МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x =$ $= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1. A состоит из одинаковых цифр $\Rightarrow$ оно делится на $1111 \Rightarrow$ оно делится на 101 и на 11. Пусть $x^2 = ABC$. $A \vdots 101 \overset{101\text{ простое}}{\Rightarrow} x \vdots 101 \Rightarrow x^2 \vdots 101^2 \Rightarrow ABC \vdots 101^2$. Тогда (раз 101 простое) $B \vdots 101$ или $C \vdots 101$ (иначе $A \vdots 101^2 \Rightarrow A \geq 10201 \geq \overset{\text{максимум для } A}{9999}$). C двузначное $\Rightarrow C \not\vdots 101 \Rightarrow B \vdots 101 \Rightarrow$

$\Rightarrow B \in \{101; 202; \ldots; 909\}$. Поскольку в записи B есть 1, то $B = 101 \Rightarrow B \not\vdots 11$. $A \vdots 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = ABC \vdots 11 \overset{\text{т.к. } 11\text{ простое}}{\Rightarrow} x \vdots 11 \Rightarrow ABC \vdots 11^2 \overset{B \not\vdots 11}{\Rightarrow} AC \vdots 11^2$. $A \not\vdots 11^2$, т.к. $A = 11 \cdot 101 \cdot k$, где $k \in [1;9]$, $k \in \mathbb{N}$, следовательно, $C \vdots 11$ (11 простое) $\Rightarrow C = \overline{mm}$, где $m \in [1;9]$, $m \in \mathbb{N}$. Поскольку в записи C есть 5, то $m = 5 \Rightarrow C = 55$. $x^2 = ABC = \overline{kkkk} \cdot 101 \cdot 55 = 5k \cdot 1111^2$. Отсюда $5k$ – точный квадрат, пусть $5k = y^2$. Тогда (раз 5 простое) $y^2 \vdots 5 \Rightarrow y \vdots 5 \Rightarrow 5k \vdots 5^2 \Rightarrow k \vdots 5 \Rightarrow k = 5$. Отсюда $A = 5555$, $B = 101$, $C = 55$, это подходит под условия.

Ответ: $(5555; 101; 55)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2. По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{(x-3)}+\frac{1}{(y+3)}+\frac{1}{(x-3)(y+3)} \overset{x,y>0}{\Leftrightarrow} \frac{x+y+1}{xy}=\frac{\cancel{(x-3)(y+3)+1}\,(x-3)+(y+3)+1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy}=\frac{x+y+1}{xy+3x-3y-9} \Leftrightarrow$ $x+y+1>0$, а знаменатели ненулевые $xy=xy+3x-3y-9 \Leftrightarrow y=x-3 \Rightarrow M=x^3-y^3-9xy=$

$=x^3-(x-3)^3-9x(x-3)=x^3-x^3+9x^2-27x+27-9x^2+27x=27.$ Все условия выполнены, например, при $x=4,\ y=1$.

Ответ: 27.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3. а) Преобразуем равенство, используя формулы перевода разности и суммы тригонометрических функций в произведение:

$$(\sin\pi x-\sin\pi y)\sin\pi x=(\cos\pi x+\cos\pi y)\cos\pi x \Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi(x-y)}{2}\cos\frac{\pi(x+y)}{2}\sin\pi x=2\cos\frac{\pi(x+y)}{2}\cos\frac{\pi(x-y)}{2}\cos\pi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi(x+y)}{2}\left(\cos\frac{\pi(x-y)}{2}\cos\pi x-\sin\frac{\pi(x-y)}{2}\sin\pi x\right)=0 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi(x+y)}{2}\cos\left(\frac{\pi(x-y)}{2}+\pi x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi(x+y)}{2}\cos\frac{\pi(3x-y)}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi(x+y)}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi n_1,\ n_1\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi(3x-y)}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi n_2,\ n_2\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y=2n_1+1,\ n_1\in\mathbb{Z}\\ 3x-y=2n_2+1,\ n_2\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

~~⇔ [x+y нечётное число; 3x−y нечётное число ⇔ [x+y нечётное~~

б) По определению арккосинуса, $\arccos\frac{x}{4}\in[0;\pi]$ и $\arccos\frac{y}{9}\in[0;\pi] \Rightarrow \arccos\frac{x}{4}+\arccos\frac{y}{9}\le$ $\le 2\pi$, причём равенство ~~достигается~~ равносильно системе $\begin{cases}\arccos\frac{x}{4}=\pi\\ \arccos\frac{y}{9}=\pi\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{4}=-1\\ \frac{y}{9}=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\ y=-9\end{cases}$, и эта пара удовлетворяет совокупности из пункта а), это единственная такая пара (для которой не выполняется неравенство). Но ~~э~~ решениями уравнения являются также все пары $(x;y)$, где $x=0$, а $y=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, и ни одна не совпадает с $(-4;-9)$, и все удовлетворяют неравенству из условия. Значит, искомое количество пар бесконечно.

Ответ: а) Все пары $(x;y)$ такие, что $x+y$ или $3x-y$ — нечётное число; б) бесконечное количество.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4. Пусть одиннадцатиклассников n, а в конце месяца было выделено k билетов.

Тогда вероятность Пете и Васе попасть на концерт в начале месяца была равна

C_{n-2}^{2} ← Кол-во способов выдать 2 билета Пете и Васе, а остальные 2 остальным $n-2$ одиннадцатиклассникам

$\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4}$, а в конце была равна $\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$ (считаем аналогично). По условию:

C_n^4 ← общее кол-во способов раздать билеты n одиннадцатиклассникам

$$3{,}5\,\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4}=\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} \Leftrightarrow 3{,}5\,\frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)!\cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!}}=\frac{\frac{(n-2)!}{(n-k)!\cdot(k-2)!}}{\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}} \Leftrightarrow 3{,}5\,\frac{(n-2)!\cdot 4!}{n!\cdot 2!}=\frac{(n-2)!\,k!}{n!\,(k-2)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3{,}5\cdot\frac{3\cdot 4}{n(n-1)}=\frac{k(k-1)}{n(n-1)} \underset{n\notin\{0;1\}}{\Leftrightarrow} 42=k^2-k \Leftrightarrow k^2-k-42=0 \Leftrightarrow (k-7)(k+6)=0 \Rightarrow k\in\{7;-6\}.\ k\geq 4 \Rightarrow k=7.$$

Искомое кол-во билетов равно 7.

Ответ: 7.

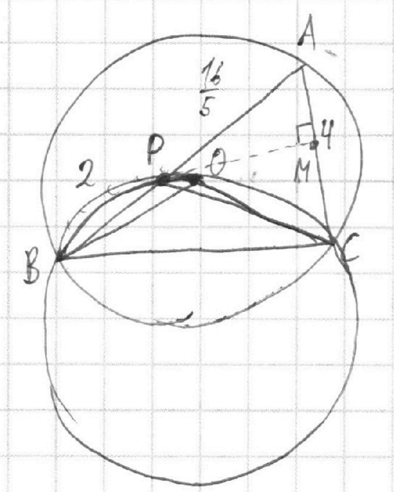
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



Раз $\angle BOC$ центральный в окружности (ABC), а $\angle BAC$ вписанный, то $\angle BOC = 2\angle BAC$.

Окружность (BOC) пересекает отрезок AB в точке $P \Rightarrow$ P и O по одну сторону от $BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2\angle BAC \Rightarrow \angle ACP = \angle BPC - \angle PAC = 2\angle BAC - \angle BAC = \angle BAC = \angle PAC \Rightarrow \triangle PAC$ равнобедренный и

$PA = PC = \frac{16}{5}$. Пусть M — середина AC, тогда $\angle PMA = 90°$, $AM = 2$. Искомая площадь равна:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\, AB\cdot AC\cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot(AP+PB)\cdot AC\cdot \sin\angle PAM = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{16}{5}+2\right)\cdot 4\cdot\sqrt{1-\cos^2\angle PAM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{26}{5}\cdot 4\cdot$$

~~ПЯТЬСЯТ АВА!!!~~

$$\cdot\sqrt{1-\left(\frac{2}{\frac{16}{5}}\right)^2} = \frac{52}{5}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{52}{5}\cdot\sqrt{\frac{64-25}{64}} = \frac{52}{5}\cdot\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{64}} = \frac{52}{5}\cdot\frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}.$$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$.

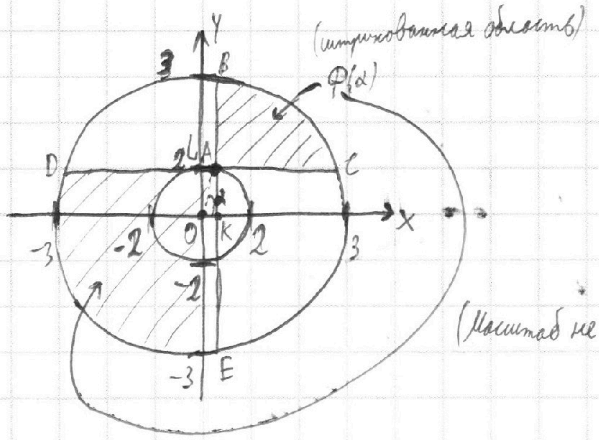
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.



(Масштаб не соблюдён, ну и ладно)

Раз $x^2+y^2\le 9$, то x и y лежат внутри или на границе окружности с центром в O (начало координат) и радиусом 3. Нарисуем окружность с центром в O и радиусом 2. ~~Если отсчитать угол α от оси ... против часовой стрелки~~ Угол α задаёт точку на „маленькой" окружности с координатами $2\cos\alpha$ и $2\sin\alpha$, пусть эта точка A. Проведём через неё прямую, параллельную OX (пересекает большую окружность в точках C и D, C правее D) и прямую, параллельную OY (... в точках B и E, B выше E). Нетрудно понять, что первое неравенство системы задаёт множество точек, лежащих внутри угла BAC или внутри угла DAE (или на их границе). Значит, $\Phi(\alpha)$ состоит из криволинейных треугольников BAC и DAE (BA, CA, DA и EA – отрезки, BC и DE – дуги большой окружности). $\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow$ сумма длин дуг BC и DE (принадлежащих $\Phi(\alpha)$) составляет половину большой окружности, т.е. $\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 3 = 3\pi$. Пусть BE пересекает OX в точке K, а CD пересекает OY в точке L. Тогда периметр $\Phi(\alpha)$ равен $BA+CA+\overset{\text{длина дуги BC}}{l_{BC}} + DA+EA+\overset{\text{длина дуги DE}}{l_{DE}} = 3\pi+AB+AC+AD+AE = 3\pi+(AB+AE)+(AC+AD) = 3\pi+BE+CD =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

по построению $BE \perp OX \Rightarrow BK = EK$

$= 3\pi + (BK + EK) + (DL + CL) = 3\pi + 2BK + 2CL = 3\pi + 2\sqrt{BK \cdot EK} + 2\sqrt{CL \cdot DL} = 3\pi + 2\sqrt{3^2 - OK^2} + 2\sqrt{3^2 - OL^2} =$

степень K отн. большой окружности; степень L...; радиус большой окр.; подк. выражения > 0

$= 3\pi + 2\left(\sqrt{9 - \cos^2\alpha} + \sqrt{9 - \sin^2\alpha}\right) = 3\pi + 4\,\dfrac{\sqrt{8 + \sin^2\alpha} + \sqrt{9 - \sin^2\alpha}}{2} \leq 3\pi + 4\sqrt{\dfrac{(8 + \sin^2\alpha)(9 - \sin^2\alpha)}{2}} = 3\pi + 4\sqrt{8{,}5} = 3\pi + 2\sqrt{34}$. Это максимальное

Нер-во между средними арифметическим и квадратичным

- вот это неравенство обращается в равенство

значение периметра $\Phi(\alpha)$, и оно достигается при $\sqrt{8 + \sin^2\alpha} = \sqrt{9 - \sin^2\alpha} \Leftrightarrow 8 + \sin^2\alpha = 9 - \sin^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\cancel{3\pi + 4\sqrt{8{,}5}}$ $3\pi + 2\sqrt{34}$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in \mathbb{Z}$.

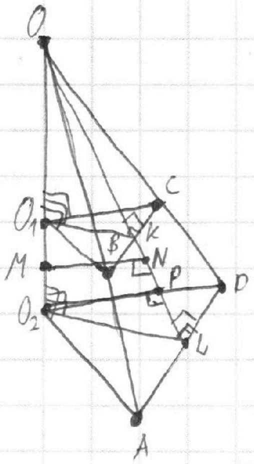
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



Рассмотрим грань ABCD. Ω касается всех её рёбер ⇒ сечение Ω плоскостью (ABC) (это окружность) ~~касается~~ вписана в ABCD. ABCD — равнобокая трапеция (т.к. пирамида правильная) ⇒ $AB=CD$, и $AB+CD=BC+AD$. Пусть $BC=a$, $AD=b$, тогда $AB=CD=\frac{a+b}{2}$. Пусть $(AB)\cap(CD)=O$, O_1 и O_2 — центры малого (содержит BC) и большого (содержит AD) оснований соответственно, тогда $(OO_1)\perp(O_1BC)$ и $(OO_2)\perp(O_2AD)$, $O\in(O_1O_2)$. Очевидно, что раз ω касается всех граней, то центр ω — середина M отрезка $[O_1O_2]$. Пусть K и L — середины $[BC]$ и $[AD]$, тогда $(O_1K)\perp(BC)$, $(O_2L)\perp(AD)$, по т.т.п. $(OK)\perp(BC)$, $(OL)\perp AD \Rightarrow O\in(KL)$.

т.к. $(BC)\parallel(AD)$

$\triangle OBC \sim \triangle OAD \Rightarrow \frac{|OA|}{|OB|}=\frac{b}{a}$, а $|OA|-|OB|=\frac{a+b}{2} \Rightarrow |OB|=\frac{(a+b)a}{2(b-a)}$, $|OA|=\frac{(a+b)b}{2(b-a)}$, а также $|OC|=|OB|$ и $|OD|=|OA|$.

Ясно, что $\omega\cap(ABC)=N$ — проекция M на (KL) ⇒ $|MO_1|=|MO_2|=|MN|$. Пусть $|OO_1|=x$, тогда (раз $\triangle OO_1B\sim\triangle OO_2A$) ~~а $\triangle O_1BK \sim \triangle O_2AD \Rightarrow \frac{|O_1B|}{|O_2A|}=\frac{a}{b}$~~ $|OO_2|=\frac{b}{a}x$. Пусть $|O_2L|=y$, а P — проекция O_2 на (OBC), тогда из симметрии $P\in(OL)$. $|OM|=\frac{|OO_1|+|OO_2|}{2}=\frac{b+a}{2a}x$. $\triangle ONM\sim\triangle OO_2L \Rightarrow |MN|=\frac{|OM|}{|OL|}|O_2L|=\frac{b+a}{2a}x\cdot y:\sqrt{(\frac{b}{a}x)^2+y^2}$. $|MN|=|MO_1|=$
$=\frac{b-a}{2a}x \Rightarrow \frac{b-a}{2a}x=\frac{b+a}{2a}x\cdot y:\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2} \Leftrightarrow (b-a)\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2}=(b+a)y \Leftrightarrow \left(\frac{(b-a)b}{a}x\right)^2=((b+a)^2-(b-a)^2)y^2 \Leftrightarrow y=\frac{\frac{(b-a)b}{a}}{2\sqrt{ab}}x=\frac{(b-a)\sqrt{b}}{2a\sqrt{a}}x$.

$\operatorname{tg}\angle OAO_2=\frac{|OO_2|}{|O_2A|}=\frac{\frac{b}{a}x}{\sqrt{|O_2L|^2+|AL|^2}}=\frac{\frac{b}{a}x}{\sqrt{y^2+\frac{b^2}{4}}}=\frac{\frac{b}{a}x}{\sqrt{\frac{(b-a)^2b}{4a^3}x+\frac{b^2}{4}}}=\frac{2bx}{\sqrt{\frac{(b-a)^2b}{a}x+b^2}}=\frac{2\sqrt{ab}\,x}{\sqrt{(b-a)^2+4ab}}$. Нам не даны ни a, ни b, ни x,

угол при основании, его надо найти

поэтому угол при основании найти невозможно.

Ответ: невозможно однозначно найти угол.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. $A = 1111k,\ 1 \le k \le 9$

$1111k = 11 \cdot k \cdot 101$

$ABC = x^2 \Rightarrow B \vdots 101$ или $C \vdots 101$ — невозм., т.к. С двузн.

трёхзн., одна из цифр $1 \Rightarrow B = 101$

$11 \cdot k \cdot C = x^2 \Rightarrow C \vdots 11$. У C есть цифра $5 \Rightarrow C = 55,\ k = 5$.

$\boxed{A = 5555,\ B = 101,\ C = 55}$

$5555 \cdot 101 \cdot 55 = 55^2 \cdot 101^2 = 5555^2$.

$\sin a + \sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) =$
$= \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} +$
$+ \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$

$\cos a + \cos b = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} +$
$+ \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

2. $x > 0,\ y > 0:\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

~~$xy + x + y$~~ ~~$\frac{(x+1)(y+1)-1}{xy}$~~

$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{(x-3)(y+3)+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow xy = xy - 3y + 3x - 9 \Rightarrow \cancel{y = x-3}$

$x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = \boxed{27}$

$\sin^2 \pi x = \frac{1}{2}(\cos 0 - \cos 2\pi x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi x)$

$\sin\pi x \sin\pi y = \frac{1}{2}\left(\cos\pi(x-y) - \cos\pi(x+y)\right)$

$\cos^2\pi x = \frac{1}{2}(\cos 0 + \cos 2\pi x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi x)$

$\cos\pi x\cos\pi y = \frac{1}{2}(\cos\pi(x-y) + \cos\pi(x+y))$

$\cos 2\pi x + \cos\pi(x+y) = 0$

$\cos\pi\frac{3x+y}{2}\cos\pi\frac{x-y}{2} = 0$

3. ~~$\sin^2\pi x - \sin\pi x \sin\pi y = \cos^2\pi x + \cos\pi x\cos\pi y$~~

$2\sin\pi\frac{x-y}{2}\cos\pi\frac{x+y}{2}\sin\pi x = -2\cos\pi\frac{x-y}{2}\cos\pi\frac{x+y}{2}\cos\pi x$

$\cos\pi\frac{x+y}{2}\left(\cos\pi\frac{x-y}{2}\cos\pi x + \sin\pi\frac{x-y}{2}\sin\pi x\right) = 0$

$\cos\pi\frac{x+y}{2}\cos\left(\pi x - \pi\frac{x-y}{2}\right) = \cos\pi\frac{x+y}{2}\cos\pi\frac{3x-y}{2} = 0$

~~$\pi\frac{x-y}{2} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ $\quad x - y = 2n,\ n \in \mathbb{Z}$~~

~~$\pi\frac{3x+y}{2} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ $\quad 3x + y = 2n,\ n \in \mathbb{Z}$~~

$\cos\pi\frac{3x-y}{2} = 0,\ \pi\frac{3x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$3x - y = 2n+1,\ n \in \mathbb{Z}$

$\cos\pi\frac{x+y}{2} = 0,\ \pi\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x + y = 2n+1,\ n \in \mathbb{Z}$

$\frac{x}{4} \ne -1;\ \frac{y}{9} \ne -1 \Leftrightarrow x \ne -4,\ y \ne -9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) Одиннадцатиклассников n.

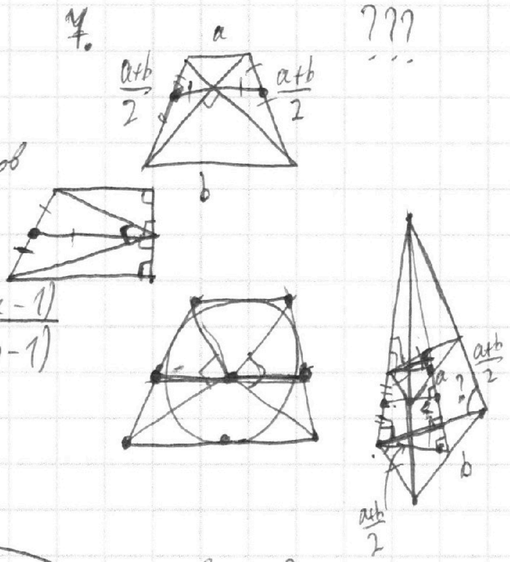
Петя и Вася попали (в начале): C_{n-2}^{2} из C_n^4

Петя и Вася попали (в конце): C_{n-2}^{k-2} из C_n^k ← кол-во билетов

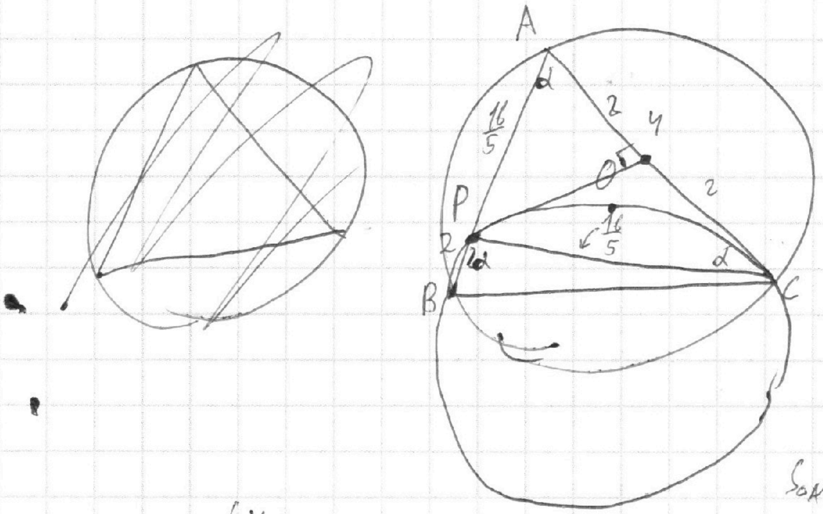
$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}\cdot 3{,}5 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{(n-2)!\,k!}{(k-2)!\,n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{4\cdot 3}{n(n-1)} \Rightarrow 12\cdot 3{,}5 = k(k-1) \Rightarrow k^2-k-42=0, \boxed{k=7}$$

7.



5.



$S_{\triangle ABC} = ?$

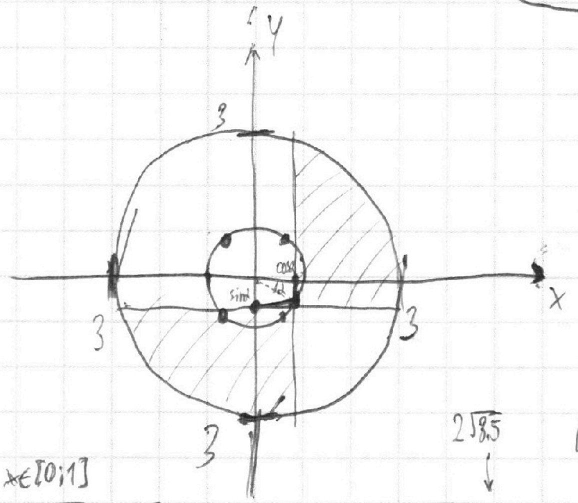
$$\cos\alpha = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{4^2}{2\cdot\frac{16}{5}\cdot 4} = \frac{5}{8}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{64-25}}{8} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{26}{5}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{39}}{8} = \boxed{\frac{13\sqrt{39}}{10}}.$$

6.



$a^2 = 3^2 - \cos^2\alpha$

$b^2 = 3^2 - \sin^2\alpha$

$4\sqrt{8,5}$ max = ?

$2a+2b = 2\sqrt{9-\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-\cos^2\alpha}$

$P_{max} = 4\sqrt{8,5} + 3\pi$

$l_{окр} = \frac{2\pi\cdot 3}{2} = 3\pi = const$

$x\in[0;1]$

$\sqrt{8+x} + \sqrt{9-x}_{max} = ?$

$2\sqrt{8,5}$

$\sqrt{8+\cos^2\alpha} + \sqrt{9-\cos^2\alpha}_{max} = ?$

$$(\sqrt{8+x}+\sqrt{9-x})' = \sqrt{8+x}' + \sqrt{9-x}' = \frac{1}{2\sqrt{8+x}} - \frac{1}{2\sqrt{9-x}} = 0 \Leftrightarrow 8+x = 9-x \Leftrightarrow x = 0{,}5 = \cos^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n\in\mathbb{Z}$$