + \frac{18}{9\sqrt{7}} = -\frac{9}{5} + \frac{9}{5\sqrt{7}} = \frac{-9\sqrt{7} + 45}{5\sqrt{7}},$$

$$\text{ибо } 5 > \sqrt{7} \Rightarrow 45 > 9\sqrt{7} \Rightarrow S'(0) > 0 =$$

$$\Rightarrow S(t) - \text{возр. при } t < \frac{1}{2}$$

Представим $t=1$:

$$S(1) = -\frac{18}{2\sqrt{7}} + \frac{18}{2\sqrt{23}} = \frac{9}{5} - \frac{9}{5\sqrt{2}} < 0 =$$

$$\Rightarrow S(t) - \text{убывая при } t > \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2} - \text{м. максимума}$$

оп-им $S(t)$:

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{25-9} + \sqrt{25+9} = 4 + 4 = 18$$

$\Rightarrow AB + CD = 2S(t) \approx \text{принимает макс. значение } 16$

при $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k =$

$$\Rightarrow P_{\max}(c(\alpha)) = 16 + 5\pi, \text{ при } \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $16 + 5\pi$, $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N^o2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$-\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$-\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{y(y+1)} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$\frac{1}{y(y+1)} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{2}{(x-1)(y+1)} - \frac{2}{xy}$$

$$\frac{x(x-1) - y(y+1)}{y(y+1)x(x-1)} = \frac{2xy - 2(x-1)(y+1)}{xy(x-1)(y+1)}$$

$$x^2 - x - y^2 - y = 2xy - 2xy + 2x + 2y + 2$$

$$x^2 + x - y^2 - 3y = 2$$

$$x^3 - xy^3 - 3xy = x^3$$

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = (y + \frac{3}{2})^2$$

$$\left(x - \frac{1}{2} + y + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - y - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$(x + y + 2)(x - y - 2) = 0$$

$$x^3 - y^3 = 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy$$

$$2(x^2 + xy + y^2) - 3xy$$

$$2x^2 - xy + 2y^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x - y = 2 \Rightarrow x = y + 2.$$

$$k = \frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(y+2)} = \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(y+1)(y+1)} = \frac{2}{(y+1)} + \frac{1}{(y+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y+2+2}{y(y+1)} = \frac{2+2(y+1)}{(y+1)^2}, \text{ } \rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+2}{y(y+1)} = \frac{1+y+1}{(y+1)^2} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{y+2}{y(y+1)} \Rightarrow y^2 + 2y = y^2 + 2y + 1$$

$$3) a) \sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\boxed{6}$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \sin \pi y \sin \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$1 = 0 - (-1) = 1$$

$$\Phi \cos 2\pi x = -(\cos \pi y \cos \pi x - \cos \pi y \cos \pi x) = -\cos(\pi y + \pi x)$$

$$ABC = III \cdot 6,$$

$$BC = 11 \cdot 6 = 66$$

$$C = 33$$

$$A: 111111 = 11 \cdot 101 \\ ABC = 111 \cdot BC \\ B = 11$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi y + \pi x) = 0$$

$$2 \cos \frac{2\pi x + \pi y + \pi x}{2} \cos \frac{2\pi x - \pi y - \pi x}{2} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \end{array} \right.$$

$$3\pi x + \pi y = \pi + 2\pi k$$

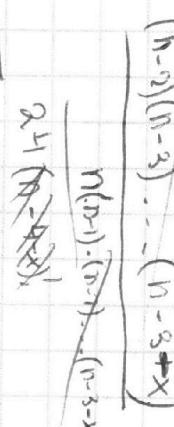
$$\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k$$

$$4\pi x = 2\pi + 4\pi k$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 2 + 2k$$

$$\pi y = \pi; \pi x = 2\pi + 2\pi k$$

$$\cos \pi y = -1; \cos \pi x = 1$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \pi y = -\frac{\pi}{2} + \pi k \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + k \\ y = -\frac{1}{2} + k \end{array} \right. k \in \mathbb{Z}$$

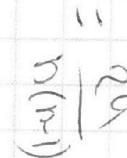
$$M = \arcsin \frac{x}{3} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$-15 \leq -y + 1 + 2k \leq 15$$

$$-18 \leq -y + 1 + 2k \leq 14$$

$$y - 16 \leq 2k \leq y + 14$$

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$



$$\boxed{6}$$

$$1 \frac{1}{2} \frac{3}{2}$$

$$16 \cdot n \cdot \delta$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(x - 3\sqrt{2}\sin \alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos \alpha) \leq 0 \quad \begin{array}{l} \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\pi} = \frac{90}{180} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi \\ = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R = 5\pi \end{array}$$

$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y - 3\sqrt{2}\cos \alpha = x - 3\sqrt{2}\sin \alpha$$

$$A = \frac{n \cdot n \cdot (n-2)}{2} \cdot \frac{(n-3)}{3} \dots \frac{(n-3-x)}{x+2}$$

$$\boxed{4}; \quad \boxed{n-k=0 \text{ означает}}$$

$$\frac{C_4}{C_n}$$

$$= 2, 3 \left(\frac{C_{n-1}}{C_n} \right)^2$$

$$\overline{C_n^4}$$

$$C_n^4$$

$$\frac{1}{n!}$$

$$\frac{(n-1)!}{(n-4)! \cdot 3!}$$

$$\frac{1}{C_{n-1}^3}$$

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$\frac{1}{C_n^4} = \frac{1}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}} = \frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$18 \sin^2 \alpha + y^2 \leq 25$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \cdot \frac{16}{n}$$

$$\frac{(n-1)!}{(n-4-x)! \cdot (3+x)!}$$

$$= \frac{(C_{n-1}^{3+x})^2}{C_n^{4+x}} = \frac{5}{2} \left(\frac{C_{n-1}^3}{C_n^4} \right)^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{18^2}{n^2} \cdot \frac{40}{n^2}$$

$$\frac{n!}{(n-1-x)!(4+x)!}$$

$$\left(\frac{1}{(3+x)!} \cdot \frac{(n+x)!}{n!} \right)^2 = \frac{40}{n^2} \quad (=)$$

$$40 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{40}{n^2}$$

$$40 \cdot \frac{1}{n^2} = 40$$

$$x^2 + 8x + 16 = 40$$

$$x^2 + 8x$$

$$\boxed{n=5} \quad x=4$$

$$\boxed{n=8} \quad x=1$$

$$\boxed{8 \sin 5}$$

$$\frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \cdot \frac{5}{2}$$

$$2 \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + 2 \sqrt{25 - 16 \sin^2 \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

5) $\angle A = 30^\circ$

$S_{\triangle ABC} = ?$

$$25 + \frac{925}{4} - 2 \cdot 5 \cdot \frac{15}{4} \cos 2\alpha = \frac{625}{4} + 81 -$$

$$- 2 \cdot 5 \cdot \frac{25}{2} \cos \alpha$$

$$25 - \frac{225}{4} \cos 2\alpha = 100 + 81 -$$

$$- 25 \cos \alpha$$

$\cos \alpha = \frac{9}{10} \Leftrightarrow \alpha = 45.5^\circ$

$A \quad 9 \quad C$

$\cos \alpha = t \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 2t^2 - 1$

$BC = \frac{625}{4} + 81 - 25 \cdot 9 \cdot \frac{9}{10} = 25 - 150t^2 + 75 = 181 - 225t$

$25t^2 - 225t + 81 = 0$

$t = \frac{625}{4} + 81 - \frac{225 \cdot 81}{1486}$

$t = \frac{625}{4} + 81 - \frac{5}{3} \cdot 81 = 50t^2 - 75t + 27 = 0$

$D = 75^2 - 4 \cdot 50 \cdot 27 = 160 + 78 - 56 + 16 = 216$

$8 \cdot 75 = 600$

$8 \cdot 25^2 - 8 \cdot 25 \cdot 27 = 25(225 - \frac{216}{25}) = 9$

$\alpha + \beta = 150^\circ$

$\alpha = 76.7^\circ$

$14 \quad 15 \quad 163$

$\frac{625}{4} - \frac{616}{4} = -\frac{185}{4} + 61$

$\frac{324 - 185}{4} = \frac{139}{4}$

$\frac{\sqrt{139}}{2} \approx \frac{12}{2} = \cos(\alpha + \beta) = \frac{81 + \frac{139}{4} - \frac{625}{4}}{2 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{139}}{2}} =$

$= 81 - \frac{425}{4} = 81 - \frac{1}{2} \cdot 21 = \boxed{14}$