МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$ $= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} \left(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha\right)\left(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 169. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$A = 1111a$, где $a \in \mathbb{Z}$, $a \in [1;9]$

$A \cdot B \cdot C = 1111a \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot B \cdot C$ – квадрат

$A \cdot B \cdot C$ содержит простой множитель 101, ~~значит~~ а в квадрате каждый простой множитель встречается чётное количество раз (т.е. 101 встречается в $A \cdot B \cdot C$ уже минимум 2 раза) т.к. 1 – нечётное

Но $C \not\vdots 101$ т.к. $C < 101$, $C \neq 0$ и $a \not\vdots 101$ т.к. $a < 101$, $a \neq 0$.

Значит ~~$B \not\vdots 101$~~ $B \vdots 101$. Из всех трёхзначных чисел, делящихся на 101, только 606 содержит цифру 6, значит $B = 606$.

Аналогично множит. 11 встречается уже не менее двух раз. $a < 11$ и $a \neq 0$, $B = 606 \not\vdots 11$, значит $C \vdots 11$.

Единственное двузначное число, кратное 11 и содержащее цифру 3 – 33, значит $C = 33$

Тогда $A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 606 \cdot 33 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot a$

Чтобы $A \cdot B \cdot C$ было квадратом, a должно ~~содержать простой~~ иметь множитель ~~множ~~ 2 в нечётной степени, а остальные простые множители – чётной степени. Подходят только числа 2 и 8 (если учесть условия)

Ответ: $A = 2222$; $B = 606$; $C = 33$ и $A = 8888$; $B = 606$; $C = 33$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{5}{xy}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{y+2}+\frac{5}{(x-2)(y+2)}$

Ограничения: ~~$x\neq0, y\neq0; x\neq2, y\neq-2$~~ $x>0, y>0, x\neq2$

Преобразуем: $\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}+\frac{5}{xy}=\frac{y+2}{(x-2)(y+2)}+\frac{x-2}{(x-2)(y+2)}+\frac{5}{(x-2)(y+2)}$

$$\frac{y+x+5}{xy}=\frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} \quad /\cdot xy(x-2)(y+2),$$
$$xy(x-2)(y+2)\neq0$$

$$(y+x+5)(x-2)(y+2)=(y+x+5)\cdot xy$$

$$(y+x+5)(xy-2y+2x-xy\overset{-4}{})=0$$

$$\left[\begin{array}{l} y+x+5=0 \\ \cancel{2x-2y=0}\ 2x-2y-4=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y=-x-5 \quad (а) \\ y=x-2 \quad (б) \end{array}\right.$$

(а) $y=-x-5$

~~т.к.~~ $x>0$

$-x<0$

$-x-5<-5$

$\downarrow$

$y<-5$

Но $y>0$,

значит решений нет.

(б) $y=x-2$ Подставим в выр-е из условия

$x^3-y^3-6xy=x^3-(x-2)^3-6x(x-2)=$

$=x^3-x^3-12x+6x^2+8-6x^2+12x=8$

Значит выр-е может быть равно только 8.

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

а) $(\sin\pi x + \sin\pi y)\cdot\sin\pi x = (\cos\pi x - \cos\pi y)\cdot\cos\pi x$

$\sin^2\pi x + \sin\pi y\sin\pi x = \cos^2\pi x - \cos\pi y\cos\pi x$

$\cos\pi y\cos\pi x + \sin\pi y\sin\pi x = \cos^2\pi x - \sin^2\pi x$

$\cos(\pi x - \pi y) = \cos 2\pi x$

$$\left[\begin{aligned} &\pi x - \pi y = 2\pi x + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ &\pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &y = -x - 2\cancel{\pi}n, n\in\mathbb{Z} \\ &y = 3x + 2\cancel{\pi}k, k\in\mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

Заметим, что оба ~~нерав~~ уравнения совокупности всегда будут иметь решения для некоторых n и k, если x и y имеют равный остаток от деления на 2. (т.к. если x - нечетно, то правая часть обоих уравнений эквивалентна множеству нечётных чисел, аналогично при чётном x — множеству чётных чисел), т.к. при умножении на нечётные числа (-1 и 3) и прибавлении чётных чисел ($-2n$ и $2k$) чётность ~~выражения~~ числа не изменяется)

Значит подойдут любые пары чисел вида $(2a; 2b)$ и $(2a+1; 2b+1)$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

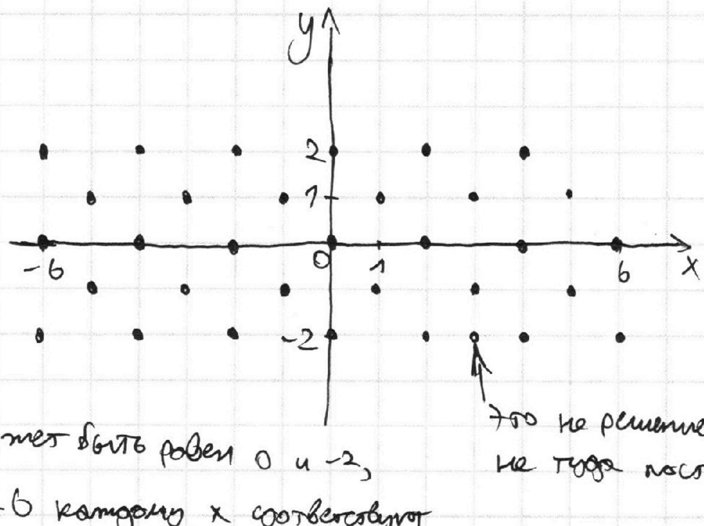
б) $\arcsin\frac{x}{6}+\arcsin\frac{y}{2}<\pi$

Заметим, что $\arcsin t \le \frac{\pi}{2}$ при любом t, а значит нер-во не выполняется только если $\frac{x}{6}=1$ и $\frac{y}{2}=1$. ~~Также~~ (для всех x, y в области определения)

Значит $\begin{cases} -1\le \frac{x}{6}\le 1 \\ -1\le \frac{y}{2}\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{x}{6}\ne 1 \\ \frac{y}{2}\ne 1 \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} -6\le x\le 6 \\ -2\le y\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x\ne 6 \\ y\ne 2 \end{array}\right. \end{cases}$

Отметим все решения на координатной плоскости



это не решение, случайно не туда поставил точку.

При $x=6$ y может быть равен 0 и -2,
При нечётных $x<6$ каждому x соответствуют 2 ~~решен~~ знач-я y $(-1$ и $1)$, а при чётных — 3 $(-2; 0; 2)$
Всего 32 решения.

~~Ответ: а) 2а числа вида~~ Ответ: а) $x=2a$, $y=2b$ и $x=2a+1$, $y=2b+1$ $(a, b\in\mathbb{Z})$
б) 32.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Пусть в классе n человек, а в конце месяца было выделено k билетов ($n>1$; $k>1$; $n, k \in Z$)

Заметим, что оба одноклассника попадут на концерт, если ~~выполнятся произойдут 2 независимых события: билеты достанутся одной из~~ $\cancel{C_n^2 = \frac{n}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}}$ первому из них достанется один из билетов ~~для второго~~ (с вероятностью $\frac{k}{n}$ в конце и $\frac{4}{n}$ в начале месяца), а второму достанется один из доставшихся билетов ($\cancel{\frac{k-1}{n-1}}$ с вероятностью $\frac{k-1}{n-1}$ в конце и $\frac{3}{n-1}$ в начале месяца). ~~Т. к. первый~~ Зная, что в конце месяца вероятность увеличилась в 6 раз, составим уравнение:

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot 6 \quad / \cdot n(n-1), \; n(n-1) \neq 0$$

$$k(k-1) = 72$$

$$k^2 - k - 72 = 0$$

$$(k-9)(k+8) = 0$$

$k_1 = 9$, уд. усл. $k_2 = -8$, не уд. усл.

Ответ: в конце месяца было выделено 9 билетов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

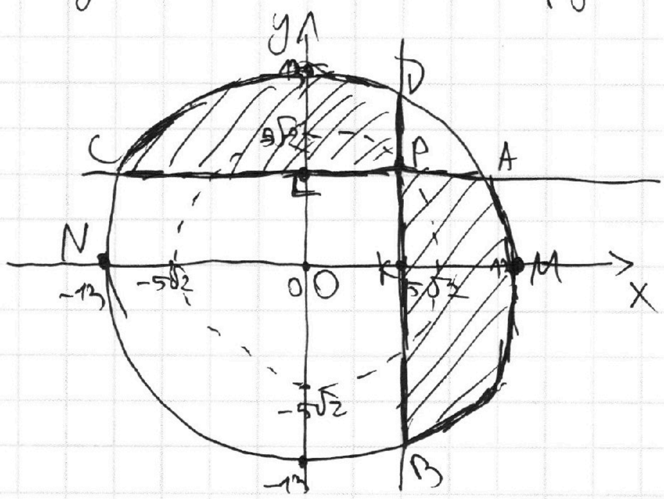
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha)\le 0 \quad (а) \\ x^2+y^2\le 169 \quad (б) \end{cases}$$

График (б) — круг с центром в начале координат и радиусом 13.

График (а) — две перпендикулярные прямые (одна к Ox, другая к Oy), которые пересекаются в точке ~~A~~ $(5\sqrt{2}\sin\alpha; 5\sqrt{2}\cos\alpha)$, а также две из четырёх частей плоскости, на которые её делят эти прямые (нижняя правая и верхняя левая). Заметим, что $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, ~~а~~ $(5\sqrt{2}\sin\alpha)^2+(5\sqrt{2}\cos\alpha)^2=(5\sqrt{2})^2$. Это значит, что точка пересечения прямых всегда лежит на окружности с центром в начале координат и радиусом $5\sqrt{2}$.



$P(5\sqrt{2}\sin\alpha; 5\sqrt{2}\cos\alpha)$

P – точка пересечения прямых)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Периметр фигуры ~~состоит из~~ равен сумме длин двух хорд (AC и BD) и двух дуг, ~~образованных~~ (AB и CD) образованных хордами (хорды и дуги расположены на окр. $(O; OA)$).

Заметим, что сумма длин дуг постоянна, т.к. сумма градусная мера этих дуг постоянна и равна ~~половине~~ ~~углов $\angle CPD$ и $\angle APB$, то есть 90°~~ (по св-ву дуг, образованных пересек. хордами внутри окр.), ~~их длина равна~~ и равна $2\angle CPD = 180^\circ$ (т.к. по св-ву хорд, пересекающихся внутри окр., $\angle CPD = \frac{\smile CD + \smile AB}{2}$), ~~а их общая длина равна~~ А сумма их длин равна $\frac{2\pi R \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \pi R = 13\pi$

Также ~~дуг~~ длина хорды BD равна (по т. Пифагора в $\triangle DOK$, и т.к. $\triangle DOK = \triangle BOK$ по катету OK и гип. OD и OB)

$2DK = 2\sqrt{OD^2 - OK^2} =$

$= 2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}$

Аналогично $AC = 2AL = 2\sqrt{OC^2 - OL^2} =$

$= 2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}$

$AC + BD \to \max$

$2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} + 2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha} \to \max$

$\left(2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} + 2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}\right)^2 \to \max$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 5.~~

$$4\left(169+169-50(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\right)+8\sqrt{169^2+2500\sin^2\alpha\cos^2\alpha-169\cdot 50(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}$$

стремится к макс.

$$4(2\cdot 169-50)+8\sqrt{169^2-169\cdot 50+2500\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\to\max$$

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha\to\max$$

$$|\sin\alpha\cos\alpha|\to\max$$

$$\left|\frac{\sin 2\alpha}{2}\right|\to\max$$

$$\sin 2\alpha=\pm 1$$

$$2\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\ \Big|\ \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z}\Big|$$

$$AC=2\sqrt{169-50\cos^2\alpha}=2\sqrt{169-50\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}=$$

$$=2\sqrt{144}=24$$

$$BD=2\sqrt{169-50\sin^2\alpha}=2\sqrt{144}=24$$

Ответ: длина $12\pi+48$, при $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

1) $A = 1111a$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \in [1;9]$

$B \in [106;996]$

$C \in [103;993]$

$$\begin{array}{r|l} 1111 & 11 \\ 101 & \end{array}$$

$1111 = 11 \cdot 101$

$1111a \cdot B \cdot C = x^2$

$B = 606$ ~~или $C=303$~~

$C = 33$

$\cancel{1111a \cdot 1}\ 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 6 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 3 = x^2$

$a = 2$ или $a = 8$

2)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$\cancel{x(x^2}\quad (x-y)(x^2+xy+y^2)$

$x \neq 0$

$y \neq 0$

$x \neq 2$

$y \neq -2$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

$(y+x+5)(x-2)(y+2) = (y+x+5)(xy)$

$(y+x+5)\big((x-2)(y+2) - xy\big) = 0$

$y + x = -5$

или

$xy - 2y + 2x - 4 - xy = 0$

$2(x-y) = 4$

$x - y = 2$

$x = y + 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(y+2)^3-y^3-6(y+2)\cdot y = \cancel{y^3+6y^2+4y+8-y^3-6y^2-12y=}$

$\cancel{= 8-4y^2-8y = 8-4y(y+2)=8-4xy}$

$x=1 \quad y=-1 \quad M=2+6$

$= y^3+6y^2+12y+8-y^3-6y^2-12y=8$

$x+y=-5$: $\qquad x=-1 \quad y=-4$

$x=-5-y$

$(-5-y)^3-y^3+6y(5+y)=-125-y^3-15y^2-75y-y^3+$

$+30y+6y^2=-125-2y^3-9y^2-45y-125$

$y=-4$: $\quad 128-144+180-125=39$

3)

$\cancel{y=-6 \quad x=1}$ $\quad y=-10 \quad x=9$

$(\sin\pi x+\sin\pi y)\sin\pi x=(\cos\pi x-\cos\pi y)\cos\pi x$ $\cancel{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{24}}$

$\sin\pi x^2+\sin\pi y\sin\pi x=\cos\pi x^2-\cos\pi y\cos\pi x$

$2000-900+450-125=1425$

$\underline{2000-900} = 1100$, 1550

$-\cos 2\pi x+\cos(\pi y-\pi x)=0$

$\cos(\pi y-\pi x)=\cos 2\pi x$

$\left[\begin{array}{l}\pi y-\pi x=2\pi x+2\pi n, n\in Z\\ \pi y-\pi x=-2\pi x+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l}3x+2n=y, n\in Z\\ -x+2k=y, k\in Z\end{array}\right.$

$\cancel{9\cdot3\cdot6=98}$

$4\cdot3\cdot6=9\cdot8$

$\frac{4}{x}\cdot\frac{3}{x-1}\cdot6=\frac{k}{x}\cdot\frac{k-1}{x-1}$ $\qquad x>1$

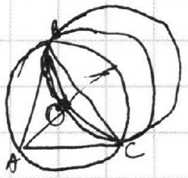
$72=k(k-1)$ $\qquad k^2-k-72=0$ $\qquad k_1=9$, $k_2=-8$

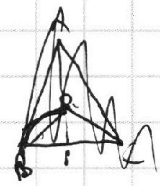
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

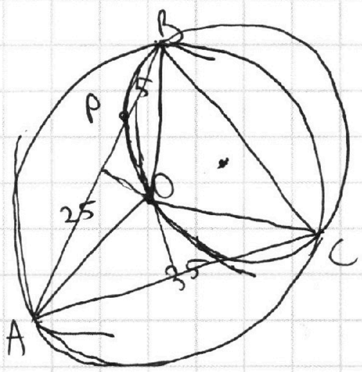


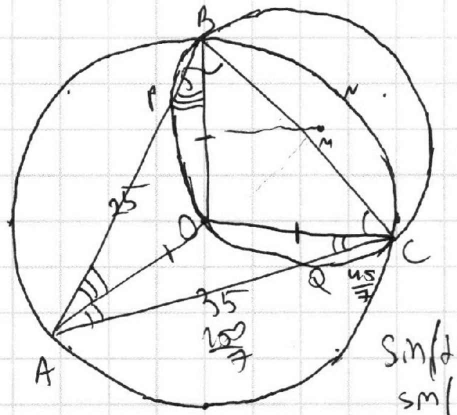


$\sin\alpha =$

$\sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta$

$r = \frac{750 - R^2}{2R}$





$\cancel{R^2 + 2rR = 750}$

$2r = \frac{750 - R^2}{R}$

$R(R+2r) = 750$

$\sin(\alpha+\gamma) = \frac{35}{2R}$

$\sin($

$\cancel{\frac{BA}{\sin(\beta+\alpha)}}$

$\cancel{\sin(\beta+\gamma)\cdot R = \sin(\beta+\gamma)}$

$\angle 1 = \alpha \quad \angle 11 = \beta \quad \angle 111 = \gamma$

$\cancel{2+3=}$

$\boxed{K = \frac{25}{35}}$

$\angle BPO = \angle CQO = 180 - \alpha$

$\beta + \gamma = 90 - \alpha$

$\alpha + \beta + \gamma = 90$

$\angle BOP = \alpha - \gamma$

$\cancel{\frac{25}{\sin(180-2\beta)} = \frac{30}{\sin(180-2\gamma)}}$

$\angle COQ = \alpha - \beta$

$\frac{5}{\sin(\alpha-\gamma)} = \frac{\cancel{245}\ 49}{\cancel{95}\ 19\sin(\alpha-\beta)}$

$\cancel{\frac{35}{\sin\beta} = \frac{30}{\sin\gamma}}$ $\quad \frac{35}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{30}{\sin(\alpha+\beta)}$

~~BMC=~~

$49\sin(\alpha-\gamma) = 95\sin(\alpha-\beta)$ $\quad BMC = 2(180 - 2\alpha) = 360 - 4\alpha =$

$= 360 - 4(90 - \beta - \gamma) =$

$25\cdot 30 = \cancel{35\cdot(AQ+QC)}$ $\ 35\,AQ$

$= 4(\beta+\gamma)$

$750 = 35AQ$ $\quad BMC + BAC = 4\beta + 4\gamma + \beta + \gamma = 5(\beta+\gamma)$

$AQ = \frac{750}{35} = \frac{150}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

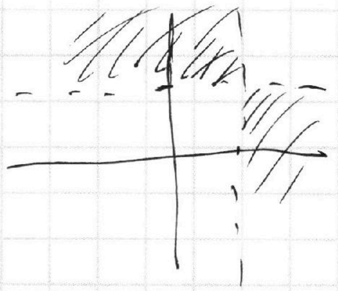
1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

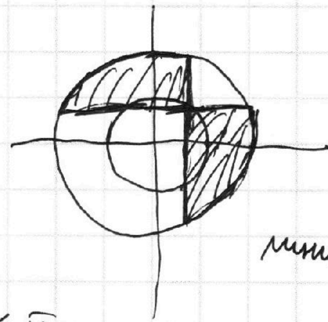
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases}49\sin(\alpha-\gamma)=95\sin(\alpha-\beta)\\ 30\sin(\alpha+\gamma)=35\sin(\alpha+\beta)\end{cases}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$49\cdot30\cdot2(\cos2\gamma-\cos2\alpha)=95\cdot35\cdot2(\cos2\beta-\cos2\alpha)$$





дуга – половина большой окружн. (всегда)

мини – $26(\cos\alpha+\sin\alpha)$

$$\arcsin\frac{x}{6}+\arcsin\frac{y}{2}<\pi$$

$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$

$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\le1$

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{x}{6}\le\frac{\pi}{2}$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\frac{y}{2}\le\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\le\frac{x}{6}\le\frac{\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{2}\le\frac{y}{2}\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}-1\le\frac{x}{6}\le1\\ -1\le\frac{y}{2}\le1\\ \left[\begin{array}{l}\frac{x}{6}<1\\ \frac{y}{2}<1\end{array}\right.\end{cases}\quad\begin{cases}-6\le x\le6\\ -2\le y\le2\\ \left[\begin{array}{l}x<6\\ y<2\end{array}\right.\end{cases}$$

$\cancel{\sin(\beta+\gamma)}\cdot R=\sin(\beta+\gamma)\left(\frac{750-R^2}{2R}\right)\cdot\frac{25}{35}$

$750-R^2=2R^2\cdot\frac{25}{35}=\frac{10}{7}R^2$

$750-\frac{17}{7}R^2=0$

$\frac{3}{7}R^2=750$

$R^2=250\cdot7$ $\quad R=5\sqrt{70}\approx41$