



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [2 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E – точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.

4. [4 балла] В телегре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипotenузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Предположим, что некоторые два числа из x, y, z не равны \Rightarrow они все различны

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 & (1) \\ yz = -6x + x^2 & (2) \\ xz = -6y + y^2 & (3) \end{cases}$$

$$(2) - (1) : y(z-x) = -6(x-z) + (x^2 - z^2) = -6(x-z) + (x-z)(x+z) \\ (x-z)(x+z - 6 - y) = 0 \\ x-z \neq 0 \Rightarrow x+z-6-y=0 \Rightarrow y = x+z-6$$

$$(3) - (2) : z(x-y) = -6(y-x) + y^2 - x^2 = -6(y-x) + (y-x)(y+x) \\ (y-x)(y+x - 6 - z) = 0 \\ y-x \neq 0 \Rightarrow y+x-6-z=0 \Rightarrow z = x+y-6$$

$$\begin{cases} y = x+z-6 \\ z = x+y-6 \end{cases} \Rightarrow x+(x+z-6)-6 = z \Rightarrow x = 6$$

$$y = x+z-6 = 6+z-6 = z \Rightarrow \text{противоречие}$$

Значит, какие-то два числа оставлены равны.
Мыть без ограничения общности, это $x=y$

Тогда:

$$\begin{cases} x^2 = -6z + z^2 & (1) \\ xz = -6x + x^2 & (2) \end{cases} \quad |(2) : x \neq 0 \Rightarrow z = -6 + x \\ z = x-6$$

~~$$x^2 = -6(x-6) + (x-6)^2$$~~

$$\cancel{x}^2 = -6x+36 + \cancel{x}^2 - 12x+36$$

$$18x = 72$$

$$x = 4 \Rightarrow \begin{cases} z = 4-6 = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Тогда какие-то два числа равны 4, а оставшееся равно $-2 \Rightarrow (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = (4-6)^2 + (4-6)^2 + (-2-6)^2 = 4 + 4 + 64 = 72$

Ответ: 72



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сделаем действие помагово - сначала возвели и в квадрат, а потом решим еще то и. Пусть $x = 20001$.

$$\begin{aligned}
 1) & n \cdot n = \underbrace{9 \dots 9}_{x} \cdot \underbrace{9 \dots 9}_{x} = \underbrace{9 \dots 9}_{x} \cdot (10^x - 1) = \underbrace{9 \dots 9}_{x} 0 \dots 0 - \underbrace{9 \dots 9}_{x} = \\
 & = \underbrace{9 \dots 9}_{x-1} 8 \underbrace{0 \dots 0}_{x-1} 1 \\
 2) & \underbrace{9 \dots 9}_{x-1} 8 \underbrace{0 \dots 0}_{x-1} 1 \cdot \underbrace{9 \dots 9}_{x} = \underbrace{9 \dots 9}_{x-1} 8 \underbrace{0 \dots 0}_{x-1} 1 \cdot (10^x - 1) = \\
 & = \underbrace{9 \dots 9}_{x-1} 8 \underbrace{0 \dots 0}_{x-1} 10 \underbrace{\dots 0}_{x} - \underbrace{9 \dots 9}_{x-1} 8 \underbrace{0 \dots 0}_{x-1} 1 = \underbrace{9 \dots 9}_{x-1} 8 \underbrace{0 \dots 0}_{x-1} 10 \underbrace{\dots 0}_{x} - \\
 & - (10^{2x} - 10^x - \underbrace{9 \dots 9}_{x}) = \underbrace{9 \dots 9}_{x-1} 8 \underbrace{0 \dots 0}_{x-1} 10 \underbrace{\dots 0}_{x} - \underbrace{10 \dots 0}_{2x} + \underbrace{10 \dots 0}_{x} + \underbrace{9 \dots 9}_{x} = \\
 & = \underbrace{9 \dots 9}_{x-1} 7 \underbrace{0 \dots 0}_{x-1} 10 \underbrace{\dots 0}_{x} + \underbrace{10 \dots 0}_{x} + \underbrace{9 \dots 9}_{x} = \underbrace{9 \dots 9}_{x-1} 7 \underbrace{0 \dots 0}_{x-1} 2 \underbrace{0 \dots 0}_{x} + \underbrace{9 \dots 9}_{x} = \\
 & = \underbrace{9 \dots 9}_{x-1} 7 \underbrace{0 \dots 0}_{x-1} 2 \underbrace{9 \dots 9}_{x}
 \end{aligned}$$

Конечно же: $x + x - 1 = 20001 + 20000 = 40001$

Ответ: 40001

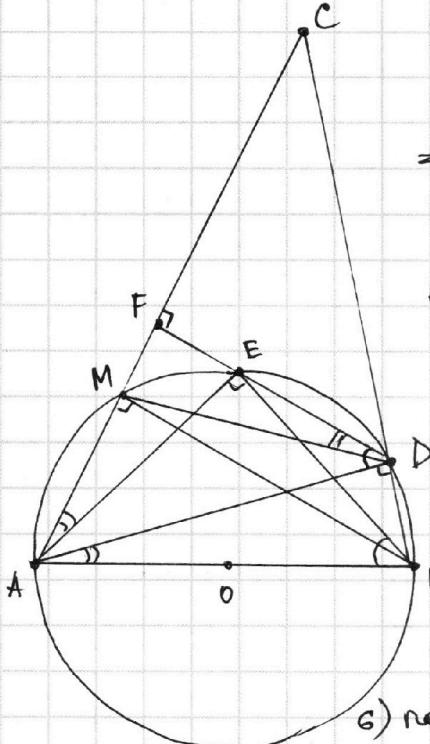
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



- 1) пусть $AC \cap W = M$
- 2) AB - диаметр $\Rightarrow \angle AMB = \angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$ (как вписанные углы, опирающиеся на диаметр)
- 3) $\angle LEDA = \angle EBA$ (как впис. углы, опир. на арку дуги). Пусть они равны α
- 4) $\triangle AFD \sim \triangle AEB$:
- $$\begin{cases} \angle AEB = \angle AFD = 90^\circ \\ \angle FDA = \angle EBA \end{cases} \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle AEB$$
- но 2-м утн \Rightarrow
- $$\Rightarrow \frac{FD}{BE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow FD = \frac{BE \cdot AD}{AB} = \frac{9}{10} AD$$
- 5) $\triangle ABE$: по т. Пифагора
 $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{10^2 - 9^2} = \sqrt{100 - 81} = \sqrt{19}$
- 6) по п. 4, $\triangle AFD \sim \triangle AEB \Rightarrow \angle FAD = \angle EAB \Rightarrow$
- $$\Rightarrow \angle FAE + \angle EAD = \angle DAB + \angle EAD \Rightarrow \angle FAE = \angle DAB = \beta$$
- 7) CA и CB - секущие $\Rightarrow CM \cdot CA = CD \cdot CB$ (произв. отрезков секущих равны)
- $$\Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CD}{CA}$$
- по 2-м пропорц. свойствам и утн между ними
- 8) $\triangle CMD \sim \triangle CAB$: $\angle ACB$ - общий, $\frac{CM}{CB} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow \triangle CMD \sim \triangle CAB \Rightarrow$
- $$\Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{MD}{AB} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow MD = \frac{AB \cdot CD}{AC} = \frac{10 \cdot CD}{20} = \frac{1}{2} CD$$
- 9) $\angle MAE = \angle MDE$ (как впис. углы, опир. на арку дуги)
- 10) $\triangle AFE \sim \triangle DMF$: $\angle MAE = \angle MDE$ / $\angle AFD - \text{общ.}$ $\Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle DMF$ но 2-м утн \Rightarrow
- $$\Rightarrow \frac{AF}{FD} = \frac{FE}{MF} = \frac{AE}{MD} \Rightarrow AF = \frac{FD \cdot AE}{MD} = \frac{\frac{9}{10} AD \cdot \sqrt{19}}{\frac{1}{2} CD} =$$
- $$= \frac{18}{10} \cdot \sqrt{19} \cdot \frac{AD}{CD}$$
- 11) $\begin{cases} \angle ACB = 90^\circ - \angle CAD \\ \angle FDA = 90^\circ - \angle CAD \end{cases} \Rightarrow \angle ACB = \angle FDA = \alpha$
- 12) $\triangle ACD \sim \triangle ABE$: $\begin{cases} \angle ADC = \angle AEB = 90^\circ \\ \angle ACD = \angle ABE = \alpha \end{cases} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ABE$ но 2-м утн



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\triangle ACD \sim \triangle ABE \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{AE}{BE} = \frac{\sqrt{19}}{9}$$

$$\text{13) } \text{no п. 10: } AF = \frac{18}{10} \cdot \sqrt{19} \cdot \frac{AD}{CD} \quad \left| \Rightarrow AF = \frac{18}{10} \cdot \sqrt{19} \cdot \frac{\sqrt{19}}{9} = \right.$$
$$\text{no п. 12: } \frac{AD}{CD} = \frac{\sqrt{19}}{9}$$

$$\cancel{\frac{18}{10} \cdot \frac{\sqrt{19}}{9} \cdot \frac{\sqrt{19}}{9}} = \frac{19 \cdot 2}{10} = \frac{19}{5} = 3,8$$

Ответ: $AF = 3,8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Рассчитаем вероятность выигрыша в общих случаях
~~всего вариантов~~ (пусть всего коробок n):

1) Всего вариантов выбрать 5 коробок: C_n^5
 Несправных вариантов будет C_{n-3}^2 (т.к. обязательно нужно выбрать 3 мутиные коробки, а из оставшихся выбрать еще $5-3=2$)
 Тогда вероятность победы: $P_1 = \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!}}{\frac{n!}{5!(n-5)!}} =$
 $= \frac{(n-3)! \cdot 5!}{n! \cdot 2!}$

2) Всего вариантов в целом: C_n^9
 Несправных вариантов: C_{n-3}^6 (аналогично п. 1)
 Тогда вероятность победы: $P_2 = \frac{C_{n-3}^6}{C_n^9} = \frac{\frac{(n-3)!}{6!(n-9)!}}{\frac{n!}{9!(n-9)!}} =$
 $= \frac{(n-3)! \cdot 9!}{n! \cdot 6!}$

Отношение вероятностей: $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{(n-3)! \cdot 9!}{n! \cdot 6!}}{\frac{(n-3)! \cdot 5!}{n! \cdot 2!}} =$
 $= \frac{9!}{6!} \cdot \frac{2!}{5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{42}{5} = 8,4$

Ответ: вероятность выигрыша увеличился в 8,4 раз



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x_1 и x_2 - корни ур $\Rightarrow x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$,
а x_3 и x_4 - корни ур $\Rightarrow 5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$

т.о +. Высчита:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - 4a \\ x_1 x_2 = a^2 - 6a + 4 \\ x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 4a^2}{5} \\ x_3 x_4 = -2a^3 - 6a - 15 \\ x_3 + x_4 = \frac{a(a^2 - 4a)}{5} = \frac{a}{5} \cdot (x_1 + x_2) \end{cases}$$

x_1 и x_2 - 6-й и 7-й члены, а x_3 и x_4 -
5-й и 8-й $\Rightarrow x_3, x_1, x_2$ и x_4 - четыре последо-
вательных членов прогрессии.

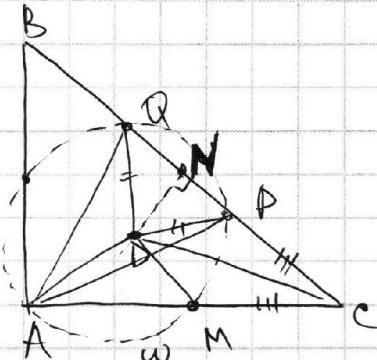
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Опишем окружность около треугольника $\triangle APQ - \omega$

Пусть $\angle ACB = M$

Запишем степенью точки C относит. ω :

$$CM \cdot CA = CP \cdot CA$$

$$AC = CQ \text{ по укр.} \Rightarrow CM = CP$$

~~2) $\angle BAP = \angle BPA$~~ ~~$\angle CDA = \angle CPA = CM$~~
~~BP = CP~~

~~3) $\angle BQZ = \angle BZP$ $\angle BZP$ лежит на серпинке $\angle PAQ$~~

$$\begin{cases} \angle BAP = \angle BPA = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 67^\circ \\ \angle CAQ = \angle CQA = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ \\ \angle DQP = \angle DPQ = 45^\circ \\ \angle A = 90^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle AQB = 23^\circ, \angle APD = 22^\circ, \angle PAC = 23^\circ, \angle QAB = 22^\circ$$

$$3) \angle QAP = 90^\circ - 22^\circ - 23^\circ = 45^\circ$$

4) $DQ = DP \Rightarrow D$ лежит на серпинке $\angle PQ$

$$\angle QDP = 90^\circ, \angle QAP = 45^\circ, \angle QAP - \text{внр.}, \angle QDP = 2\angle QAP \Rightarrow$$

\Rightarrow четырехугольник ND лежит на окр. с четырьмя ~~серпинками~~
~~серпинками~~ в $\angle N$ -середине QP и радиусом

$$NP = NQ = ND \quad (ND - \text{первая прямогл. 4-ка})$$

Также четырехугольник w лежит на серпинке $\angle QP \Rightarrow$

\Rightarrow четырехугольник пересекает сер. кнра $\angle QP$

$$\text{и окр. } w \cap (N; NP) \Rightarrow \text{четырехугольник } w - \text{т.д.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5) $\triangle DPC \sim \triangle DMC$:

$\begin{cases} DP = DM \text{ как радиусы,} \\ CP = CM \\ CD - общ. \end{cases} \Rightarrow \triangle DPC \sim \triangle DMC \text{ по 3-му признаку}$

$$\Rightarrow \angle DCB = \angle DCM = 44^\circ / 2 = 22^\circ$$

$$\text{Ответ: } \angle DCB = 22^\circ$$

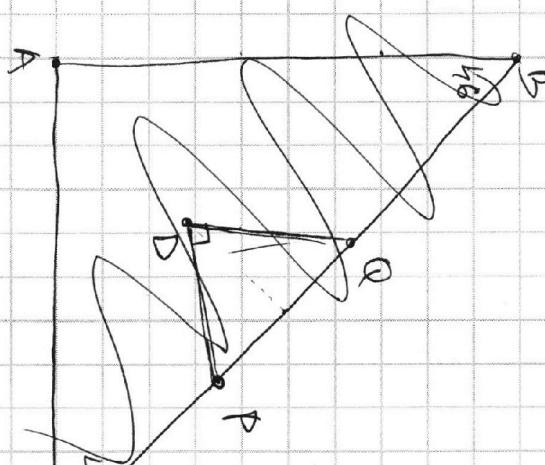


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

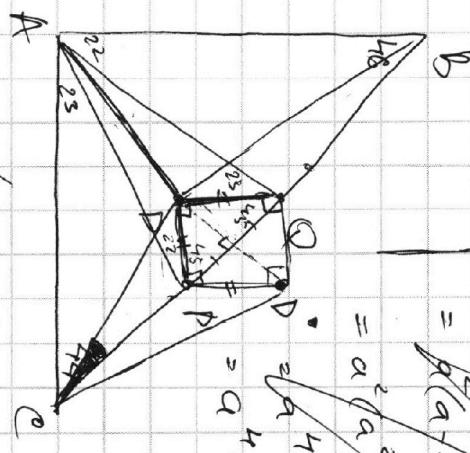
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

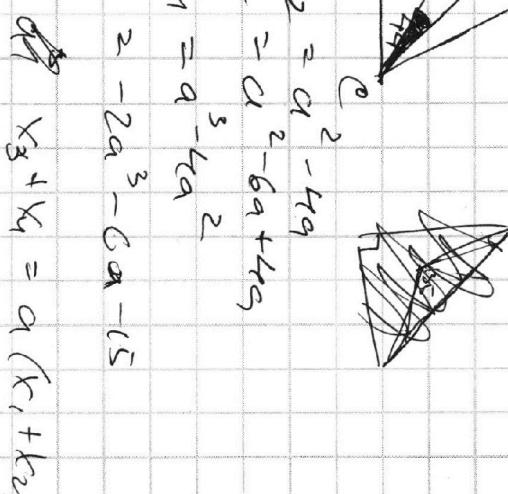
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & |x+y| + |x-y| \leq 8 \\ & |x+4| + |x-4| \leq 8 \\ & 2|x+4| \leq 8 \\ & |x+4| \leq 4 \\ & x+4 \leq 4 \\ & x \leq -4 \\ & x \leq -4 \\ & y \neq \frac{\sqrt{3}}{2}x \geq 2\sqrt{3} \\ & y - \frac{\sqrt{3}}{2}x \geq 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



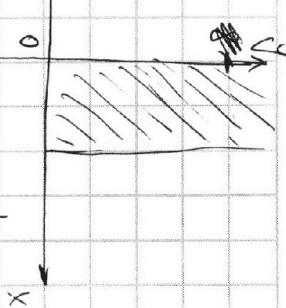
$$\begin{aligned} & (a^2 + 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = \\ & = p(a^2 - 4a + 4) - 4(a^2 - 6a + 4) = \\ & = a^2(a^2 - 8a + 16) - 4(a^2 - 6a + 4) = \\ & = a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 = \\ & = a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 24a - 16 = \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 - 4a \\ x_1 x_2 = a^2 - 6a + 4a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = a^2 - 4a \\ x_3 x_4 = -2a^3 - 6a^2 - 15 \end{cases}$$

$$x_3 + x_4 = a(x_1 + x_2)$$



$$a + \frac{d(x-a)}{k}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

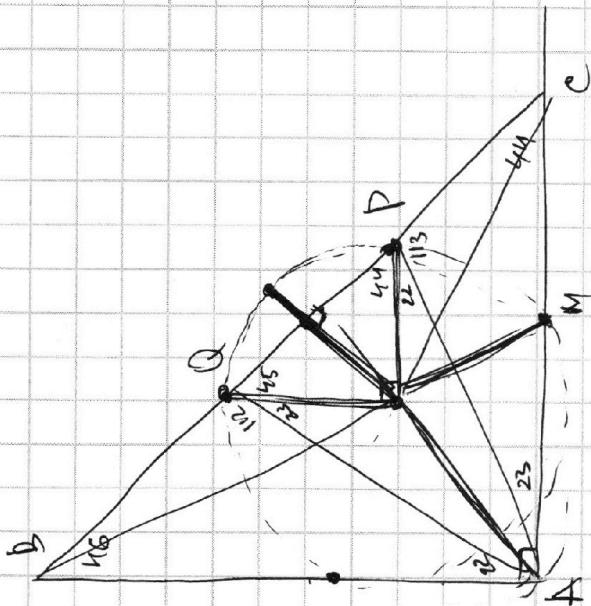
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$CP \cdot CO = CU \cdot CA$$

$$CP = CM$$

T

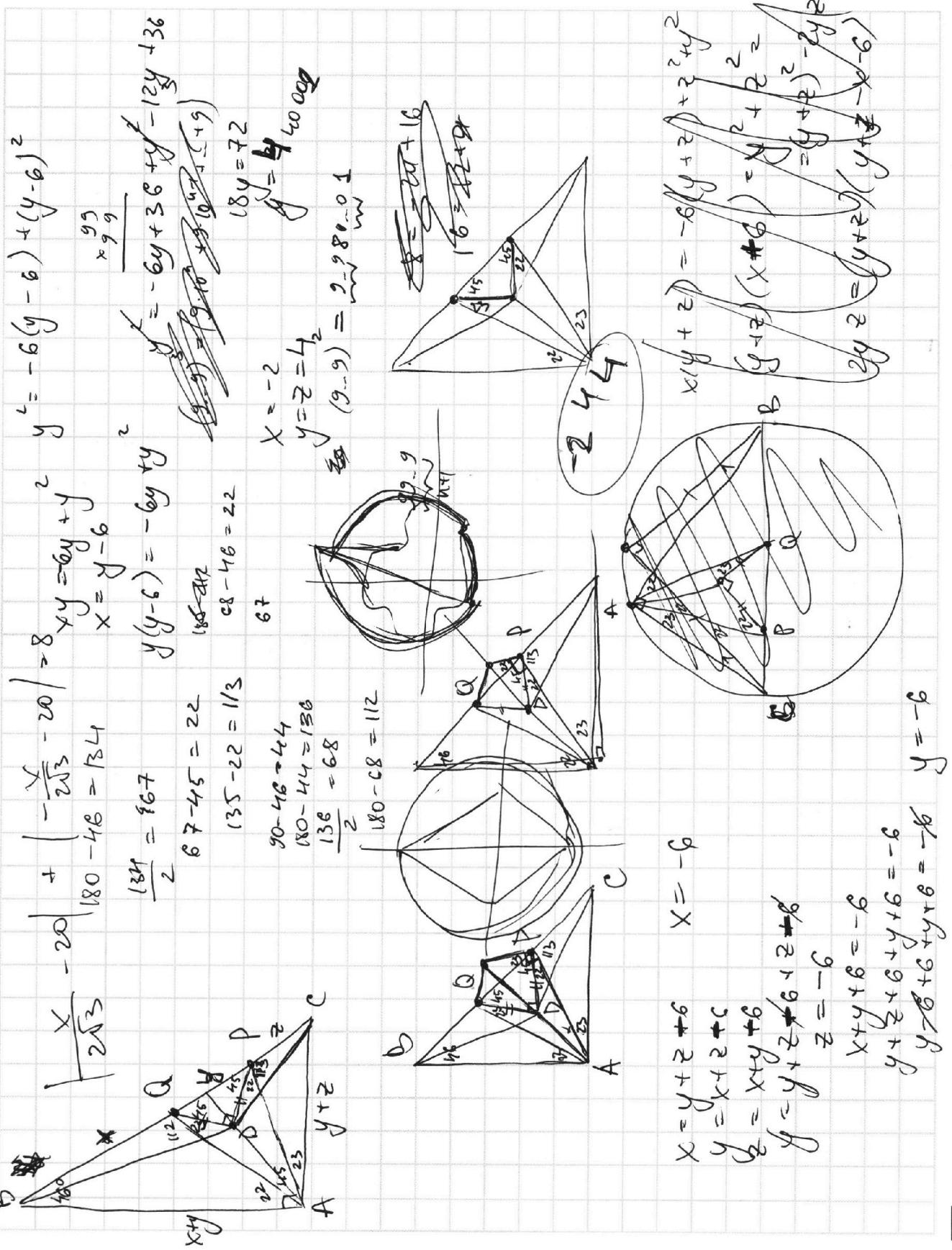


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

На рисунке изображены две окружности с общим центром O . Касательная AC к внешней окружности в точке A пересекает вторую окружность в точке M . Точка N — середина дуги AB , не содержащую точку M . Точки D и E — проекции точек M и N на диаметр BC . Найдите радиус AB , если $AC = 20$, $AE = \sqrt{19}$.

Решение:

Пусть $AB = x$. Тогда $AE = \sqrt{19}$.

В $\triangle AFE$ по теореме косинусов:

$$AF^2 = AE^2 + FE^2 - 2 \cdot AE \cdot FE \cdot \cos(\angle AFE)$$

$$\frac{AF}{AE} = \frac{FE}{FE} = \frac{AE}{MD}$$

$$\frac{AF}{AE} = \frac{FE}{BD} = \frac{AE}{AD} = \frac{\sqrt{19}}{10}$$

$$\frac{AF}{AE} = \frac{FD}{BE} = \frac{AD}{CB} = \frac{\sqrt{19}}{5}$$

В $\triangle AFD$ по теореме косинусов:

$$AF^2 = FD^2 + AD^2 - 2 \cdot FD \cdot AD \cdot \cos(\angle FAD)$$

$$x^2 = \frac{9}{10}x^2 + \frac{1}{10}x^2 - 2 \cdot \frac{9}{10}x \cdot \frac{1}{10}x \cdot \cos(120^\circ)$$

$$x^2 = \frac{9}{10}x^2 + \frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{5}x^2$$

$$x^2 = 3x^2$$

$$x = \sqrt{3}$$

В $\triangle AEM$ по теореме косинусов:

$$AM^2 = AE^2 + EM^2 - 2 \cdot AE \cdot EM \cdot \cos(\angle AEM)$$

$$20^2 = 19 + MD^2 - 2 \cdot \sqrt{19} \cdot MD \cdot \cos(120^\circ)$$

$$400 = 19 + \frac{1}{10}x^2 + 2 \cdot \sqrt{19} \cdot \frac{1}{10}x \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$400 = 19 + \frac{1}{10}x^2 - \sqrt{19}x$$

$$381 = \frac{1}{10}x^2 - \sqrt{19}x$$

$$3810 = x^2 - 10\sqrt{19}x$$

$$x^2 - 10\sqrt{19}x - 3810 = 0$$

$$(x-2)(x+2) + 6(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x+2 + 6) = 0$$

$$x = 2 \quad x = -8$$

В $\triangle ABC$ по теореме косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B)$$

$$20^2 = x^2 + 10^2 - 2x \cdot 10 \cdot \cos(120^\circ)$$

$$400 = x^2 + 100 + 20x$$

$$300 = x^2 + 20x$$

$$x^2 + 20x - 300 = 0$$

$$(x+20)(x-12) = 0$$

$$x = -20 \quad x = 12$$

Найдено $x = 12$.

Ответ: $AB = 12$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

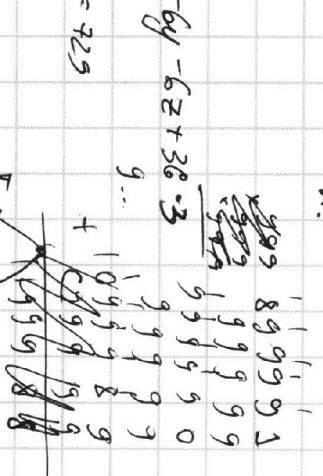
- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & xy = -6x + x^2 \quad x(x-6) = yx \quad \frac{c_n^2}{c_{n-5}} = \frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} = \frac{(n-3)!.5!}{n!2!} = \\
 & x^2 - 6x + 9 = xy + 9 \quad x-6 = \frac{yx}{x} \quad \frac{5!(n-5)!}{(n-5)!} = \frac{5!}{n!-2!} \\
 & (x-3)^2 = xy + 9 \quad (x-3)^2 = yx \rightarrow \\
 & (x-3)^2 = yx + 9 \quad (x^2 - 3x + 9) + (1^2 - 3^2) = ((xy)(y+2)) + 27 \\
 & (y-3)^2 = x^2 \rightarrow \quad y^2 - 6y + 9 = x^2 - 12x + 36 \\
 & 9^2 = 81 \quad n = 99 \dots 9 \quad (x-6)^2 = x^2 - 12x + 36 = 60 \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{(n-3)!.5!}{(n-2)!(n-1).n!} = \\
 & 891 = \frac{99^2}{9901} \quad 99^2 = \frac{9801}{20000} \quad (x-6)^2 \neq y^2 - 6y + 36 \\
 & (9-9)^3 = (9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^0) \cdot 9801 \quad (x-6)^2 = y^2 - 6y + 36 \\
 & n \cdot 90 = \frac{1}{99} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{42}{5} = \frac{84}{105} = \frac{-84}{14}}{9^3 = (90+9)(80+9)(70+9)} \\
 & \frac{n \cdot 90}{990299} = \frac{88209}{9901} \quad \frac{32}{5} = \frac{9^3 = 81 \cdot 9 = 729 + 9 = 729}{999999} \\
 & 88209 + 8991 = \frac{8991}{8991} = \frac{9998001}{999999} \quad (y-9)^3 = (9 \cdot 10^{n-1} + 9 \cdot 10^0) \cdot 998001 \\
 & 9998001 = \frac{9998001}{999999} \quad \frac{2}{999999} = \frac{2}{999999} \\
 & n \cdot 9 = 89 \dots 91 \quad 9 \cdot 9^2 = 8982009 \\
 & n = \frac{(n-3)!}{20000} \quad 997002999 = 999998899999899999 \\
 & C_{n-3} = \frac{9^1(9-3)!}{n!} = n^2 = \frac{991^2}{20000} = \frac{800001}{20000} = \frac{20000 \cdot 2 + 1}{100000} = \frac{1}{100000} = 40000 \\
 & C_n = \frac{(n-3)!.9^1}{n!.9!} = \frac{(n-2)!(n-1)(n)}{n!.9!} = \frac{(n-2)!(n-1)(n)}{54812} \\
 & (n-3)!.9^1 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{20000} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{20000} = \frac{1}{100000} = 1
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

