



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1 Заметим, что число A представляется в виде $1111 \cdot x$, где x — это цифра $\neq 0$. ~~Это равносильно за-~~
метим $A = 101 \cdot 11 \cdot x$. Заметим, что x не делится
ни на 101 , ни на 11 (т.к. меньше $101 \Rightarrow$ т.к. 101 и 11 —
простые числа, то, чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом, нуж-
но, чтобы $B \cdot C$ делилось на $101 \cdot 11$. C не может делиться
на 101 (т.к. меньше 1) и не может делиться на 11^2 (т.к.
меньше $1 \Rightarrow C : 11$ и $(x \neq 11$. Т.к. в задании число C есть
 5 , то $C = 55$ (если есть ещё какой-то делитель y C , то
 $C \geq 55 \cdot 2 = 110$, что невозможно). B должно делиться на
 101 и содержать в своей записи цифру $1 \Rightarrow B = 101$.
Получим $A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot x \cdot 5$ — квадрат $\Rightarrow$ т.к. x — цифра,
то $x = 5$. Получим искомого тройка чисел — это $(5555; 101; 55)$
Ответ: $(5555; 101; 55)$

XXXXXX



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4 Пусть всего было x симметричных
Почти вероятности Теме и Вале почти на кон-
церт включе игра = $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^2}$ (м.к. включено спон-

сор, в котором есть Тёма и Валя = количество способов
выбрать еще двух человек, то есть C_{x-2}^2 всего спон-
сор - $C_x^2 = \frac{12}{(x-2)(x-1)}$. Если в конце игры первым было

y билетов, то вероятности Теме и Вале включено-
ности на концерт = $\frac{C_{x-2}^2}{C_x^2} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$

~~По условию~~ $\frac{7}{2} \cdot \frac{12}{(x-2)(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$

$\Rightarrow 42(2-y+1)(2-y+2) = y(y-1)(x-2)(x-1)$

$= \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$. По условию $\frac{7}{2} \cdot \frac{12}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(y-1) = 42 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 7$ (м.к. билетов

билетов > 0

билетов. 7

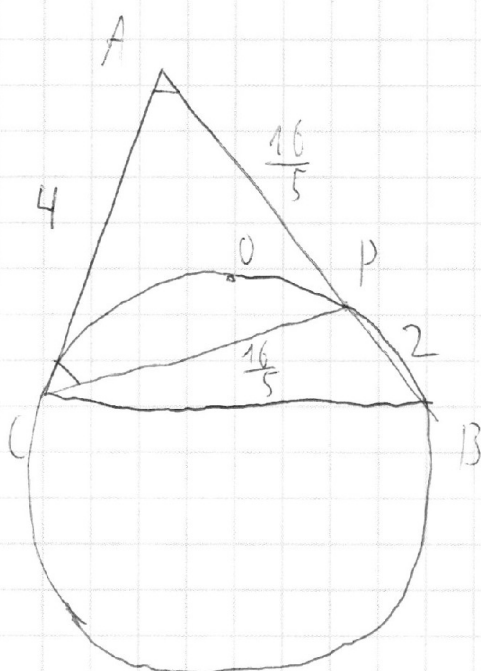


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle BOC = \angle BPC \text{ (м.к. } BPOC - \text{ впис.)} \Rightarrow \angle BPC = 2\angle BAC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{м.к. } \angle BPC = \angle PAC + \angle PCA, \text{ т.к. } \angle PCA = \angle BAC \text{ (впис.)} \Rightarrow \triangle PAC - \text{ равнобедр.} \Rightarrow AP = PC = \frac{16}{5}. \text{ По т. косинусов для } \triangle PAC:$$

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot \cos \angle PAC \Rightarrow \cos \angle PAC = \frac{PC^2 - AP^2 - AC^2}{-2AP \cdot AC} =$$

$$= \frac{5}{8} \Rightarrow \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \Rightarrow S_{\triangle BAC} =$$

$$= \frac{AC \cdot AB \cdot \sin \angle BAC}{2} = \frac{4 \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8}}{2} = \frac{13 \cdot \sqrt{39}}{10}$$

$$\text{Ответ: } \frac{13\sqrt{39}}{10}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

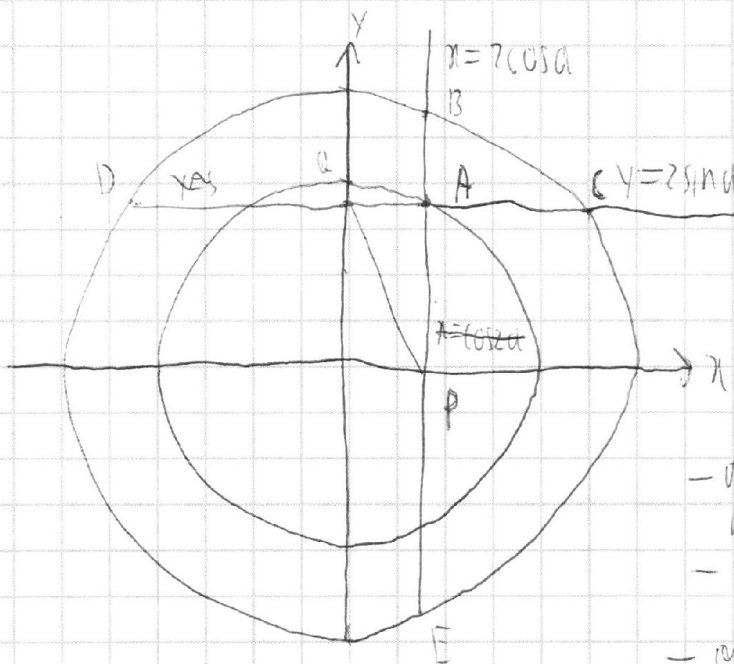
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6 Точка A - точка (координаты) $(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$.

Заметим, что эта точка лежит на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 4$. Точки, для которых

$(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$ - это точки внутри угла BAC и угла DAE. Искомые точки, для которых $x^2 + y^2 \leq 9$ -



- это круг с центром в начале координат и радиусом 3. Точка A принадлежит фигуре $\Phi(\alpha)$ с центром в O .

- дуги BC

- дуги DE

- отрезков DA, AB, AC, AE.

Заметим, что $\angle DAE = 90^\circ = \frac{1}{2} \angle BOC + \angle CDE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BOC + \angle CDE = 180^\circ \Rightarrow$ углы при дуге не зависят от

точки A. Поэтому для любых точек A на окружности

BA, DA, CA, EA. Это равнозначное наложению на окружность

углов BEUDC. Поэтому, что и как бы было, в какой-то



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вспомогательная точка A (вспомогательная, так как мы ищем все точки A в первом четверти, то, учитывая симметрию, найдем точку A в первом четверти). Будем считать, что A в первом четверти. Рассмотрим векторы $BE + CD$ в зависимости от точки $A \Rightarrow$ рассмотрим векторы $BP + CQ$, где P, Q — середины BE и CD соответственно, что P, Q — это проекции точки A на оси x и y соответственно. Координаты точки $B = (9 - 4\cos^2 d; 6\cos d; \sqrt{9 - 4\cos^2 d})$, а координаты точки $C = (9 - 4\sin^2 d; 2\sin d; \sqrt{9 - 4\sin^2 d})$. Тогда $BP = \sqrt{9 - 4\cos^2 d}$; $CQ = \sqrt{9 - 4\sin^2 d} \Rightarrow BP + CQ = \sqrt{9 - 4\cos^2 d} + \sqrt{9 - 4\sin^2 d}$. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим получим, что $\frac{\sqrt{9 - 4\cos^2 d} + \sqrt{9 - 4\sin^2 d}}{2} \leq \sqrt{\frac{18 - 4(\sin^2 d + \cos^2 d)}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{18 - 4}{2}} = \sqrt{7} \Rightarrow \sqrt{9 - 4\cos^2 d} + \sqrt{9 - 4\sin^2 d} \leq 2\sqrt{7}$$
. Тогда-
 что получается, тогда $9 - 4\cos^2 d = 9 - 4\sin^2 d \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sin^2 d = \cos^2 d \Rightarrow d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.
 Ответ: $\max |M| = 2\sqrt{7}$ при $d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$



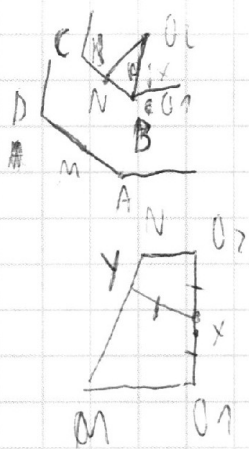
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7 Пусть в основании усеченной пирамиды лежит n -угольник, O_1, O_2 — центры этих многоугольников, B — вершина и M — середина боковой стороны. Рассмотрим сечение



плоскости, содержащего ребро BM и центры O_1, O_2 . Пусть X — центр сечения. Покажите, что X — середина O_1O_2 . Верно ли, что X — середина O_1O_2 всегда? $XO_1 = XO_2 =$ радиус r . O_1MO_2 —

треугольник. $\Rightarrow$ основание перпендикуляра из X на соответствующую сторону пирамиды $\in MN$ (где M — вершина, N — середина боковой стороны). Тогда $XO_2 = XO_1 = XY \Rightarrow \triangle MNX = \triangle NO_2X$ и

$\triangle XNO_1 = \triangle MNX \Rightarrow NO_2 = MX, MO_1 = NX$. Тогда $O_1O_2 =$

$$= \sqrt{MN^2 - (MO_1 - NO_2)^2} = \sqrt{(MO_1 + NO_2)^2 - (MO_1 - NO_2)^2} = 2\sqrt{MO_1 \cdot NO_2}$$

Пусть теперь центр $O = Z$. Из симметрии сечения O лежит на O_1O_2 . Пусть проекция из Z на соответствующую сторону — точка T ($T \in MN$ по условию (Y)). Проекция из F на $AB = F$. Заметим, что проекция Z на ребро



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

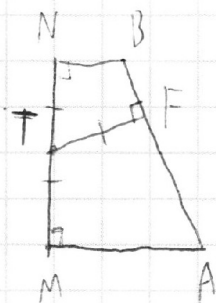
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AD \parallel CB \Rightarrow m \angle M \text{ и } \angle N \text{ соот. } \angle M = \angle N \neq 180^\circ$

$\Rightarrow \angle T = \angle F$ (проекции $\angle M$ и $\angle N$ на AB — это

F и T — это ортогональные проекции на AB)

$\Rightarrow TM = TN = TF$ (м.к. $TM = TN = TF =$

$= ZM^2 - ZT^2 = ZN^2 - ZT^2 = ZF^2 - ZT^2$). Тогда $\triangle NTB = \triangle FTB$,

$\triangle MAT = \triangle FAT; \Rightarrow NB = BF, MA = AF. \Rightarrow NM = \sqrt{AB^2 - (MA - NB)^2} =$

$= \sqrt{(MA + NB)^2 - (MA - NB)^2} = \sqrt{4 \cdot MA \cdot NB} = 2\sqrt{MA \cdot NB}$. Значит,

что искомым углом $\alpha = \arcsin \frac{O_1 O_2}{MN} = \frac{2\sqrt{MO_1 \cdot MO_2}}{2\sqrt{MA \cdot NB}} =$

$= \frac{MO_1}{MA} \left(\text{м.к. } \frac{MO_1}{MA} = \frac{NO_1}{NB} \text{ из подобия треугольников} \right)$

$= +90^\circ \text{ или } -90^\circ \text{ или } \arcsin \left(\pm \left(\frac{n-2}{n} \cdot 90^\circ \right) \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{искомый угол} = \arcsin \left(\pm \left(\frac{n-2}{n} \cdot 90^\circ \right) \right)$

Ответ: $\arcsin \left(\pm \left(\frac{n-2}{n} \cdot 90^\circ \right) \right)$

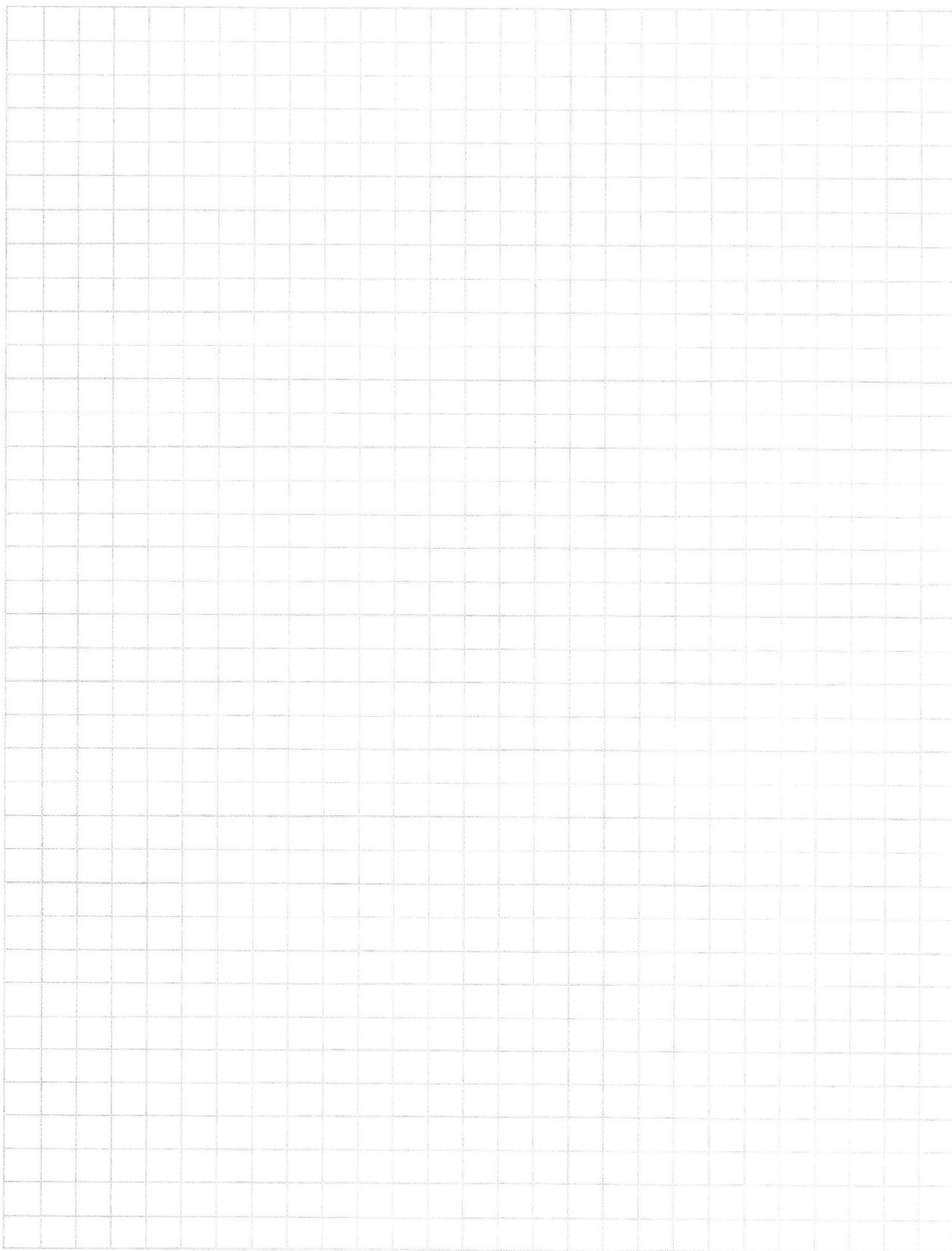


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, featuring a geometric diagram of a triangle with an inscribed circle and various algebraic calculations.

Geometric Diagram: A triangle with vertices A, B, and C. An inscribed circle is shown, tangent to the sides AB, BC, and CA at points P, Q, and R respectively. The radius of the circle is labeled $\frac{16}{5}$. The side lengths are given as $AB = 4$, $BC = 10$, and $CA = 11$.

Algebraic Calculations:

- Top left: $\frac{7}{2} \cdot \frac{x^2}{(x^4)}$
- Top right: $\frac{(x-2)!}{(x-2)(x-3)}$, $\frac{x!}{(x-1)(x-2)!}$, $\frac{x!}{(x-1)(x-2)!}$
- Middle left: $ab = x$, $d = \frac{x}{5}$
- Middle right: $\frac{10}{5}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{10}{16}$
- Bottom left: $b + \frac{x}{b} = \frac{5x+1}{b}$
- Bottom right: $\frac{256}{25} - \frac{256}{25} = 16$, $\frac{16 \cdot 4}{5}$, $\frac{12}{(x-2)(x-3)} = \frac{60}{5}$, $\frac{12}{(x-2)(x-3)} = \frac{60}{5}$, $\frac{12}{(x-2)(x-3)} = \frac{60}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{9999}{9} = x$$

$$101 \cdot 11 \cdot x$$

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$101 \cdot 11 \cdot x$$

$$55$$

$$4(t-1)^2 - 12(t+1)$$

$$(1111, 101, 55)$$

$$(5555, 101, 55)$$

$$4(t+1)(t-4)$$

$$K =$$

$$\frac{1}{x}$$

$$2 \sqrt{M G_1 \cdot N G_2}$$

$$\frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x-3} + 1} = t$$

$$\frac{2 \sqrt{M G_1 \cdot N G_2}}{M A + N B}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$4 \sin^2 \alpha + x^2 = 9$$

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right) \left(\frac{1}{y} + 1\right) = \left(\frac{1}{x-3} + 1\right) \left(\frac{1}{y+3} + 1\right)$$

$$\sqrt{18-4} = \frac{14}{2} \frac{2x\sqrt{a}}{y(1+a)}$$

$$h$$

$$\frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x-3} + 1} = \frac{\frac{1}{y+3} + 1}{\frac{1}{y} + 1}$$

$$y = x+3$$

$$-3(x^2 + x(x+3) + (x+3)^2) - 9x^2 - 27x$$

$$-3x^2 - 3x^2 - 9x - 3x^2$$

$$x^3 - (x+3)^3 - 9x(x+3)$$

$$y = \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

$$\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

$$v^2 + 4 \cos^2 \alpha = 9$$

$$30$$

$$x^2 = 9 - 4 \sin^2 \alpha$$

$$\frac{(n-2) \cdot 120}{2}$$

$$\frac{(n-2) \cdot 120}{n}$$

