



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. ~~[4 балла]~~ Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2, \\ yz = 4x + x^2, \\ zx = 4y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + (z + 4)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. ~~[2 балла]~~ Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 25 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?

3. ~~[5 баллов]~~ Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 15$ ,  $BE = 10$ .

4. ~~[4 балла]~~ В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть восемь коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. ~~[5 баллов]~~ Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2-a^3}{3} = 0$  являются четвертым и пятым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $2x^2 - (a^3 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$  являются вторым и седьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| + \left|y - 15 - \frac{x}{6\sqrt{3}}\right| \leq 6$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  по часовой стрелке. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle DBC = 35^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 4z + z^2 & = z(z+4) \\ xz = 4y + y^2 & = y(y+4) \\ yz = 4x + x^2 & = x(x+4) \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ x^2 y^2 z^2 = xyz (x+4)(y+4)(z+4)$$

$$(1) \quad xyz = (x+4)(y+4)(z+4)$$

$$(2) \quad xy = 4z + z^2 \Rightarrow z+4 = \frac{xy}{z}$$

$$\text{Аналогично: } x+4 = \frac{yz}{x} \quad y+4 = \frac{xz}{y}$$

Раскроем скобки в (1):

$$xyz = (x+4)(y+4)(z+4) = xyz + 4xy + 4xz + 4yz + 16x + 16y + 16z + 64$$

$$0 = 4xy + 4xz + 4yz + 16(x+y+z) + 64 \quad | : 4$$

$$(3) \quad 0 = xy + xz + yz + 4x + 4y + 4z + 16$$

$$\begin{aligned} (x+4)^2 & \stackrel{\text{по (2)}}{=} (x+4) \cdot \frac{yz}{x} = yz + \frac{4yz}{x} = 4(x+4) + yz = 4x + yz + 16 \\ \text{Аналогично: } (y+4)^2 & = 4y + xz + 16 \\ (z+4)^2 & = 4z + xy + 16 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (x+4)^2 \\ (y+4)^2 \\ (z+4)^2 \end{aligned}} \right\} \text{сложим}$$

$$(4) \quad 4x + 4y + 4z + (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 4x + 4y + 4z + 4x + yz + 16 + 4y + xz + 16 + 4z + xy + 16 = 32 + xy + xz + yz + 16 + 32$$

По (3), преобразуем (4):

$$(16 + 4x + 4y + 4z + xy + xz + yz) + 32 = 0 + 32 = 32$$

$$\text{Ответ: } (x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 32$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = \frac{99 \dots 99}{25000} = 10^{25000} - 1$$

$$n^3 = (10^{25000} - 1)^3 = 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} + 3 \cdot 10^{25000} - 1$$

$$1) \quad 10^{75000} - 3 \cdot 10^{50000} = \underbrace{99 \dots 9}_{24999} \underbrace{700 \dots 00}_{50000} \dots \text{Это там, поменяли}$$

Число  $10^{75000}$  имеет 75000 нулей, а в числе  $3 \cdot 10^{50000}$  - 1 цифра 3 и 50000 нулей  $\Rightarrow$  последние  $50 \cdot 10^3$  нулей остались нулями, 50001 цифра слева - 10 - 3 = 7, а оставшиеся 24999 нулей увеличатся на 1, 2 десят тысяч нулей

$$2) \quad \underbrace{99 \dots 9}_{24999} \underbrace{700 \dots 00}_{50000} + 3 \cdot 10^{50000} = \underbrace{99 \dots 9}_{24999} \underbrace{700 \dots 00}_{24999} \underbrace{00 \dots 00}_{25000}$$

$$3) \quad \underbrace{99 \dots 9}_{24999} \underbrace{700 \dots 0}_{24999} \underbrace{0300 \dots 00}_{25000} - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{24999} \underbrace{700 \dots 0}_{24999} \underbrace{299 \dots 9}_{25000}$$

Тогда всего цифр 9 -  $24999 + 25000 = 50000 - 1 = 49999$

Ответ: 49999 цифр 9

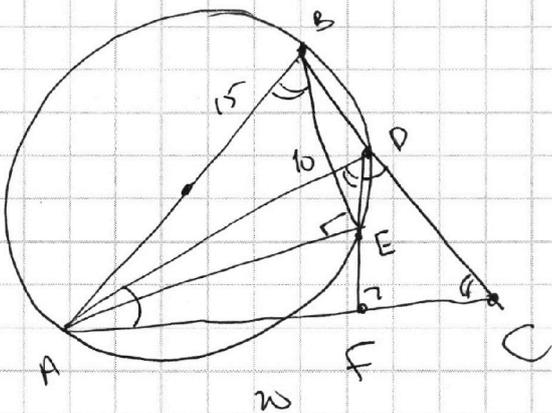


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1. Проведем отрезки AD и BE
2.  $\angle APB = 90^\circ$ , т.к. он впис. и AB - диаметр
3.  $\angle CPA = 180 - \angle APB$  (как смежные)  $= 90^\circ$

$\Delta ADC$  - прямоугольн?

4. По условию:  $DF \perp AC \Rightarrow F$  - основание высоты в  $\Delta ADC$ .

5. По свойству прямоугольного треугольника:

$$\angle CDF = \angle DAC, \angle ADF = \angle DCA$$

6.  $\angle ADF = \angle ADF$  (впис.  $\angle$  в  $\Delta ADF$ )  $\Rightarrow \angle ABE = \angle ADF$ , т.к. они опираются на одну дугу  $\overset{EEDF}{AE}$ .

7.  $\angle AEB = 90^\circ$ , т.к. он впис. и опирается на диаметр  $\Rightarrow \Delta ABE$  - прямоугольн.

$$\cos(\angle ABE) = \frac{BE}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\sin(\angle ABE) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle ABE)} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

9. В  $\Delta ADC$ :  $AD = AC \cdot \sin(\angle DCA) = AC \cdot \sin(\angle ABE) = 20 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$

10.  $\Delta ADF$  - прямоугольн, т.к.  $DF \perp AC (= AF) \Rightarrow AF = AD \cdot \sin(\angle ADF) =$   
 $= AD \cdot \sin(\angle ABE) = 20 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{100}{3} = 11 \frac{1}{3}$

Ответ:  $AF = 11 \frac{1}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть в мире  $n$  коробок. Пусть  $P(A)$  - вероятность покупки, при возможности выбрать 5 коробок

$$P(A) = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^{25}}$$

$C_{n-3}^2$  - ил. жидк., в наших коробках марк, поэтому вырешим отуд любой набор из этих трех коробок и еще любых двух

$C_n^5$  - кол-во наборов для цюна

$$P(A) = \frac{(n-3)(n-4) \cdot 5!}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \cdot 2!} = \frac{5!}{2n(n-1)(n-2)}$$

2) Пусть  $P(B)$  - вероятность вырешить, если ~~используе~~ выбрать 8 коробок. Аналогично п.1:

$$P(B) = \frac{C_{n-3}^5}{C_n^8} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) \cdot 8!}{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-7) \cdot 5!} = \frac{8!}{n(n-1)(n-2) \cdot 5!}$$

3) Вероятность увеличится в  $\frac{P(B)}{P(A)}$  раз

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{8!}{n(n-1)(n-2) \cdot 5!} \cdot \frac{2n(n-1)(n-2)}{5!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2^2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{28}{5} = 5,6$$

ответ: в 5,6 раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Решение

$$2x^2 - (8-4)x - 2 \cdot 64 - 16 - 4 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 2x - 64 - 8 - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 74 = 75 \cdot 4$$

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{75 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \pm 10\sqrt{3}}{2} = 1 \pm 5\sqrt{3}$$

Такая последовательность существует!

$$b_1 = 1 - 7\sqrt{3}$$

$$b_4 = 1 - \sqrt{3}$$

$$b_7 = 1 + 5\sqrt{3}$$

$$b_2 = 1 - 5\sqrt{3}$$

$$b_5 = 1 + \sqrt{3}$$

$$b_3 = 1 - 3\sqrt{3}$$

$$b_6 = 1 + 3\sqrt{3}$$

а может быть равно 2

Ответ:  $a = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) x^2 - (a^2 - a)x + \frac{2 - a^3}{3} = 0$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$   
 ~~$x_1, x_2$~~  - решение

$$(2) 2x^2 - (a^2 - a^2)x - 2a^6 - 8a - 4 = 0$$

~~$x_1, x_2$~~  решение

Пусть  $\{b_4, b_5\}$  - решение первого (1) уравнения, а  $\{b_2, b_7\}$  - решение второго (2) уравнения.

По 1. Внеси:

$$b_4 + b_5 = \frac{a^2 - a}{1}$$

$$b_2 + b_7 = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

Пусть  $b_1$  - первый элемент арифм. прогрессии, а  $d$  - ее разность

$$b_2 = b_1 + d$$

$$b_7 = b_1 + 6d$$

$$b_2 + b_7 = 2b_1 + 7d$$

$$b_4 = b_1 + 3d$$

$$b_5 = b_1 + 4d$$

$$b_4 + b_5 = 2b_1 + 7d$$

$\int \Rightarrow b_2 + b_7 = b_4 + b_5$

$$b_2 + b_7 = b_4 + b_5 \Rightarrow \frac{a^2 - a}{1} = \frac{a^3 - a^2}{2}$$

$$a(a-1) = \frac{a \cdot a(a-1)}{2}$$

Рассмотрим случаи  $a \neq 1$  и  $a = 0$ :

Если  $a = 0$ :

$$x^2 + \frac{2}{3} = 0$$

$$b_4, b_5 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

действ. мнимых нет.  $\Rightarrow a \neq 0$

Если  $a = 1$ :

$$x^2 - (1^2 - 1)x + \frac{2 - 1}{3} = x^2 + \frac{1}{3} = 0$$

$\Rightarrow$  решение в действ.

мнимых нет.  $\Rightarrow a \neq 1$

Тогда:

$$x(x-1) = \frac{a \cdot a(a-1)}{2} \Rightarrow 1 = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2$$

Если  $a = 2$ :

$$x^2 - (4-2)x + \frac{2-8}{3} = x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$b_4, b_5 = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$b_2, b_7 = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

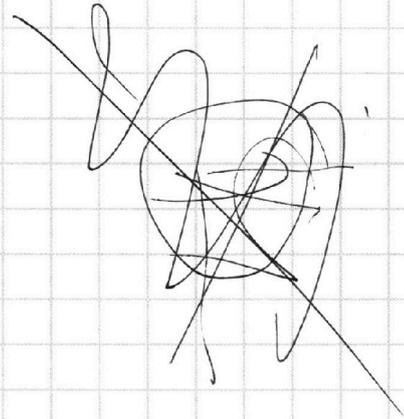
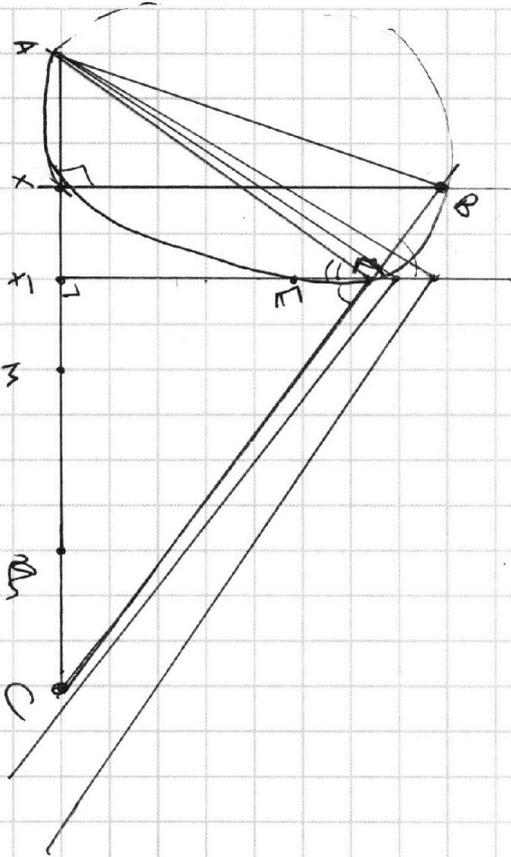


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



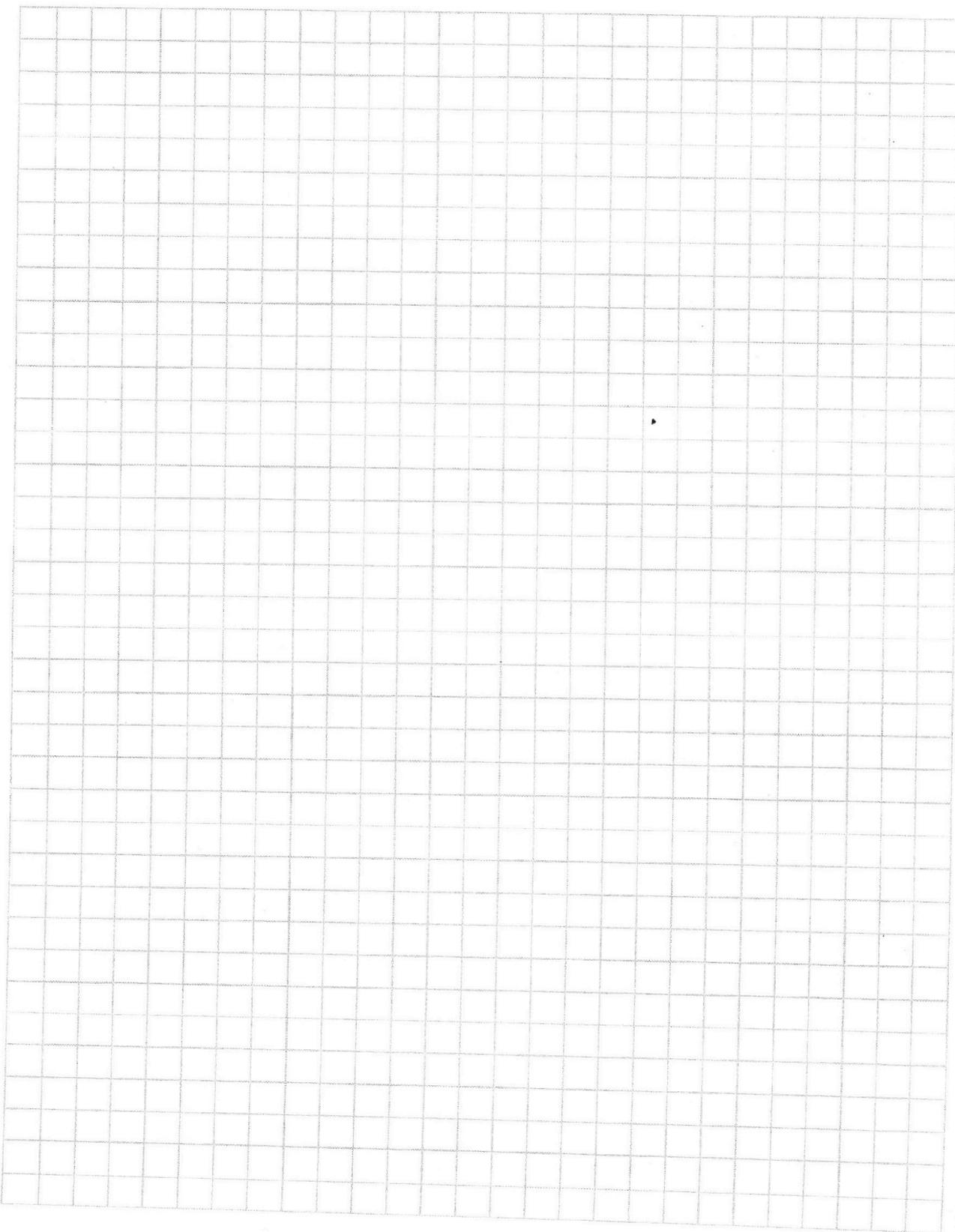


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





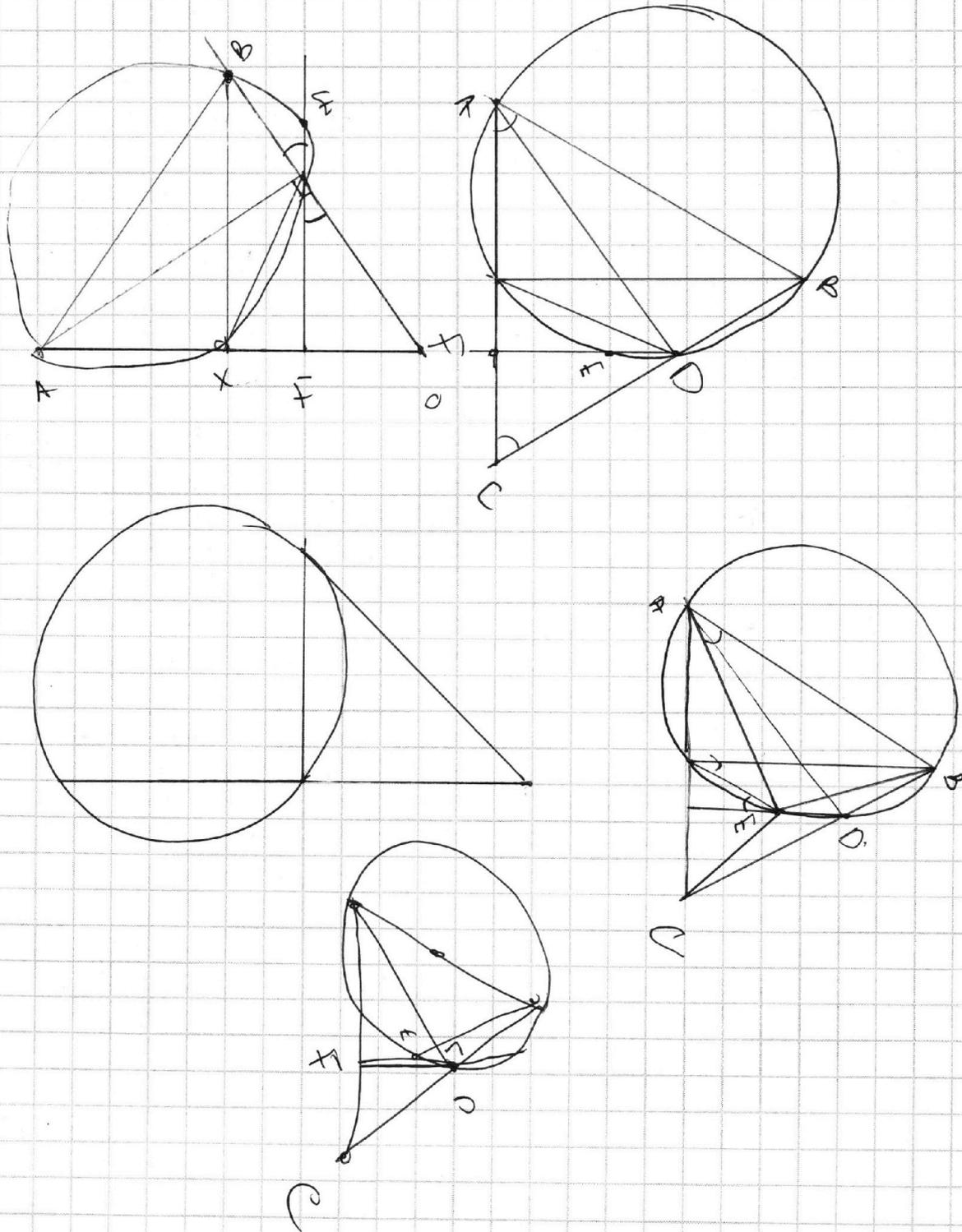


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

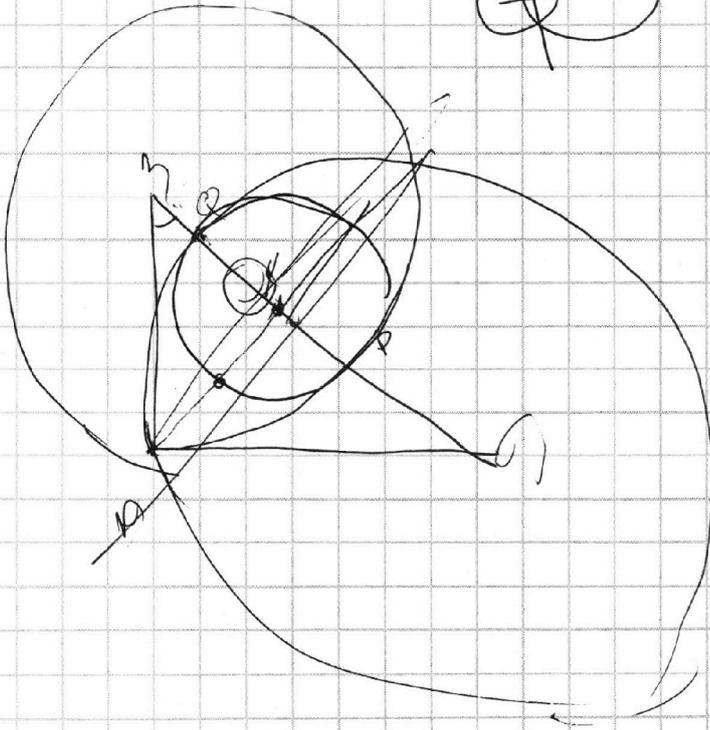
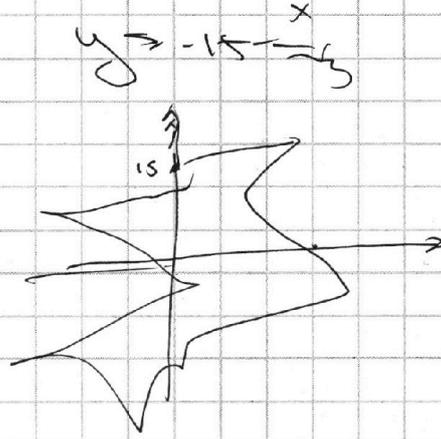
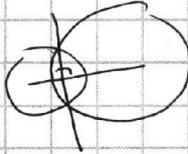
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq 0$$
$$|y - 15 + \frac{x}{6\sqrt{3}}| + |y - 15 - \frac{x}{\sqrt{3}}|$$

$$2y - 30 = 6$$

$$y = 18$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

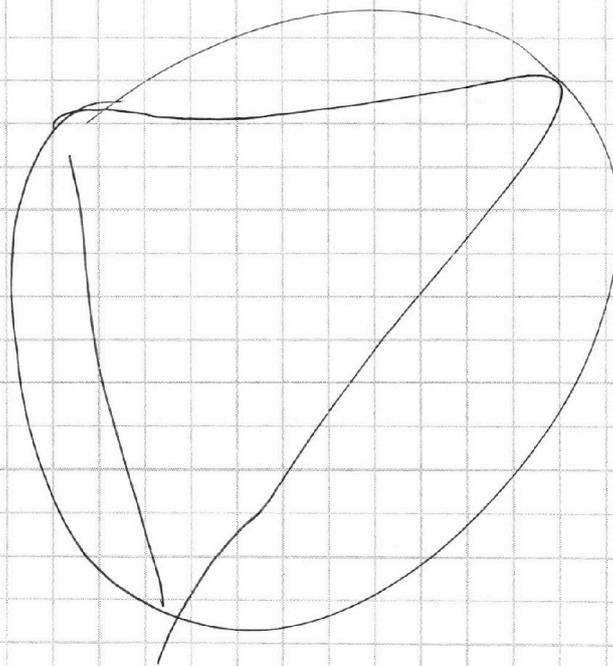
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} xy &= 4z \cdot z(z+4) \\ yz &= x(x+y) \\ xz &= y(y+z) \\ (x+y)^2 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cancel{(x+y)} \\ & (x+z)(y+z)(z+z) = \\ & = \cancel{xy^2 + 2xy} + \cancel{2xz + 4x} + \cancel{zy^2 + 4y} + 4z + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 16 \\ x^2 + 4x = xy \end{aligned}$$

$$(x+y) \frac{yz}{x} =$$

$$\begin{aligned} 2xy &= 8z + 2z^2 \\ 2yz &= 8x + 2x^2 \\ 2xz &= 8y + 2y^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} +$$

$$= yz + \frac{4yz}{x} = yz + 4k + 16$$

$$2xy + yz + 2xz = 8(x+y+z) + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

$$8(x+y+z)z(xyz) + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0$$

$$x^2 yz + z^2 + 8(x+y+z) + 48 = ?$$

$$\frac{yz}{2x} \cdot xy = y^2$$

$$\frac{y(y+z)}{x(x+y)} \cdot z(z+y) = y^2$$

$$y = \frac{(y+z)z(z+y)}{x}$$

$$x^2 yz^2 = xyz(x+y)(y+z)(z+y)$$

$$\begin{aligned} xyz &= (x+y)(y+z)(z+y) \\ x \leq y \leq z \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} -5 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100000 \\ - 300 \\ \hline 99700 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (10^{25000} - 1)^3 &= \\ &= 10^{25000 \cdot 3} - 10^{25000 \cdot 2} \cdot 3 + 10^{25000} \cdot 3 - 1 \end{aligned}$$

$$10^3 - 10^1 =$$

$$1000 - 30 =$$

$$1000 - 30 = 970 = 970$$

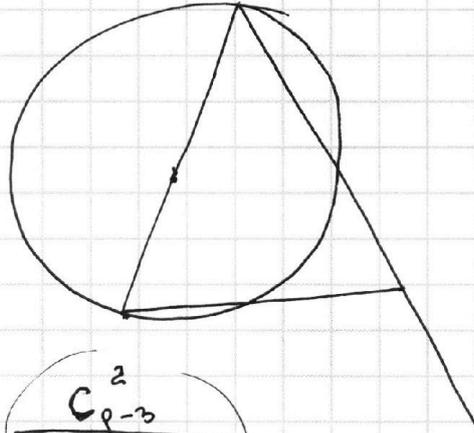
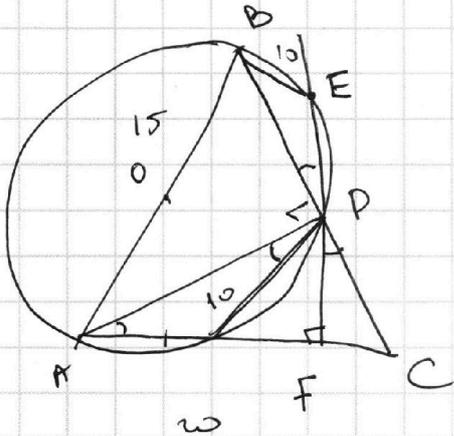


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$C_{p-3}^5 = \frac{(p-3)(p-4)(p-5)(p-6)(p-7) \cdot 1}{C_p^5} \cdot C_{p-3}^2$$

1 -  $x^2 - 2x - 4$

$2\sqrt{3}$

$$2x^2 - (8-4)x - 2 \cdot 6x - 16 - 4 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 8 - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 6x - 8 - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 74 = 0$$

$$4 + 74 \cdot 4 =$$

$$= 4 \cdot 75 = 4 \sqrt{75} = 4 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$$

$$x_1, 2 = \frac{4 \pm 8}{2} = 2 \pm \sqrt{12} = 2 \pm 2\sqrt{3} = 2(1 \pm \sqrt{3})$$

