



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -2z + z^2, \\ yz = -2x + x^2, \\ zx = -2y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

✓ 2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 30 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 8$, $BE = 6$.

✓ 4. [4 балла] В телегре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть семь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0$ являются четвертым и девятым членами этой прогрессии.

✓ 6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют равенству $|x - 10 + \frac{y}{2\sqrt{3}}| + |x - 10 - \frac{y}{2\sqrt{3}}| \leq 4$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π по часовой стрелке. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

✓ 7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle BCA = 50^\circ$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Ну это } a = x-2, b = y-2, c = z-2$$

\Rightarrow Найдем систему

$$\begin{cases} (a+2)(b+2) = \cancel{(c+2)}(c+2-2) = c(c+2) & ① \\ (b+2)(c+2) = \cancel{a}(a+2) & ② \\ (c+2)(a+2) = b(b+2) & ③ \end{cases}$$

$$① \cdot ② \cdot ③ \Rightarrow (a+2)^2(b+2)^2(c+2)^2 = abc(a+2)(b+2)(c+2)$$

никто не равен -2 , т.к. ~~тогда~~ ~~его~~ ~~предок~~ из x, y, z должна быть равна $нулю$.

$$\Rightarrow abc = (a+2)(b+2)(c+2)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ?$$

$$① \cdot ② \Rightarrow (a+2)(b+2)^2(c+2) = ac(a+2)(c+2)$$

$$(b+2)^2 = ac$$

$$\left. \begin{array}{l} (a+2)^2 = bc \\ (c+2)^2 = ab \end{array} \right\} \text{аналогично.}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a^2 + 4a + 4) +$$

$$+ (b^2 + 4b + 4) + (c^2 + 4c + 4) - 4((a+b+c) + 1) = \\ = ac + bc + ab - 4(a+b+c) - 4$$

Олег М

Олег М



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

из условия: $n+1 = 10^{30001}$

$$\Rightarrow n^3 = (10^{30001} - 1)^3 = 10^{3 \cdot 30001} + 3 \cdot 10^{2 \cdot 30001} + \\ + 3 \cdot 10^{2 \cdot 30001} - 1 = 10^{30001} \cdot (10^3 - 1) + 3 \cdot 10^{30001} - 1$$

Число n^3 выглядит так:

99...97 000...02 99...9
30 000 цифр. много
 но т.к.
 это не
 9-ки, то
 не важно
 сколько.

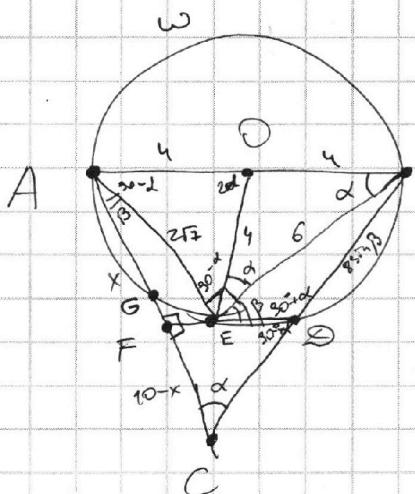
Итого; Ответ: 60 001 девятка

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$1) O - \text{центр } \omega \\ \Rightarrow AO = OB = \frac{R}{2} = 4 \\ 2) \text{последовательность } AF = x \Rightarrow FC = AC - AF = 10 - x$$

$$3) \text{последовательность } \angle C = \alpha \\ \Rightarrow \angle FEC = 90^\circ - \alpha \\ \angle FDB = 90^\circ + \alpha = \frac{\angle ABE}{2} + \frac{\angle AFE}{2} = 90^\circ + \angle ABE \\ \Rightarrow \boxed{\angle ABE = \alpha}$$

$$4) \text{последовательность } \angle AEB = \beta \\ 6^2 + (2\sqrt{7})^2 = 36 + 28 = 64 = 8^2 \\ \Rightarrow AE = 2\sqrt{7}$$

$$5) \text{последовательность } \angle EAC = \gamma \\ \Rightarrow \angle AEF = 90^\circ - \gamma \\ \angle BED = 180^\circ - \angle AEB - \angle AEF = \cancel{180^\circ - \angle AEB} - \cancel{\angle AEF} = \cancel{180^\circ}$$

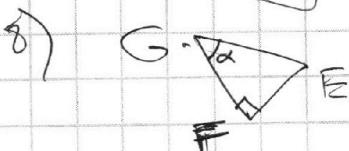
$$6) \text{Th. Sin } \triangle EBD \\ \frac{BD}{\sin \beta} = 2R = \cancel{8} \\ \Rightarrow \boxed{BD = 8 \sin \beta}$$

7) Рассмотрим G - пересечение ω с AC .

известно что

$$\angle AGE = 180^\circ - \frac{\angle ABE}{2} = 180^\circ - (\cancel{180^\circ - \alpha}) = 180^\circ - \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\angle EGF = \alpha}$$



$$FE = x \operatorname{tg} \beta \text{ из } \triangle AEF$$

$$\Rightarrow GF = \frac{x \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{x \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$9) \cancel{AG = AF - GF = x - \left\{ \frac{3x + 10}{\sqrt{7}} \right\} - x \cdot \frac{\sqrt{7} - 3\sin\beta}{\sqrt{7}}} \quad \left. \begin{array}{l} \cancel{AG = AF - GF = x - \left\{ \frac{3x + 10}{\sqrt{7}} \right\} - x \cdot \frac{\sqrt{7} - 3\sin\beta}{\sqrt{7}}} \\ \cancel{GC = CF + GF = 10 - x + \frac{3x + 10}{\sqrt{7}} = 10 - x \cdot \frac{\sqrt{7} - 3\sin\beta}{\sqrt{7}}} \end{array} \right\}$$

$$10) \cancel{\text{Составим } CP = \frac{(10-x)}{\cos\alpha} = \frac{4(10-x)}{3}}$$

11) Составим torque C отн. ω :

$$\cancel{GC \cdot AC = CP \cdot BC}$$

$$\left(10 - x \frac{\sqrt{7} - 3\sin\beta}{\sqrt{7}}\right) \cdot 10 = \frac{4(10-x)}{3} \cdot \left(8\sin\beta + \frac{4}{3}(10-x)\right)$$

~~100/100~~

Ответ: $AF = 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в игре было x карточек.

Тогда вероятность, что 3 масти будут все 6 5-ти выбранных:

$$\cancel{\frac{5}{x} \cdot \frac{4}{x-1} \cdot \frac{3}{x-2}} =$$

$$P(1\text{-я масти среди } 5 \text{ из } x) \cdot P(2\text{-я масти среди } 4 \text{ из } (x-1)) \cdot P(3\text{-я масти среди } 3 \text{ из } (x-2)) = \cancel{\frac{60}{x(x-1)(x-2)}} =$$

$$= \frac{5}{x} \cdot \frac{4}{x-1} \cdot \frac{3}{x-2} = \frac{60}{x(x-1)(x-2)} = P_1$$

Аналогично для семи:

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{x(x-1)(x-2)} = P_2 = \frac{210}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{210}{60} = \frac{7}{2}$$

Ответ: вероятность увеличилась в $\frac{7}{2}$ раз.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

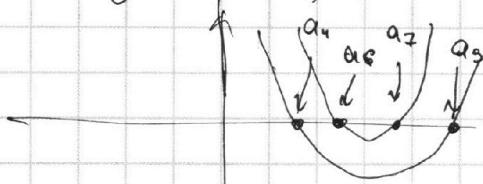
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a - 7 = 0 = x^2 - a(a-2)x + a^2 - a - 7$$

$$\textcircled{2} \quad 3x^2 - (a^3 - 2a^2)x + 6 - a^5 = 0 \quad \cancel{4x^3} \cancel{a^2(a-2)} \cancel{2x^2} \cancel{a^5}$$

$$\textcircled{3} \quad a^3(a^3 + a + 1) + 4(a^2 - a - 7) =$$



Нужно найти А.Р. $\rightarrow \{a_n\}$

$$\frac{a_6 + a_7}{2} = \frac{a_4 + a_5}{2}$$

$$\text{т.к. } a_6 - a_4 = a_9 - a_7 = 2(a_2 - a_1)$$

$y \rightarrow$ ~~разные~~ абсциссы вершин совпадают
поэтому

$$\frac{a(a-2)}{2} = \frac{a^2(a-2)}{3 \cdot 2}$$

$$\text{если } a=0 : \textcircled{1} \quad x^2 - 7 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 3x^2 + 6 = 0 \quad \text{корней вообще нет.}$$

$$\rightarrow a \neq 0$$

$$3(a-2) = a(a-2)$$

$$(a-3)(a-2) = 0$$

$$\rightarrow a(a-2) \neq a^2(a-2)$$

$$(a-2)(a-1) = 0$$

$$\rightarrow a = 1$$

$$\therefore \textcircled{1} \quad x^2 - 1(1-2)x + 1^2 - 1 - 7 = x^2 + x - 7 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 3x^2 - 1^2(1-2)x + 6 - 1 = 3x^2 + x + 5 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 5 < 0$$

$\rightarrow a = 1$ ~~точка не~~ не подходит.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \alpha = 2; \quad ① x^2 - 2 \cdot (2-2)x + 2^2 - 2 \cdot 7 = x^2 - 9 = 0 = (x-3)(x+3) = 0$$

$$② 3x^2 - 2^2(2-2)x + 6 - 2^5 = 3x^2 - 26 = 0 = (x - \sqrt{\frac{26}{3}})(x + \sqrt{\frac{26}{3}})$$

\Rightarrow 6 и 7 гласят \rightarrow 3 и -3 (6 каким-то образом) \rightarrow Разница Г.П. - это $\pm 6 \in \mathbb{Z}$. Так же, например, $\alpha_6 \in \mathbb{Z}$ (это ± 3) $\rightarrow \alpha_4$ и $\alpha_9 \in \mathbb{Z}$, но это не так, ведь они равны $\pm \sqrt{\frac{2+13}{3}}$

~~Хорошо~~

~~Хорошо~~

~~Хорошо~~

$$2) \alpha = 3$$

$$① x^2 - 3 \cdot (3-2)x + 9 - 3 - 7 = x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\beta = 27 \cdot 9 = 270 - 27 = 243$$

а

$$② 3x^2 - 3^2(3-2)x + 6 - 3^5 = 3x^2 - 9x - 237 = 0$$

$$\frac{-23 \cdot 7 \sqrt{13}}{27}$$

$$x_{3,4}^2 - 9x - 237 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{3 \pm 5\sqrt{13}}{2}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 9 + 4 \cdot 79 = \\ &= 9 + 320 - 4 = \\ &= 325 = (5\sqrt{13})^2 \end{aligned}$$

\Rightarrow Разница

$$A.P. - \frac{2}{\sqrt{13}}(\alpha_3 x_{1,2})$$

$$\Rightarrow \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \pm 2\sqrt{3} = \frac{3 \pm 5\sqrt{13}}{2} = x_{3,4}$$

$\Rightarrow \alpha = 3$ - некое

$$\begin{aligned} &\frac{325}{25} \cdot \frac{13}{13} \\ &\frac{25}{25} \\ &\frac{13}{13} \\ &\frac{1}{1} \end{aligned}$$

~~Хорошо~~ $\alpha = 3$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Сначала найдём, как выглядит фигура!
Для этого сдвинем её на 10 единиц в
левую сторону плоскости. ~~При~~ Её центр
становится следующим:

$$\left| x + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| \leq 4$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $|x| \geq \left| \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| :$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| = |x| \pm \cancel{\left| \frac{y}{2\sqrt{3}} \right|} + |x| \mp \cancel{\left| \frac{y}{2\sqrt{3}} \right|} = \\ = 2|x| \leq 4 \Leftrightarrow \boxed{|x| \leq 2}$$

2) $|x| \leq \left| \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| :$

$$\left| \frac{y}{2\sqrt{3}} + x \right| + \left| \frac{y}{2\sqrt{3}} - x \right| = 2 \left| \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} |y| \leq 4$$

аналогично

$$\boxed{|y| \leq 4\sqrt{3}}$$

Найдём геометрическое существо, когда

$$|x| = \left| \frac{y}{2\sqrt{3}} \right| \leftarrow \text{Это мн-во симметрично } \not\perp \text{ отн.}$$

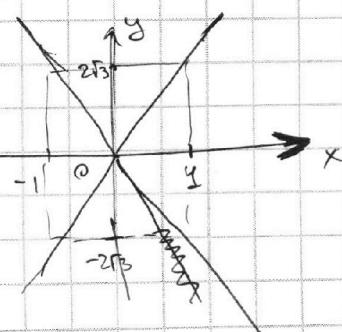
O_x & O_y . \Rightarrow Найдём его в I четверти, а

3) другие построим симметрией:

$$x = \frac{y}{2\sqrt{3}} \quad \boxed{y = 2\sqrt{3}x}$$

$$\Rightarrow |x| = \left| \frac{y}{2\sqrt{3}} \right|$$

"это "крестик"





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

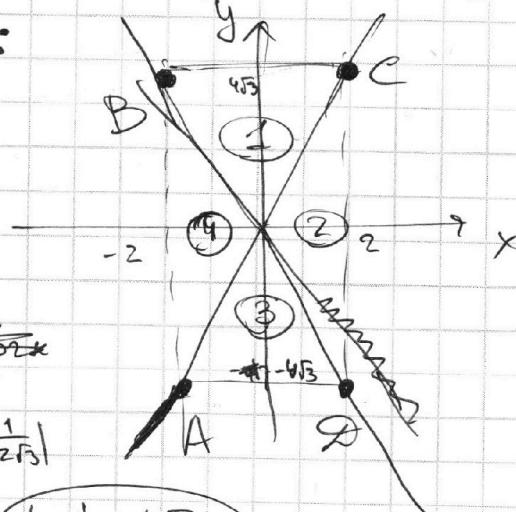
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Добавить ~~некоторые~~ граничные линии $|x| \leq 2$ и $|y| \leq 4\sqrt{3}$:

$$2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$



Область ①:

представим ~~как~~
изображено тут:

$$(0; 1) : |0| \leq \left| \frac{1}{2\sqrt{3}} \right|$$

$$\Rightarrow \text{тут } |y| \leq 4\sqrt{3}$$

В области ③ аналогично: $|0| \leq \left| \frac{1}{2\sqrt{3}} \right| \Rightarrow |y| \leq 4\sqrt{3}$

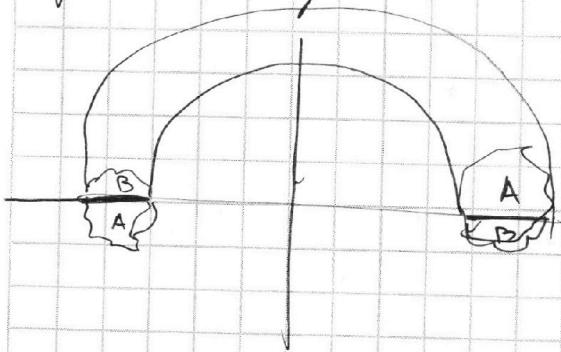
Области ② и ④: $(\pm 2; 0) \quad |\pm 2| \geq |0| \Rightarrow |x| \leq 2$

Значит, наша фигура — правильный четырёхугольник

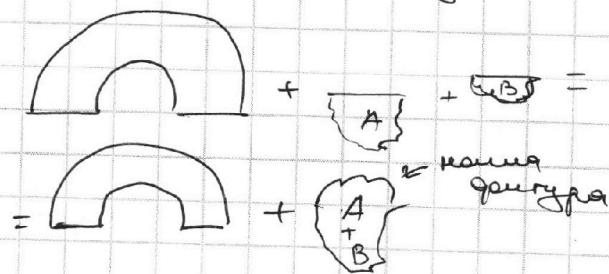
~~4*sqrt(3)*2~~ $8\sqrt{3} \times \frac{4}{2} = 16\sqrt{3}$. Вернём его обратно

на то буржо.

Рассмотрим произвольную коническую оправку на которую приложу, ~~которая~~ которая достаточно маленькая, ~~так что~~ не ~~может~~ находиться снизу спереди поверхности на π (т.е. не содержит $(0;0)$):



Искомая поверхность:





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

площадь "подковы": $\frac{\pi(R^2 - r^2)}{2}$, где R и r —
расстояние от начала координат до точки,
наименее удалённой и имеющей сорт.

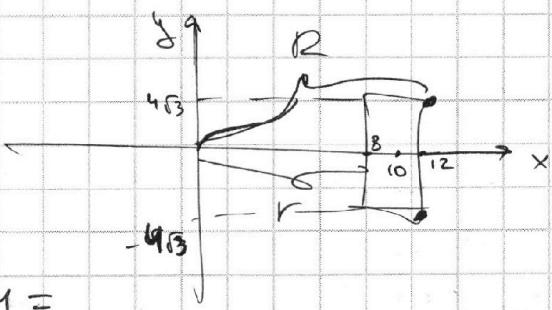
$$\Rightarrow r^2 = (10 - 2)^2 = 64$$

$$R^2 = (10+2)^2 + (4\sqrt{3})^2 =$$

$$= 144 + 48 = 192$$

$$\Rightarrow S = \frac{\pi(192 - 64)}{2} + 8\sqrt{3} \cdot 4 =$$

$$= \cancel{8\pi} \cancel{8\sqrt{3}} \boxed{32(2\pi + \sqrt{3})}$$



Очевидно, $S = 32(2\pi + \sqrt{3})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1) $\angle DBC = \alpha - ?$

$\begin{cases} QP = a \\ QP = b \\ CP = c \end{cases} \Rightarrow AB = a + b, BP = a + b, AC = QC = b + c$

2) $\angle PDQ = 90^\circ \text{ и } \angle DP = \angle DQ$

$\Rightarrow \angle PQD = \angle QPD = 45^\circ$

3) ~~AC = CQ~~ $\Rightarrow \angle CQA = \angle CAQ = \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$

4) $\angle DQA = \angle CQA - \angle CDQ = 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ$

5) $\angle CBA = 90^\circ - \angle C = 40^\circ$

6) $\angle QAB + \angle QBA = \angle CQA \Rightarrow 40^\circ + \angle QAB = 65^\circ \Rightarrow \angle QAB = 25^\circ$

7) ~~AB = BP~~ $\Rightarrow \angle BPA = \angle BAP = \frac{180^\circ - \angle PBA}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$

8) $\angle DPA = \angle BPA - \angle BPD = 70^\circ - 45^\circ = 25^\circ$

9) $\angle PAQ = 70^\circ - 25^\circ = 45^\circ$
 $\angle PAC = 90^\circ - (25^\circ + 45^\circ) = 20^\circ$

10) Опустим DH из D на PQ . т.к. $QP \perp$ прямог. равноб. треуг. то $DH = \frac{QP}{2} = \frac{b}{2}$

11) $\tan \angle DBC = \tan \alpha = \frac{DH}{BH} = \frac{\frac{b}{2}}{a+b/2} = \sqrt{\frac{b}{2a+b}}$ ($DH = \frac{b}{2}$ т.к. высотой = медианой в р/д. треуг.)

12) Нужно $\tan \alpha = x$
 $\Rightarrow 2ax + bx = b$
 $\boxed{a = b \cdot \frac{(1-x)}{2x}}$
 $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{1-x}{2x}}$

13) $AB^2 + AC^2 = BC^2$
 $(a^2 + 2ax + x^2) + (b^2 + 2bx + x^2) = a^2 + b^2 + x^2 + 2(ax + bx + ax)$
 $\boxed{b^2 = 2ac} \Rightarrow \boxed{c = \frac{b^2}{2a}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 13) \quad \operatorname{tg} 40^\circ &= \frac{b+c}{a+b} = \frac{b + b^2/2a \cancel{- b}}{a+b} = \frac{b(1+1/a)}{a+b} = \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{2a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1} = \frac{1 + \frac{1-4x}{4x}}{\frac{1-x}{2x} + 1} = \frac{4x + 1 - x}{2 - x + 4x} = \frac{3x + 1}{2 + 3x} = \cancel{\frac{3x+1}{2+3x}} \\
 \Rightarrow x &= \frac{1 - \operatorname{tg} 40^\circ}{1 + \operatorname{tg} 40^\circ} - 2 \\
 \angle DBC &= \arctg x = \arctg \left(\frac{2 \operatorname{tg} 40^\circ - 1}{3(1 - \operatorname{tg} 40^\circ)} \right) \\
 \text{Ответ: } \angle DBC &= \arctg \left(\frac{2 \operatorname{tg} 40^\circ - 1}{3(1 - \operatorname{tg} 40^\circ)} \right) \\
 \Rightarrow \operatorname{tg} 40^\circ \cdot 2 + 2x \operatorname{tg} 40^\circ &= 3x + 1 \\
 \Rightarrow \angle DBC &= \arctg(x) = \arctg \left(\frac{2 \operatorname{tg} 40^\circ - 1}{3 - 2 \operatorname{tg} 40^\circ} \right) \\
 \text{Ответ: } \angle DBC &= \arctg \left(\frac{2 \operatorname{tg} 40^\circ - 1}{3 - 2 \operatorname{tg} 40^\circ} \right)
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

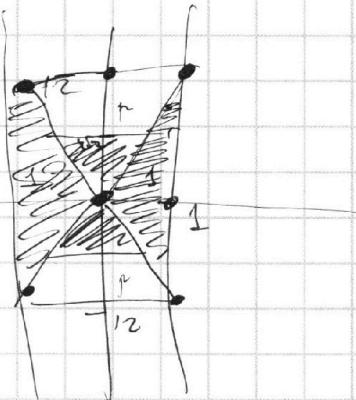
$x - 10 \rightarrow x$ для лиза дени яна

$$\cancel{x^2} - \frac{y^2}{12} = 0$$

$$|x| = \sqrt{\frac{y^2}{12}}$$

$$x \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$$

~~хан~~



$$\left| x \right| = \frac{y}{\sqrt{12}} \quad \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \quad 2|x| \leq 4$$

$$\begin{array}{c} + \\ - \end{array} \quad \left| \frac{y}{\sqrt{12}} \right| \leq 4$$

$$|y| \leq \frac{4}{\sqrt{12}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$x^2 = 20 + 100 = \frac{4}{(2\sqrt{5})^2}$

$x = 10$

$A F - ?$

$16 - 3 = \frac{\sqrt{7}}{72}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(10-x) \operatorname{ctg} \beta$

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{6}{\cos \alpha}$

$\operatorname{ctg} \beta = \frac{10-x}{\cos \beta}$

$\frac{6}{\cos \alpha} = 8$

$90^\circ + \alpha = 90^\circ + \beta$

$\alpha = \beta$

$4\sqrt{3}$

Diagram: A circle with points A, B, C, D, E, F on its circumference. Chords AB, BC, CD, DA are drawn. Point F is outside the circle. Line segments AF and BF are drawn. Angle AFB is marked as 90 degrees. Chords AC and BD intersect at point E. Line segments CE and ED are drawn. Chords AD and BC intersect at point G. Line segments AG and BG are drawn. Chords AB and CD intersect at point H. Line segments AH and CH are drawn. Chords AC and BD intersect at point I. Line segments AI and BI are drawn. Chords AD and BC intersect at point J. Line segments AJ and CJ are drawn. Chords AB and CD intersect at point K. Line segments AK and CK are drawn. Chords AD and BC intersect at point L. Line segments AL and CL are drawn. Chords AB and CD intersect at point M. Line segments AM and CM are drawn. Chords AD and BC intersect at point N. Line segments AN and CN are drawn. Chords AB and CD intersect at point O. Line segments AO and CO are drawn. Chords AD and BC intersect at point P. Line segments AP and CP are drawn. Chords AB and CD intersect at point Q. Line segments AQ and CQ are drawn. Chords AD and BC intersect at point R. Line segments AR and CR are drawn. Chords AB and CD intersect at point S. Line segments AS and CS are drawn. Chords AD and BC intersect at point T. Line segments AT and CT are drawn. Chords AB and CD intersect at point U. Line segments AU and CU are drawn. Chords AD and BC intersect at point V. Line segments AV and CV are drawn. Chords AB and CD intersect at point W. Line segments AW and CW are drawn. Chords AD and BC intersect at point X. Line segments AX and CX are drawn. Chords AB and CD intersect at point Y. Line segments AY and CY are drawn.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(x+z)(y+z) = -z(z+2) + (z^2 + 4z + 4)$$

$$x^2 - 2x = yz$$

$$\begin{cases} xy + 2(x+y) + 4 = z^2 + 2z \\ yz + 2(y+z) + 4 = x^2 + 2x \\ zx + 2(z+x) + 4 = y^2 + 2y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= \cancel{z^2 + 2z} \\ &= yz - 2x + 4 \end{aligned}$$

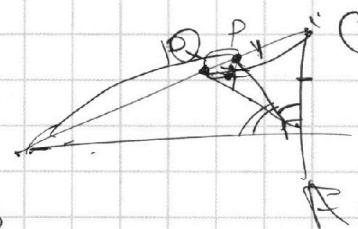
$$\begin{aligned} xy + yz + zx + 4(x+y+z) + 12 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(x+y+z) \\ xy + yz + zx + 2(x+y+z) + 12 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

$$yz - x^2 + 4$$

$$xy + yz + zx = -2x + z^2$$

$$\begin{cases} xy + z = (z-1)^2 \\ yz + z = (y-1)^2 \\ zx + z = (x-1)^2 \end{cases}$$

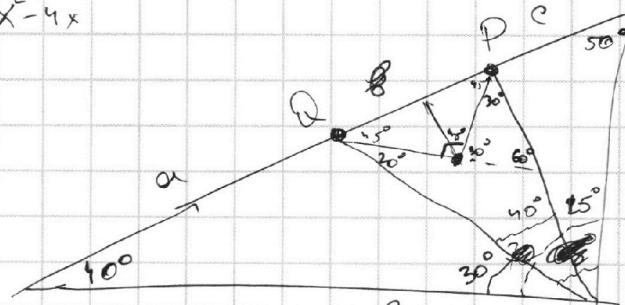
$$\begin{aligned} (xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) + \\ + 12 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ a + b &> c \end{aligned}$$

$$(a+z)(b+z) = (c-z)c$$

$$x^2 - 4x$$



$$c$$

$$70^\circ + 65^\circ - 50^\circ =$$

$$\begin{cases} (a+b+z) = c(c-z) \\ (a+z)(b+z) = ab(a-z) \\ (c+z)(a+z) = b(b-z) \end{cases}$$

$$B$$

$$\frac{a(z-z)}{xy} = 1$$

$$xyz = z^2(z-2)$$

$$A$$

$$\frac{a+z}{c+z} = \frac{c(c-z)}{ab(a-z)}$$

$$\frac{a^2 - 4}{c^2 - 4} = \frac{c}{a}$$

$$(a+z)(b+z)(c+z) = ab(a^2 - 4) = \text{const}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

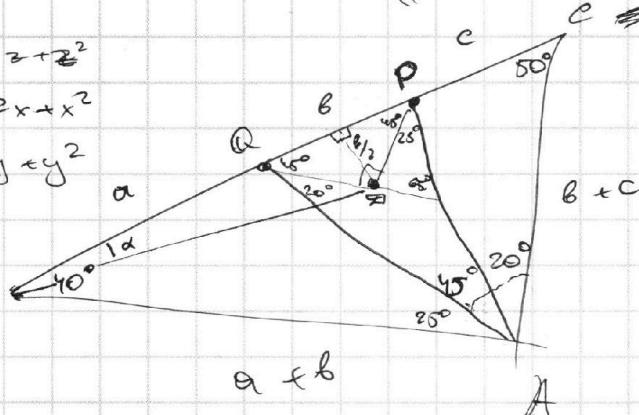
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + z^2 - 4z = (xy + yz + zx) - 2(x + y + z)$$

$$xy = z^2 - 2z + z^2$$

$$yz = z^2 - x + x^2$$

$$zx = -2y + y^2$$



$$\text{ММ} = 40$$

$$(10-1)^3 =$$

$$= 10$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{z}{xy} + \frac{z}{xy}$$

$$z - 2 = \frac{xy}{z}$$

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 -$$

$$\begin{aligned} & xy^2 + xz^2 + yz^2 \\ & = \frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} \\ & = \frac{(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2}{(xy)^2} \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + bc + c^2$$

$$z^2(z-2)^2 = (xyz)^2 + (z-2)^2$$

$$2ab + bc + ac = ab + \frac{b^2}{2} + bc$$

$$2ac = b^2$$

$$c = \frac{b^2}{2a}$$

$$t = \tan 40^\circ \cdot \frac{b+c}{a+b} = \frac{2ab+b^2}{2a^2+2ab}$$

$$\frac{b(2a+b)}{2a(a+b)}$$

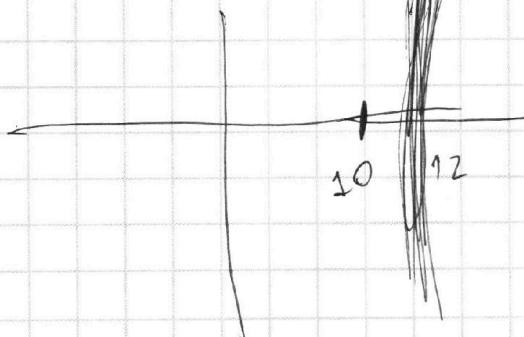
$$2a(a+b)t = b^2 + 2ab$$

$$b^2 + b \cdot (2a(1-t)) - 2a^2t = 0$$

$$b_{1,2} = -2a(1-t) \pm \sqrt{ }$$

$$x-10 \leq 2$$

$$x \leq$$



$$|x-10| = \left| \frac{y}{2\sqrt{3}} \right|$$

$$x^2 - 20x + 100 - \frac{y^2}{12} = 0$$