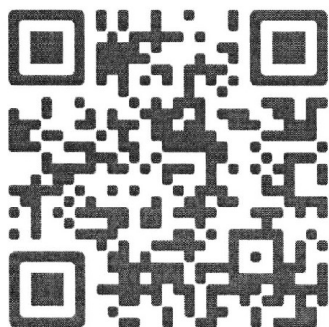




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 2, а  $y$  — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ .
- б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$A = 1111a, \text{ где } a \in \mathbb{Z}, a \in [1; 9]$$

$$A \cdot B \cdot C = 1111a \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot B \cdot C - \text{квадрат}$$

$A \cdot B \cdot C$  содержит <sup>простой</sup> множитель 101, значит  $a$  в квадрате

каждый простой множитель встречается четное количество раз (т.к. 1 - нечетное т.к. 1 - нечетное)  
раз (т.е. 101 встречается в  $A \cdot B \cdot C$  уже минимум 2 раза)

$$\text{Из } C \not\div 101 \text{ т.к. } C < 101 \text{ и } a \not\div 101 \text{ т.к. } a < 101.$$

$C \neq 0 \qquad a \neq 0$

Значит  $B \div 101$ .  $B \div 101$ . Из всех трехзначных чисел, делящихся на 101, только 606 содержит цифру 6, значит  $B = 606$ .

Аналогично можно, 11 встречается уже не менее двух раз.  $a < 101$  и  $a \neq 0$ ,  $B = 606 \div 11$ , значит  $C \div 11$ .

Единственное двузначное число, кратное 11 и содержащее цифру 3 - 33, значит  $C = 33$ .

$$\text{Тогда } A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 606 \cdot 33 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot a$$

Чтобы  $A \cdot B \cdot C$  было квадратом,  $a$  должно <sup>иметь множитель</sup> содержать ~~простой~~ множитель 2 в нечетной степени, а остальные простые множители - четной степени. Подходит только число 2 (если учесть условия)

Ответ:  $A = 2222$ ;  $B = 606$ ;  $C = 33$  и  $A = 8888$ ;  $B = 606$ ;  $C = 33$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

По условию  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$

Ограничения:  ~~$x \neq 0, y \neq 0, x \neq 2, y \neq -2$~~   $x > 0, y > 0, x \neq 2$

Преобразуем:  $\frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} + \frac{5}{xy} = \frac{y+2}{(x-2)(y+2)} + \frac{x-2}{(x-2)(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} \quad / \cdot xy(x-2)(y+2),$$

$$xy(x-2)(y+2) \neq 0$$

$$(y+x+5)(x-2)(y+2) = (y+x+5) \cdot xy$$

$$(y+x+5)(xy - 2y + 2x - xy) = 0$$

$$\begin{cases} y+x+5=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow 2x-2y-4=0$$

$$\begin{cases} y = -x-5 & \textcircled{a} \\ y = x-2 & \textcircled{b} \end{cases}$$

$\textcircled{a} \quad y = -x-5$

~~$x > 0$~~

~~$-x < 0$~~

~~$-x-5 < -5$~~



$y < -5$

Но  $y > 0$ ,

значит решений нет.

$\textcircled{b} \quad y = x-2$  Подставим в выра из условия

$$x^3 - y^3 - 6xy = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2)$$

$$= x^3 - x^3 - 12x + 6x^2 + 8 - 6x^2 + 12x = 8$$

Значит выражение может быть равно только 8.

Ответ: 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi x - \pi y) = \cos 2\pi x$$

$$\pi x - \pi y = 2\pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = -x - 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3x + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Заметим, что оба ~~нерав~~ уравнения совокупности всегда будут иметь решения для некоторых  $n$  и  $k$ , если  $x$  и  $y$  имеют равный остаток от деления на 2. (т.к. если  $x$  — нечетно, то правая часть обоих уравнений эквивалентна множеству нечетных чисел, а левая при четном  $x$  — множеству четных чисел, т.к. при умножении на нечетные числа  $(-1$  и  $3)$  и прибавлении четных чисел  $(-2n$  и  $2k)$  четность <sup>числа</sup> выражения не изменяется)

Значит подойдут любые пары чисел вида  $(2a; 2b)$

и  $(2a+1; 2b+1)$ , где  $a, b \in \mathbb{Z}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

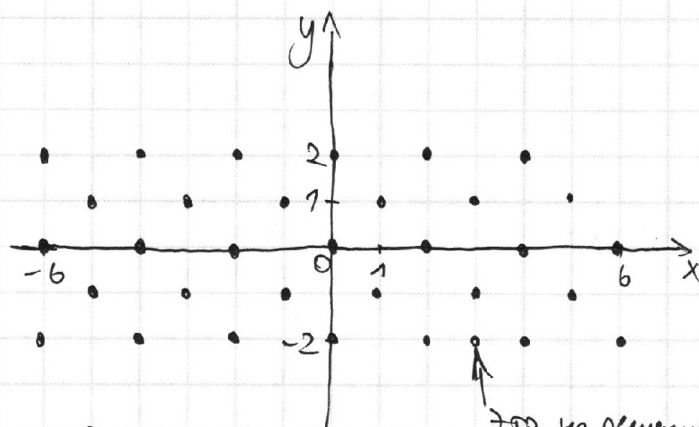
б)  $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$

Заметим, что  $\arcsin t \leq \frac{\pi}{2}$  при любом  $t$ , а значит нерав-во не выполняется только если  $\frac{x}{6} = 1$  и  $\frac{y}{2} = 1$ . То есть (для всех  $x, y$  в области определения)

Значит 
$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \\ \frac{x}{6} \neq 1 \\ \frac{y}{2} \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \\ x \neq 6 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

Отметим все решения на координатной плоскости



При  $x = 6$   $y$  может быть равен 0 и -2,  
При целых  $x < 6$  каждому  $x$  соответствуют  
2 решения  $y$  (тогда  $y = -1$  и  $1$ ), а при четных  $-2$  ( $-2; 0; 2$ )  
Всего 32 решения.

это не решение, считай  
не туда поставил точку.

Ответ: б) ~~22~~ ~~интервал~~  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ответ: а) } x=2a, y=2b \text{ и } x=2a+1, y=2b+1 \\ (a, b \in \mathbb{Z}) \\ \text{б) } 32. \end{array} \right.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 4.

Пусть в классе  $n$  человек, а в конце месяца было выделено  $k$  билетов ( $n > 1$ ;  $k > 4$ ;  $n, k \in \mathbb{Z}$ )

Заметим, что оба одноклассника попадут на концерт, если ~~выпадут произвольные 2 независимых события: билеты достанутся одной из~~  ~~$\frac{2}{n} = \frac{n}{2(n-1)}$~~   ~~$\frac{n(n-1)}{2}$~~  ~~первои~~ из них достанется один из билетов, ~~а второй~~ (с вероятностью  $\frac{k}{n}$  в конце и  $\frac{4}{n}$  в начале месяца), а второму достанется один из оставшихся билетов ( ~~$\frac{k-1}{n-1}$~~  с вероятностью  $\frac{k-1}{n-1}$  в конце и  $\frac{3}{n-1}$  в начале месяца). Т.к. ~~первый~~ знав, что в конце месяца вероятность увеличилась в 6 раз, составим уравнение:

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot 6 \quad / \cdot n(n-1), n(n-1) \neq 0$$

$$k(k-1) = 72$$

$$k^2 - k - 72 = 0$$

$$(k-9)(k+8) = 0$$

$$k_1 = 9, \quad k_2 = -8, \text{ по } \text{ог. усл.}$$

Ответ: в конце месяца было выделено 9 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА  
1 из 3

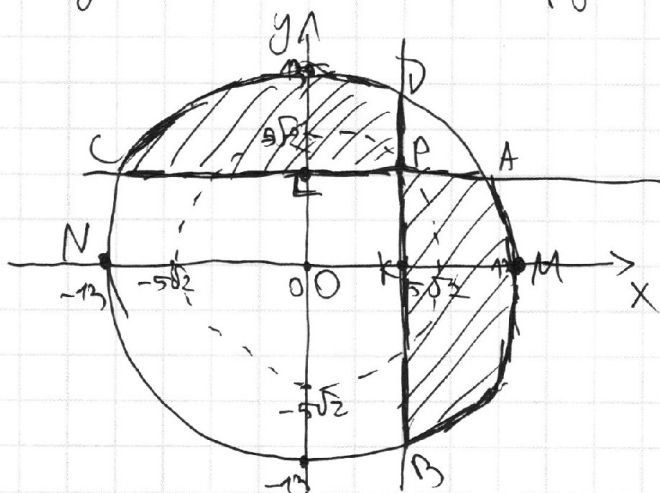
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 & (a) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (b) \end{cases}$$

График (b) — круг с центром в начале координат и радиусом 13.

График (a) — две перпендикулярные прямые (одна к  $Ox$ , другая к  $Oy$ ), которые пересекаются в точке  $A(5\sqrt{2}\sin\alpha; 5\sqrt{2}\cos\alpha)$ , а также две из четырёх частей плоскости, на которые её делят эти прямые (нижняя правая и верхняя левая). Заметим, что  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ , а  $(5\sqrt{2}\sin\alpha)^2 + (5\sqrt{2}\cos\alpha)^2 = (5\sqrt{2})^2$ . Это означает, что точка пересечения прямых всегда лежит на окружности с центром в начале координат и радиусом  $5\sqrt{2}$ .



$$P(5\sqrt{2}\sin\alpha; 5\sqrt{2}\cos\alpha)$$

P — точка пересечения  
прямых



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☒7  
☐СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Периметр фигуры <sup>равен сумме длин (AC и BD)</sup> состоит ~~из~~ двух хорд и двух дуг, образованных (AB и CD) образующих хордами (хорды и дуги расположены на окр.  $(O; OA)$ ).

Заметим, что сумма длин дуг постоянна, т.к. <sup>сумма</sup> радиусная мера этих дуг постоянна и равна ~~радиусу~~ ~~углам~~  $\angle CPD$  и  $\angle APB$ , то есть  $90^\circ$  (по св-ву дуг, образованных ~~внутренним~~ ~~пересек.~~ хордами внутри окр.), их ~~длина~~ ~~равна~~ и равно  $2 \angle CPD = 180^\circ$  (т.к. по св-ву хорд, пересекающихся внутри окр.,  $\angle CPD = \frac{CD + AB}{2}$ ), ~~и их длина~~ ~~равна~~ А сумма их длин равна  $\frac{2\pi R - 180^\circ}{360^\circ} = \pi R = 13\pi$

Также ~~длина~~ ~~длина~~ хорды BD равна (по т. Пифагора  $\triangle DOK$ , и т.к.  $\triangle DOK = \triangle BOK$  по катету OK и гип. OD и OB)

$$2DK = 2\sqrt{OD^2 - OK^2} =$$

$$= 2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$\text{Аналогично } AC = 2AL = 2\sqrt{OC^2 - OL^2} =$$

$$= 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$AC + BD \rightarrow \max$$

$$2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} \rightarrow \max$$

$$\left(2\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}\right)^2 \rightarrow \max$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА

3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 5.~~

$$4(169 + 169 - 50(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)) + 8\sqrt{169^2 + 2500\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 169 \cdot 50(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

стремится к макс.

$$4(2 \cdot 169 - 50) + 8\sqrt{169^2 - 169 \cdot 50 + 2500\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \rightarrow \max$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \rightarrow \max$$

$$|\sin \alpha \cos \alpha| \rightarrow \max$$

$$\left| \frac{\sin 2\alpha}{2} \right| \rightarrow \max$$

$$\sin 2\alpha = \pm 1$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \left| \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z} \right|$$

$$AC = 2\sqrt{169 - 50\cos^2 \alpha} = 2\sqrt{169 - 50\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{144} = 24$$

$$BD = 2\sqrt{169 - 50\sin^2 \alpha} = 2\sqrt{144} = 24$$

Ответ: длина  $12\pi$  чм, при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  
☐2  
☐3  
☐4  
☐5  
☐6  
☐7  
☐СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$1) A = 1111a, a \in \mathbb{Z}, a \in [1, 9]$$

$$b \in [106; 996]$$

$$c \in [103; 993]$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ 101 \end{array}$$

Черновик

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$1111a \cdot b \cdot c = x^2$$

$$b = 606 \text{ или } c = 303$$

$$c = 33$$

$$1111a \cdot 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 6 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 3 = x^2$$

$$a = 2 \text{ или } a = 8$$

2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x(x-2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$\begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x \neq 2 \\ y \neq -2 \end{array}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$(y+x+5)(x-2)(y+2) = (y+x+5)(xy)$$

$$(y+x+5)((x-2)(y+2) - xy) = 0$$

$$y+x = -5$$

или

$$xy - 2y + 2x - 4 - xy = 0$$

$$2(x-y) = 4$$

$$x-y = 2$$

$$x = y+2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(y+2)^3 - y^3 - 6(y+2) \cdot y = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$$

$$= 8 - 4y^2 - 8y = 0 - 4y(y+2) = 0 - 4 \cdot y$$

$x=1 \quad y=-1 \quad M=2+6$

$$= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8$$

$$x+y = -5: \quad x = -1 \quad y = -4$$

$$x = -5 - y$$

$$(-5-y)^3 - y^3 + 6y(5+y) = -125 - y^3 - 15y^2 - 75y - y^3 + 30y + 6y^2 = -125 - 2y^3 - 9y^2 - 45y - 125$$

$$+ 30y + 6y^2 = -125 - 2y^3 - 9y^2 - 45y - 125$$

$$y = -4: \quad 126 - 144 + 160 - 125 = 39$$

3)  $y = -6 \quad x = 1 \quad y = -10 \quad x = 9$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin \pi x^2 + \sin \pi y \sin \pi x = \cos \pi x^2 - \cos \pi y \cos \pi x \quad 2000 - 900 + 450 - 125 = 1425$$

$$-\cos 2\pi x + \cos(\pi y - \pi x) = 0$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos 2\pi x$$

$$\pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\pi y - \pi x = -2\pi x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x + 2m = y, m \in \mathbb{Z}$$

$$-x + 2k = y, k \in \mathbb{Z}$$

$$9 \cdot 3 \cdot 6 = 27 \cdot 6$$

$$4 \cdot 3 \cdot 6 = 9 \cdot 6$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \cdot 6 = \frac{4k}{x} \cdot \frac{k-1}{x-1}$$

$$x > 1$$

$$72 = k(k-1)$$

$$k^2 - k - 72 \geq 0$$

$$k_1 = 9$$

$$k_2 = -8$$

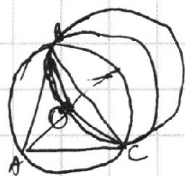


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

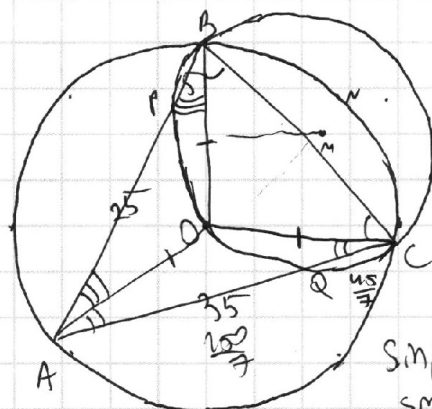
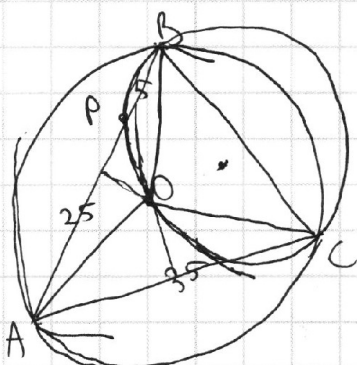
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin 2 =$$

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta$$

$$r = \frac{750 - R^2}{2R}$$



$$R + 2r = 750$$

$$2r = \frac{750 - R^2}{R}$$

$$R(R + 2r) = 750$$

$$\sin(\alpha + \gamma) = \frac{35}{2R}$$

$$\sin(\alpha + \gamma) = \frac{35}{2R}$$

$$\sin(\alpha + \gamma) = \frac{35}{2R}$$

$$\sin(\alpha + \gamma) = \frac{35}{2R}$$

$$\angle BPO = \angle CQO = 180 - 2$$

$$\angle BOP = 2 - \gamma$$

$$\angle CQO = 2 - \beta$$

$$\frac{5}{\sin(2 - \gamma)} = \frac{245 \cdot 19}{95 \sin(2 - \beta)}$$

$$\sin(2 - \gamma) = \frac{245 \cdot 19}{95 \sin(2 - \beta)}$$

$$19 \sin(2 - \gamma) = 95 \sin(2 - \beta) \quad BM C = 2(180 - 2\alpha) = 360 - 4\alpha =$$

$$25 - 30 = 25 \cdot \frac{35}{19} (19 + 19)$$

$$750 = 35AQ$$

$$AQ = \frac{750}{35} = \frac{150}{7}$$

$$\alpha = 2 \quad \beta = 3 \quad \gamma = 8$$

$$2 + 3 =$$

$$\beta + \gamma = 90 - \alpha$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 90$$

$$\sin(180 - 2\beta) = \sin(180 - 2\gamma)$$

$$\frac{35}{\sin \beta} = \frac{30}{\sin \gamma} \quad \frac{35}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{30}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$= 360 - 4(90 - \beta - \gamma) =$$

$$= 4(\beta + \gamma)$$

$$BM C + BAC = 4\beta + 4\gamma + \beta + \gamma = 5(\beta + \gamma)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7  
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА  
 \_ ИЗ \_

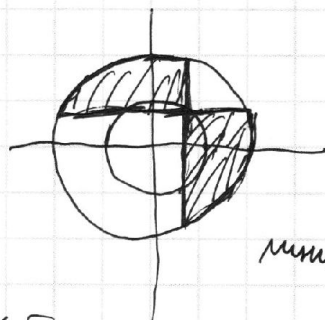
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Решение

$$\begin{cases} 49 \sin(\alpha - \gamma) = 95 \sin(\alpha - \beta) \\ 30 \sin(\alpha + \gamma) = 35 \sin(\alpha + \beta) \end{cases}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$49 \cdot 30 \cdot 2 (\cos 2\gamma - \cos 2\alpha) = 95 \cdot 35 \cdot 2 (\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$$



гипотенуза  
 с катетами  
 окружн.  
 (всегда)

$$\sin \alpha - 2\beta (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha \geq \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \leq 1$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{6} < \frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{y}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{6} \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$\sin(\beta + \gamma) \cdot R = \sin(\beta + \gamma) \left( \frac{750 - R^2}{2R} \right) \cdot \frac{25}{35}$$

$$750 - R^2 = 2R^2 \cdot \frac{25}{35} \Rightarrow \frac{10}{7} R^2$$

$$750 - \frac{17}{7} R^2 = 0$$

$$\frac{17}{7} R^2 = 750$$

$$R^2 \geq 250 \cdot 7$$

$$R = 5\sqrt{70} \approx 41$$