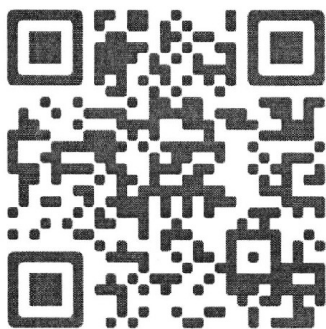




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1. А состоит из одинаковых цифр $\Rightarrow$ оно делится на 1111 $\Rightarrow$ оно делится на 101 и на 11. Пусть $x^2 = ABC$. $A:101 \Rightarrow x:101 \Rightarrow x^2:101^2 \Rightarrow ABC:101^2$. Тогда (раз 101 простое) $B:101$ или $C:101$ (иначе $A:101^2 \Rightarrow A \geq 10201 > 9999$). C двузначное $\Rightarrow C:101 \Rightarrow B:101 \Rightarrow B \in \{101, 202, \dots, 909\}$. Поскольку в записи B есть 1, то $B=101 \Rightarrow B \not\equiv 11$. $A:11 \Rightarrow x^2 = ABC:11 \Rightarrow x:11 \Rightarrow ABC:11^2 \Rightarrow AC:11^2$. $A \not\equiv 11^2$, т.к. $A=11 \cdot 101 \cdot k$, где $k \in [1; 9]$, $k \in \mathbb{N}$, следовательно, $C:11$ (11 простое) $\Rightarrow C = \overline{mm}$, где $m \in [1; 9]$, $m \in \mathbb{N}$. Поскольку в записи C есть 5, то $m=5 \Rightarrow C=55$. $x^2 = ABC = \overline{kkkk} \cdot 101 \cdot 55 = 5k \cdot 1111^2$. Поскольку $5k$ — полный квадрат, пусть $5k = y^2$. Тогда (раз 5 простое) $y^2:5 \Rightarrow y:5 \Rightarrow 5k:5^2 \Rightarrow k:5 \Rightarrow k=5$. Отсюда $A=5555$, $B=101$, $C=55$, это подходит под условия.

Ответ: (5555; 101; 55).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2. По условию $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$ ($\Rightarrow$) $\frac{x+y+1}{xy} = \frac{(x-3)(y+3)+1}{(x-3)(y+3)}$ ($\Rightarrow$)

$\Rightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy+3x-3y-9}$ ($\Rightarrow$) $\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy+3x-3y-9}$ ($\Rightarrow$) $xy = xy+3x-3y-9 \Rightarrow y = x-3 \Rightarrow M = x^3 - y^3 - 9xy =$

$= x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = 27$. Все условия выполнены, например,

при $x=4, y=1$.

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3. а) Преобразуем равенство, используя формулы перевода разности и суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\begin{aligned} (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \left(\cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x - \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x \right) &= 0 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \left(\frac{\pi(x-y)}{2} + \pi x \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(3x-y)}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n_1, n_1 \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi(3x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n_2, n_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2n_1+1, n_1 \in \mathbb{Z} \\ 3x-y = 2n_2+1, n_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

~~$\begin{cases} x+y \text{ нечётное число} \\ 3x-y \text{ нечётное число} \end{cases}$~~

б) По определению арккосинуса, $\arccos \frac{x}{y} \in [0; \pi]$ и $\arccos \frac{y}{x} \in [0; \pi] \Rightarrow \arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{y}{x} \leq 2\pi$, причём равенство достигается равносильно системе $\begin{cases} \arccos \frac{x}{y} = \pi \\ \arccos \frac{y}{x} = \pi \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = -1 \\ \frac{y}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -x \end{cases}, \text{ и эта пара удовлетворяет совокупности из пункта а), но (для которой не выполняется неравенство),}$$

единственная такая пара. Но ~~э~~ решениями уравнения являются также

все пары $(x; y)$, где $x=0$, а $y=2k+1, k \in \mathbb{N}$, и ни одна не совпадает с $(-1; -1)$, и все

удовлетворяют неравенству из условия. Значит, такое количество пар бесконечно.

Ответ: а) Все пары $(x; y)$ такие, что $x+y$ или $3x-y$ — нечётное число; б) бесконечное количество.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4. Пусть одноклассников n , а в конце месяца было выдано k билетов.

Пока вероятность Пете и Васе попасть на концерт в начале месяца ^{была} равна

$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^k}$ ^{← кол-во способов выдать 2 билета Пете и Васе, а остальные 2 оставшимся $n-2$ одноклассникам}, а в конце была равна $\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$ ^{← общее кол-во способов раздать билеты n одноклассникам} (читали аналогично). По условию:

$$3,5 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^k} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} \Leftrightarrow 3,5 \cdot \frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-2)!}}{\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}} \Leftrightarrow 3,5 \cdot \frac{(n-2)! \cdot 4!}{n! \cdot 2!} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{n! \cdot (k-2)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3,5 \cdot \frac{3 \cdot 4}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \Leftrightarrow \begin{matrix} 42 = k^2 - k \\ n \notin \{0, 1\} \end{matrix} \Leftrightarrow k^2 - k - 42 = 0 \Leftrightarrow (k-7)(k+6) = 0 \Leftrightarrow k \in \{7; -6\}, k \geq 4 \Rightarrow k = 7.$$

Искомое кол-во билетов равно 7.

Ответ: 7.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

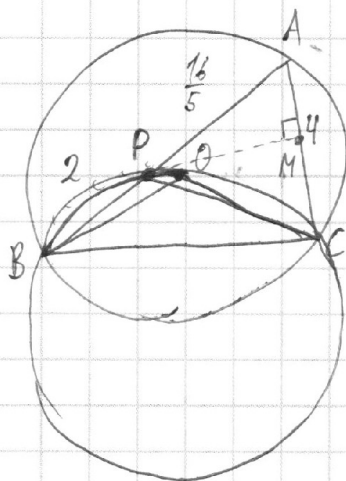
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



Поскольку $\angle BOC$ центральный в окружности (ABC) , а $\angle BAC$ вписанный, то $\angle BOC = 2\angle BAC$.

Окружность (BOC) пересекает отрезок AB в точке $P \Rightarrow P$ и O по одну сторону от $BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2\angle BAC \Rightarrow \angle ACP = \angle BPC - \angle PAC = 2\angle BAC - \angle BAC = \angle BAC = \angle PAC \Rightarrow \triangle PAC$ равнобедренный и

$PA = PC = \frac{16}{5}$. Пусть M — середина AC , тогда $\angle PMA = 90^\circ$, $AM = 2$. Искомая площадь равна:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot (AP + PB) \cdot AC \cdot \sin \angle PAM = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \angle PAM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{52}{5} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{52}{5} \cdot \sqrt{\frac{64 - 25}{64}} = \frac{52}{5} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{52}{5} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}.$$

Ответ: $\frac{13\sqrt{39}}{10}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

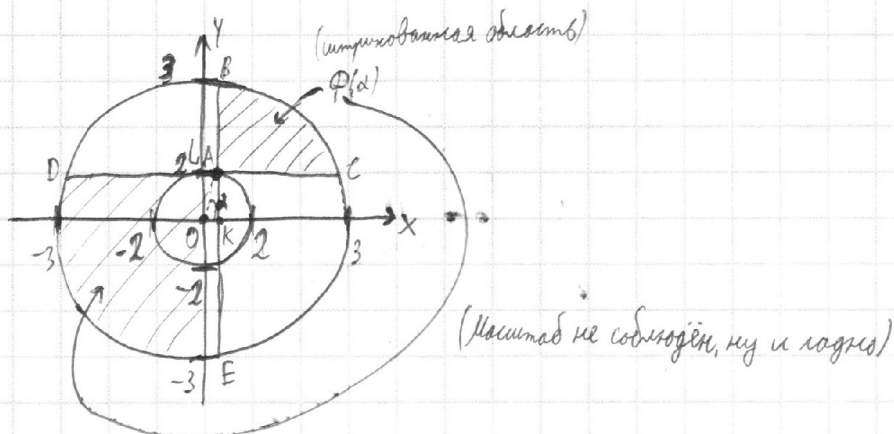
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.



Из $x^2 + y^2 \leq 9$, то x и y лежат внутри или на границе окружности с центром в O (начало координат) и радиусом 3. Нарисуем окружность с центром в O и радиусом 2. ~~Если отсчитывать угол α от оси Ox против часовой стрелки~~ Угол α задаёт точку на „маленькой“ окружности с координатами $2\cos\alpha$ и $2\sin\alpha$, пусть эта точка A . Проведём через неё прямую, параллельную Ox (пересекает большую окружность в точках C и D , C правее D) и прямую, параллельную Oy (... в точках B и E , B выше E). Нетрудно понять, что первое неравенство системы задаёт множество точек, лежащих внутри угла BAC или внутри угла DAE (или на их границе). Значит, $P(\alpha)$ состоит из криволинейных треугольников BAC и DAE (BA, CA, DA и EA — отрезки, BC и DE — дуги большой окружности). $\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow$ сумма длин дуг BC и DE (принадлежащих $P(\alpha)$) составляет половину большой окружности, т.е. $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3 = 3\pi$. Пусть BE пересекает Ox в точке K , а CD пересекает Oy в точке L . Тогда Периметр $P(\alpha)$ равен $BA + CA + \overset{\text{длина дуги } BC}{\text{длина дуги } BC} + DA + EA + \overset{\text{длина дуги } DE}{\text{длина дуги } DE} = 3\pi + (AB + AE) + (AC + AD) = 3\pi + BE + CD =$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по построению $BE \perp OX \Rightarrow BK = EK$

$$= 3\pi + (BK + EK) + (DL + CL) = 3\pi + 2BK + 2CL = 3\pi + 2\sqrt{BK \cdot EK} + 2\sqrt{CL \cdot DL} = 3\pi + 2\sqrt{3^2 - OK^2} + 2\sqrt{3^2 - OL^2} =$$

попр. выражения ≥ 0 степень к отн. степень к L ... радиус

$$= 3\pi + 2(\sqrt{9 - \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - \sin^2 \alpha}) = 3\pi + 4 \frac{\sqrt{8 + \sin^2 \alpha} + \sqrt{9 - \sin^2 \alpha}}{2} \leq 3\pi + 4 \sqrt{(8 + \sin^2 \alpha)(9 - \sin^2 \alpha)} = 3\pi + 4\sqrt{85}. \text{ Это максимальное}$$

кар-ва между средними арифметическим и квадратическим - вот то неравенство обращается в равенство

значение периметра $\Phi(\alpha)$, и оно достигается при $\sqrt{8 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{9 - \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow 8 + \sin^2 \alpha = 9 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{3\pi + 4\sqrt{85}}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

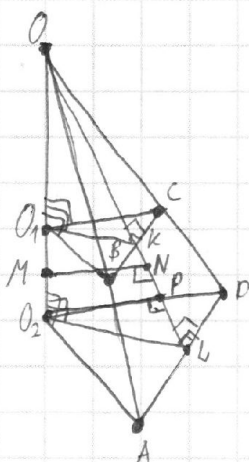
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



Рассмотрим трапецию $ABCD$. Ω касается всех её рёбер $\Rightarrow$ сечение Ω -плоскостью (ABC) (это окружность) ~~касается~~ вписана в $ABCD$. $ABCD$ -равнобокая трапеция (т.к. пирамида правильная) $\Rightarrow AB=CD$, и $AB+CD=BC+AD$. Пусть $BC=a$, $AD=b$, тогда $AB=CD=\frac{a+b}{2}$. Пусть $(AB) \cap (CD)=O$, ~~то~~ O_1 и O_2 - центры малой и большой оснований соответственно, тогда $(OO_1) \perp (O_1BC)$ и $(OO_2) \perp (O_2AD)$, $O \in (O_1O_2)$. Известно, что раз Ω касается всех рёбер, то центр ω - середина M отрезка $[O_1O_2]$. Пусть K и L - середины $[BC]$ и $[AD]$, тогда $(OK) \perp (BC)$, $(OL) \perp (AD)$, по т.т.п. $(OK) \perp (BC)$, $(OL) \perp (AD) \Rightarrow O \in (KL)$.

м.к. $BC \parallel AD$
 $\triangle OBC \sim \triangle OAD \Rightarrow \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{b}{a}$, а $|OA| - |OB| = \frac{a+b}{2} \Rightarrow |OB| = \frac{(a+b)a}{2(b-a)}$, $|OA| = \frac{(a+b)b}{2(b-a)}$, а также $|OC| = |OB|$ и $|OD| = |OA|$.

Известно, что $\omega \cap (ABC) = N$ - проекция M на $(KL) \Rightarrow |MO| = |MN| = |MN|$. Пусть $|OO_1| = x$, тогда (раз $\triangle OO_1B \sim \triangle OO_2A$)

а $\triangle OBC \sim \triangle OAD \Rightarrow \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{a}{b}$, $|OO_2| = \frac{b}{a}x$. Пусть $|O_2L| = y$, а P - проекция O_2 на (OBC) , тогда из симметрии $P \in (OL)$. $|OM| = \frac{|OO_1| + |OO_2|}{2} = \frac{b+a}{2a}x$. $\triangle OMM \sim \triangle OO_2L \Rightarrow |MN| = \frac{|OM|}{|OL|} |O_2L| = \frac{b+a}{2a}x \cdot y \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + y^2}$. $|MN| = |MO| = \frac{b-a}{2a}x \Rightarrow \frac{b-a}{2a}x = \frac{b+a}{2a}x \cdot y \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + y^2} \Leftrightarrow (b-a)y = (b+a)y \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + y^2} \Leftrightarrow y = \frac{(b-a)b}{2\sqrt{ab}}x = \frac{(b-a)\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}x$.

т.е. $\angle AOO_2 = \frac{|OO_2|}{|OA|} = \frac{\frac{b}{a}x}{\frac{(b-a)b}{2\sqrt{ab}}x} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{(b-a)\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}} = \frac{2\sqrt{a}}{(b-a)\sqrt{b}} = \frac{2\sqrt{ab}}{(b-a)\sqrt{ab}}$. Нам не дали ни a , ни b , ни x , поэтому угол при основании найти невозможно.

Ответ: невозможно однозначно найти угол.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $A = 1111k, 1 \leq k \leq 9$

$11 \cdot k \cdot 101$

новизн, т.к. Сгвозди.

$ABC = x^2 \Rightarrow B: 101$ или $C: 101$

↑
прим, одна из цифр 1 $\Rightarrow B=101$

$11 \cdot k \cdot C = x^2 \Rightarrow C=11$. $\exists$ С емб цифра 5 $\Rightarrow C=55, k=5$.

$$\begin{aligned} \sin a + \sin b &= \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \\ &= \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \\ &+ \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} = 2\sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

$A = 5555, B = 101, C = 55$.

$5555 \cdot 101 \cdot 55 = 55^2 \cdot 101^2 = 5555^2$.

$$\begin{aligned} \cos a + \cos b &= \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \\ &- \sin\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} = 2\cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

2. $x > 0, y > 0: \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x+3)(y+3)}$

$\sin^2 \pi x = \frac{1}{2}(\cos 0 - \cos 2\pi x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi x)$

$x+1 = \frac{(x-3)(y+3)+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow xy = xy - 3y + 3x - 9 \Rightarrow y = x-3$

$\sin \pi x \sin \pi y = \frac{1}{2}(\cos \pi(x-y) - \cos \pi(x+y))$

$x^3 + (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = 27$

$\cos^2 \pi x = \frac{1}{2}(\cos 0 + \cos 2\pi x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi x)$

$\cos \pi x \cos \pi y = \frac{1}{2}(\cos \pi(x-y) + \cos \pi(x+y))$

$\cos 2\pi x + \cos \pi(x+y) = 0$

3. $\sin^2 \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x \cos \pi y$

$\cos \pi \frac{3x+y}{2} \cos \pi \frac{x-y}{2} = 0$

$2 \sin \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi \frac{x+y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi x$

$\cos \pi \frac{x+y}{2} (\cos \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi x + \sin \pi \frac{x-y}{2} \sin \pi x) = 0$

$\cos \pi \frac{3x-y}{2} = 0, \pi \frac{3x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\cos \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi (x + \frac{x-y}{2}) = \cos \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi \frac{3x+y}{2} = 0$

$3x-y = 2n, n \in \mathbb{Z}$

$\pi \frac{x-y}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-y = 2n, n \in \mathbb{Z}$

$\cos \pi \frac{x+y}{2} = 0, \pi \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$3x+y = 2n, n \in \mathbb{Z}$

$x+y = 2n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{x}{y} \neq -1; \frac{y}{9} \neq -1 \Rightarrow x \neq -y, y \neq -9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Принцип индукции.

(в начале)

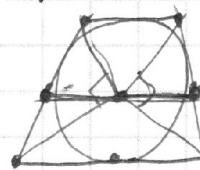
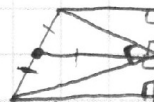
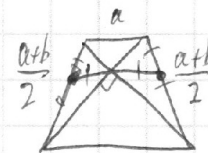
Петя и Вова попали: C_{n-2}^2 из C_n^4

Петя и Вова попали: C_{n-2}^{k-2} из C_n^k — кол-во способов

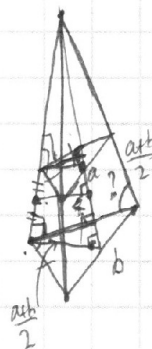
$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot 3,5 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{(n-2)!k!}{(k-2)!n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{4 \cdot 3}{n(n-1)} \Rightarrow 12 \cdot 3,5 = k(k-1) \Rightarrow k^2 - k - 42 = 0, \boxed{k=7}$$

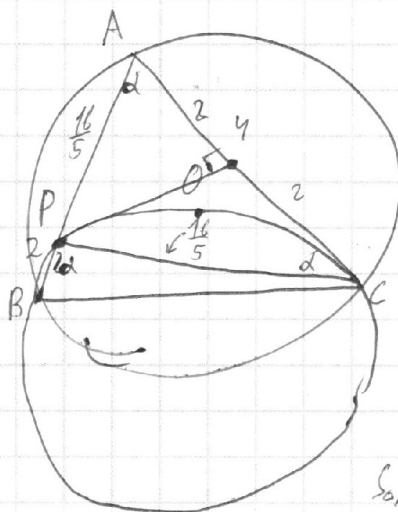
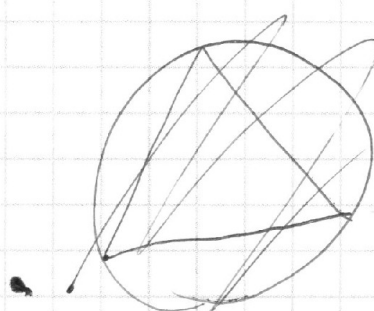
7.



???



5.



$$S_{\triangle ABC} = ?$$

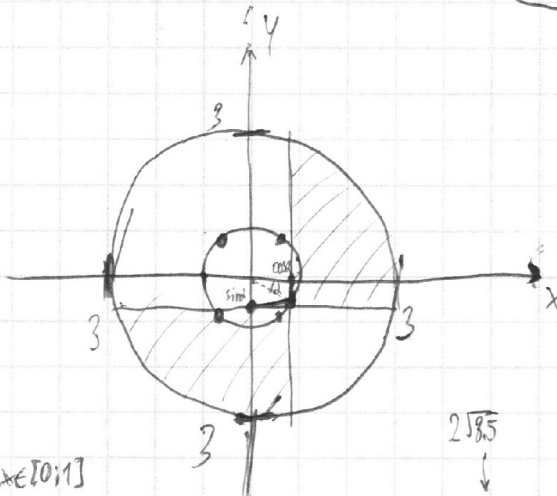
$$\cos \alpha = \frac{2}{\frac{16}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{4^2}{2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4} = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{64 - 25}}{8} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

6.



$$a^2 = 3^2 - \cos^2 \alpha$$

$$b^2 = 3^2 - \sin^2 \alpha$$

$$2ab = 2\sqrt{9 - \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{9 - \cos^2 \alpha}$$

$$P_{\max} = 4\sqrt{5} + 3\pi$$

$$L_{\min} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 3}{2} = 3\pi = \text{const}$$

$$x \in [0; 1]$$

$$\sqrt{8+x} + \sqrt{9-x} \max = ?$$

$$\sqrt{8\cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - \cos^2 \alpha} \max = ?$$

$$(\sqrt{8+x} + \sqrt{9-x})' = \frac{1}{2\sqrt{8+x}} - \frac{1}{2\sqrt{9-x}} = 0 \Leftrightarrow 8+x = 9-x \Leftrightarrow x = 0,5 = \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$$