



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 10$ ,  $AB = 6$ ,  $BE = 5$ .
4. [4 балла] В телегре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$  являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$  являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипotenузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DBC$ , если известно, что  $\angle DCB = 20^\circ$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

По усл.  $x, y, z > 0$  и неравенство выразим, получим

$$xy^2 - x^2z = xyz(x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = xy + 3(xy + yz + zx) + 3(x + y + z) + 27$$

$$0 = xy + yz + zx + 3(x + y + z) + 9$$

$$-(xy + yz + zx) = 3(x + y + z) + 9$$

Из этого извлечем корень, получим

$$xy + yz + zx = 3(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$-3(x + y + z) - 9 = 3(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2$$

$$-9 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z)$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) + 27 = -9 + 27 = 18$$

$$\text{Ответ: } (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 18.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$\begin{array}{rcl} 39 \dots 9 & = & 10 - 1 \Rightarrow \\ \underbrace{39 \dots 9}_{40000} & = & 10 - 1 \Rightarrow \\ & & \underbrace{99 \dots 9}_{40000} = (10 - 1)^3 = \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 120000 & & 80000 \\ = 10 & - 3 \cdot 10 & + 3 \cdot 10 - 1. \text{ Но убийство:} \\ & & \end{array}$$

из 10  $120000$  вычит 3  $\cdot 10^{80000}$ . George получение 80000 разделят

на 0 были 0, на 1 останется, чтобы не меньше 80001 разделят

из 0 были 7, а все разделят, начиная с 80001 из 0

останется 9, единица в начале пропадет. В полученных

числе 39999 девятка. К тому  $10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000}$  добавим

$3 \cdot 10^{40000}$ . George получение moins разделят 40001 с 0 на 3.

Из этого  $10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000}$  вычит 1. George

разделят 40001 с 3 перейдет на 2, разделят меньше 40001

из 0 разделят в 3, останется как пустота. К единице

затем число добавится 40000 девяток, при этом девятки,

которые до этого были в числе, не не 0 числе. George

берет губернатор 6 числе 79999.

Остальное: 79999 губернатор

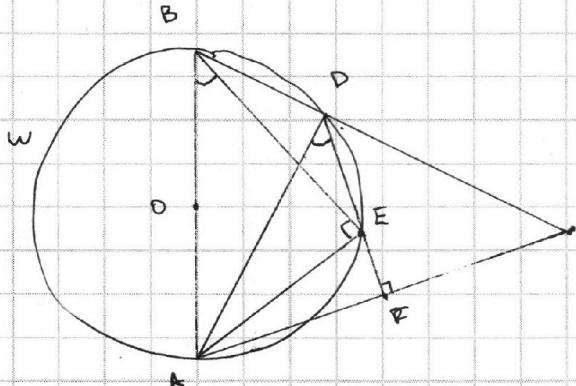
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3



Дано:  $W(O; R)$ ,  $AB$  - диаметр  $W$ ,

$\triangle ABC$ ,  $W \cap BC = D$ ,  $R \geq AC$ ,  $DP \perp AC$ ,

$W \cap BF = E$ ,  $AC = 10$ ,  $AB = 6$ ,  $BE = 5$

Найти:  $AP$

1)  $AB$  - диаметр  $\Rightarrow$  центр  $W$  на  $AB$

Видим что  $W$  это  $\neq O$ .

$$\text{значит } R = \frac{AB}{2} = 3$$

2)  $E$  лежит на  $A$  и  $B$  и  $O$  не лежат: значит что не так, тогда

$E$  лежит на  $B$ , значит  $A$  (чтобы не было пересечения), значит  $\angle BOE \leq 90^\circ$

$$\cos(\angle BOE) > 0, \quad BO = r \cdot \cos \text{где } \angle BOE, \quad BE^2 = BO^2 + OE^2 - 2BO \cdot OE \cdot \cos(\angle BOE) \quad \Rightarrow \quad R = r$$

$$r \cos \angle BOE, \quad 25^2 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cos \angle BOE, \quad \cos \angle BOE > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  противоречие

3)  $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$  - как винт. углы, опир на дуги.

4)  $\angle ABE = \angle ADE$  - как винт. углы на одинак. дугах.

5)  $\angle AEB = \angle AED$ ,  $\angle ABE = \angle ADE \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ADE$  по 2 углам

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AB \cdot AD = AE \cdot AD.$$

6)  $\angle BDA = 90^\circ \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ$  - как смежные углы  $\Rightarrow \triangle ADC$  - прямой  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{по т. Пиф.: } AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow AD^2 = AC^2 - DC^2$$

7)  $\triangle DRC$  - прямой  $\Rightarrow$  по т. Пиф.:  $DC^2 = DR^2 + RC^2 \Rightarrow AD^2 = AC^2 - DR^2 - RC^2$ .

8)  $\triangle APO$  - прямой  $\Rightarrow$  по т. Пиф.:  $AO^2 = AP^2 + OP^2$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$9) AD^2 = AC^2 - DR^2 - BC^2 = AR^2 + DF^2 \Rightarrow AC^2 - 2DR^2 - AF^2 - BC^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC^2 - 2DR^2 - AR^2 - (AC - AR)^2 \geq 0 \Rightarrow 100 - 2DR^2 - AR^2 - (10 - AR)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - 2DR^2 - AR^2 - 100 + 20AR - AR^2 \geq 0 \Rightarrow DR^2 \geq -AR^2 + 10AR$$

$$10) \triangle ABE - \text{треугольник} \Rightarrow \text{по т. Пиф: } AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{11}$$

~~AB = AP = AE = AD~~

$$11) \triangle AFD - \text{треугольник} \Rightarrow \text{по т. Пиф: } AD^2 = AR^2 + DR^2 = AF^2 + 10AR - AR^2 = 10AF = AD^2$$

$$12) AB \cdot AP = AE \cdot AD \Rightarrow 6AP = \sqrt{11} \cdot \sqrt{10AF} \Rightarrow 36AP^2 = 110AF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AP = \frac{110}{36} = \frac{55}{18}$$

Ответ:  $AP = \frac{55}{18}$

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Будет есть  $n$  коробок, тогда  $6 \leq n-3$  или  $n \geq 9$ .

Удивительно, что ~~если~~ имеем  $\frac{n-3}{n} + \frac{n-3-1}{n-1} + \frac{n-3-2}{n-2} \times$   
 $\times \frac{n-3-3}{n-3} = \dots = \frac{n-3-(n-6)}{n-(n-6)}$ , где  $\frac{n-3-(n-6)}{n-(n-6)} = \frac{3}{6}$ . Это означает,

что можно выбрать 5 коробок из  $n$ , такие, что выбрать

5 коробок из  $n$  ( $C_n^5 = C_n^{n-5}$ ), а не пять из  $n$  или

пять из  $n-6$  коробок и пять из  $n-6$  коробок без  $n$ . Тогда получим

выбирать 6 коробок, что равно выбирать  $n-6$  коробок. Тогда имеем

выбирать  $\frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-3-1}{n-1} \cdot \frac{n-3-2}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{n-3-(n-6)}{n-(n-6)}$ .

Значит, что можно 6 коробок отыскать из шести 5 коробок

$$\frac{n-3-(n-6)}{n-(n-6)}$$

или один из которых  $\frac{1}{2}$ , который равен  $\frac{1}{2}$ .

Тогда можно выбрать  $6 \cdot \frac{1}{2} = 2$ , но это бывает.

Ответ: можно выбрать 2 коробки.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.













СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$a_5 = a_3 + 2d, \quad a_6 = a_3 + 3d, \quad a_8 = a_3 + 5d$$

$$a_3 + a_8 = a_3 + a_3 + 5d = a_3 + 2d + a_3 + 3d = a_5 + a_6$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a_5 + a_6 = 20, \quad a_5 + a_6 - \text{корни, тогда } x = 0 \text{ и } x = -(a^2 - a)$$

$$a_5 + a_6 = \frac{a^2 - a}{2}$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 20, \quad a_3 + a_8 - \text{корни, тогда } x = 0 \text{ и } x = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a_3 + a_8 = a_5 + a_6 \Rightarrow a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow (a^2 - a)\left(1 - \frac{a}{4}\right) = 20 \Rightarrow a = 0 \text{ или } a = 1 \text{ или } a = 4.$$

I.  $a = 0$ . Тогда  $x^2 - (a^2 - a)x + a_5 + a_6 = x^2 - 5 = 0$ , корни  $\pm\sqrt{5}$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 4x^2 - 4 = 20, \quad \text{корни } \pm 1.$$

Таким образом имеем корни  $x = \pm 1$ .

II.  $a = 1$ . Тогда  $x^2 - (a^2 - a)x + a_5 + a_6 = x^2 - 4 = 0$ , корни  $\pm 2$ .

$$d = \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}, \quad a_3 = -1, \quad a_5 = a_3 + 2d = -1 + 2\sqrt{5} \neq \sqrt{5} - 1 \text{ - противоречие} \Rightarrow a \neq 1$$

III.  $a = -1$ . Тогда  $x^2 - (a^2 - a)x + a_5 + a_6 = x^2 - 4 = 0$ , корни  $\pm 2$ .

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 4x^2 - 1 = 20, \quad \text{корни } \pm \frac{1}{2}$$

$$a_5 = -2, \quad a_6 = 2, \quad d = a_6 - a_5 = 2 - (-2) = 4, \quad a_3 = -\frac{1}{2},$$

$$a_5 = a_3 + 2d = -\frac{1}{2} + 8 \neq -2 \text{ - противоречие, } a \neq -1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

III. а<sub>24</sub>, решите  $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = x^2 - 12x - 1 = 20$   
корни  $b \pm \sqrt{b^2 - 4} = (-12)^2 - 4 \cdot (-1) = 148$ ,  $x = \frac{12 \pm \sqrt{148}}{2} = 6 \pm \sqrt{37}$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^4 - a^6 - 4 = 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 -$$
$$- 4^6 - 4 = 20 \Rightarrow x^2 - 12x + 2^7 + 2^3 - 2^{10} - 1 = 20$$
$$D = (-12)^2 - 4 \cdot (-889) = 144 + 3556 = 3700$$

корни  $x = \frac{12 \pm \sqrt{3700}}{2} = 6 \pm 5\sqrt{37}$ .

$$a_5 = 6 - \sqrt{37}, \quad a_6 = 6 + \sqrt{37}, \quad d = a_6 - a_5 = 6 + \sqrt{37} - 6 - (-\sqrt{37}) = 2\sqrt{37}$$
$$a_3 = 6 - 5\sqrt{37}, \quad a_5 = a_3 + 2d = 6 - 5\sqrt{37} + 2 \cdot 2\sqrt{37} = 6 - \sqrt{37}, \quad a_6 = a_3 + 3d =$$
$$= 6 - 5\sqrt{37} + 3 \cdot 2\sqrt{37} = 6 + \sqrt{37}, \quad a_8 = a_3 + 5d = 6 - 5\sqrt{37} + 5 \cdot 2\sqrt{37} = 6 + 5\sqrt{37}.$$

При а<sub>24</sub> условие выполнено

Таким образом из всех возможных а, только 6, 6 +  $\sqrt{37}$  при а<sub>24</sub>.

Ответ: а<sub>24</sub>

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 $\sim 6$ 

$$\text{знач} \quad a = k - \frac{15}{2}, \quad b = \frac{4}{6\sqrt{3}}, \quad \text{ногда}$$

$$|a+b| + |a-b| \leq 3.$$

- I.  $a \geq b \geq 0 \Rightarrow a+b + a-b = 2a \leq 3$   
 II.  $b \geq a \geq 0 \Rightarrow a+b + b-a = 2b \leq 3$   
 III.  $a \geq 0 \geq b \Rightarrow a-b + a+b = 2a \leq 3$   
 IV.  $b \geq 0 \geq a \Rightarrow b-a + a+b = 2b \leq 3$   
 V.  $0 \geq a \geq b \Rightarrow -a-b + -a+b = -2a \leq 3$   
 VI.  $0 \geq b \geq a \Rightarrow -a-b + -b+a = -2b \leq 3$

$$\text{Из этого обраzом} \quad -1,5 \leq a, b \leq 1,5$$

L

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~7

Dано:  $\triangle ABC$  - прямоугл.,  $\angle A = 90^\circ$ ,  
 $P \in BC$ ,  $AB = BP$ ,  $Q \in BC$ ,  $AC = QC$   
 $\angle BDP = 20^\circ$ ,  $\angle PDC = 20^\circ$ ,  $\angle DCB = 20^\circ$   
найдем:  $\angle DBP$ .

- 1) Имеем  $\angle BAP = \alpha$ ,  $\angle QAP = \beta$ ,  $\angle PAC = \gamma$ .  
 $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$
- 2)  $AC = LQ \Rightarrow \angle CAQ = \angle CQA = \beta + \gamma$
- 3)  $AB = BP \Rightarrow \angle BAP = \angle BPA = \gamma + \beta$

4)  $\angle QAP + \angle APQ + \angle PQA = 120^\circ$  - по сумме углов в треугольнике  $\alpha + \beta + \gamma + \beta + \gamma + \beta = 120^\circ$

$$\alpha + \beta + \gamma + 2\beta = 120^\circ, \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow 2\beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 45^\circ \Rightarrow \angle QAP = 45^\circ$$

5)  $\angle DQP = 180^\circ - \angle QPB = 180^\circ - 90^\circ - \angle QPA = 90^\circ - \angle QPA = 90^\circ - \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$

6)  $\angle BAP = \angle APP = \alpha + 45^\circ$ ,  $\angle BPD = 45^\circ \Rightarrow \angle DPB = \alpha$

7) Аналогично  $\angle DQA = \gamma$

8)  $\angle ACQ = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 90^\circ - \alpha - \gamma \Rightarrow \angle ACD = 70^\circ - 2\gamma \Rightarrow \angle AEC = 110 + \gamma$

( $AP \cap CD = E$ )

9)  $\angle EDP = 180^\circ - 110^\circ - \gamma - \alpha = 70^\circ - \gamma - \alpha = 25^\circ$  ( $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ, \beta = 45^\circ, \alpha + \gamma = 45^\circ$ )

10)  $\angle DBP = 180^\circ - \angle DCB - \angle BDC = 180^\circ - 20^\circ - 90^\circ - 25^\circ - \angle BPQ = 45^\circ - \angle BPQ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$g^3 = 729$$

$$\overbrace{999}^{40000} \sim \overbrace{999}^{40000}$$

$$\begin{array}{r} 100000 \\ \times 33 \\ \hline 331 \\ + 231 \\ \hline 3801 \\ \times 39 \\ \hline 88209 \\ - 88209 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(10000 - 1)^3 = 999$$

$$(a-b)^3 = (a^2 - ab + b^2)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(10 - 1)^3 = 10^3 - 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - 1 = \frac{120000}{10} - \frac{80000}{10} + \frac{40000}{10} - 1 = 12000 - 8000 + 4000 - 1 = 68209$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ \times 999 \\ \hline 8991 \\ + 899 \\ \hline 898001 \\ + 899 \\ \hline 898001 \\ + 997002999 \\ \hline 997002999 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g_1 = 1 \\ g_2 = 3 \\ g_3 = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 40000 \\ \times 78999 \\ \hline 99999999 \end{array}$$

$$x^2(a^2 - a) \times + a - 5 = 0$$

$$\begin{array}{r} 10000000000 \\ - 30000000 \\ \hline 997000000 \\ - 3000 \\ \hline 997003000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} D_{12} \\ D_{11} = 16 \end{array}$$

$$D = (a^2 - a)^2 - 4(a - 5) = a^4 - 2a^3 + a^2 - 4a + 20 > 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2) \times + 7a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 > 0$$

$$D = (a^3 - a^2)^2 - 4 \cdot 4 (2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4) = a^6 - 2a^5 + a^4 - 32a^4 - 32a^2 +$$

$$+ 16a^6 + 64 = 17a^6 - 2a^5 - 31a^4 - 32a^2 + 64 > 0$$

$$+ 92 + 32$$

$$17 \cdot 2^6 - 2^5 - 31 \cdot 2^4 - 32 \cdot 2^2 + 2^6$$

Хорошо.

$$17 \cdot 2^6 - 31 \cdot 2^4 - 2^2 = 2^6 (17 \cdot 4 - 31 - 3) = 2^6 \cdot 29$$

$$99 \sim 9 = \frac{1000 - 1}{40000} \rightarrow (99 \sim 9)^3 = \left( \frac{1000 - 1}{40000} \right)^3 = \left( \frac{10 - 1}{10} \right)^3 = 10 - 1$$

$$\begin{array}{r} 80000 \\ + 40000 \\ \hline - 3 \cdot 10 \\ + 310 \\ \hline - 1 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + \cancel{x^2} \\ yz = 3x + \cancel{y^2} \\ zx = 3y + \cancel{z^2} \end{cases}$$

$$(xy)^2 = x^2 + 6xy + 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6(xy + zx) = 27$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) = xy + yz + zx$$

$$xy = z(z+3)$$

$$yz = x(x+3)$$

$$zx = y(y+3)$$

$$x^2 = \frac{z(z+3)}{y}$$

$$(xy)^2 = x^2 + 3^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$yz = \frac{z(z+3)}{y} \cdot \left( \frac{z(z+3)}{y} + 3 \right)$$

$$y^2 + z^2 + 3^2 + 3(xy + yz + zx) = \frac{(xy)^2 - (x+y+z)^2}{-2}$$

$$y = \frac{z(z+3)}{y} \left( \frac{z^2 + 3z + 3y}{y} + 3 \right)$$

$$3(xy^2 + y^2 + z^2) + 6(yz + zx) = (x+y+z)^2$$

$$y^3 = z^3 + 3z^2 + 3z^2 + 9z + 8y$$

$$y^3 - 3yz - 9y = z^3 + 6z^2 + 9z = z(z+3)^2$$

$$y(y^2 - 3z - 9) = z(z+3)^2$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + 1 + 1 + 1) - 9 = (x+y+z)^2$$

$$3((x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2) - 9 = (x+y+z)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$a_5 = a_3 + 2d, \quad a_6 = a_3 + 3d, \quad a_8 = a_3 + 5d \quad (x-5)(x-1) = x^2 - 6x + 5$$

$$a_3 + a_8 = a_5 + a_6 = 2a_3 + 5d$$

$$k^2 - (a^2 - a) + a - 5 = 0 \quad \text{No real roots} \quad a_5 + a_6 = a^2 - a$$

$$4(x^2 - (a^3 - a))x + 2a^4 + 2a^4 - ab - y = 20 \quad \text{for } v = B_{23} \quad a_3 + a_8 = \frac{a^3 - a}{4}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{a} = \frac{a}{a} (a^2 - a) \Rightarrow (a^2 - a) \left(1 - \frac{a}{a}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 0, \alpha = 1, \alpha = 4$$

$$x^2 - 5 = 0 \quad , \quad x = \pm\sqrt{5} \quad = \text{gevallen van rechte. hpn a=0}$$

$$4x^2 - 4 \geq 0, \quad k^2 \geq 1$$

$$x^2 + 1 - 5 = 0, \quad k = \pm 2$$

$$4x^2 - 1 \geq 0, \quad x^2 \geq \frac{1}{4} \quad - \text{ the copy from a21}$$

$$x^2 - 12x - 120, x = \frac{12 \pm \sqrt{148}}{2} =$$

$$4x^4 - 48x^3 + \cancel{8}x^2 + 2^5 - \frac{1}{2}x^2 - 4 = 20$$

$$x^2 - 42x + 27 \rightarrow 2^3 - 2^{10} - 120$$

$$x^2 - 12x - 839 = 0$$

$$12 = \sqrt{144 + 4 \cdot 88.9}$$

$$K = \frac{12 \pm 10\sqrt{37}}{2} = 6 \pm 5\sqrt{37}$$

$$a_2 \quad a_4 = a_3 + d, \quad a_5 = a_3 + 2d$$

$$\begin{array}{r}
 1025 \\
 -128 \\
 \hline
 897
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1025 \\ - 128 \\ \hline 897 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1025 \\ - 128 \\ \hline 897 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a_{20} \quad a_{32} = -1, \quad a_{52} = -\sqrt{5}, \quad a_{62} = \sqrt{5}, \quad a_{82} = 1. + \text{Кудин}$$

$$a_{21} \quad a_{32} = -2, \quad a_{52} = -\frac{1}{2}, \quad a_{62} = \frac{1}{2}, \quad a_{82} = 2.$$

$$d = 1, \quad a_{32} = -2 \Rightarrow a_5 = 0 - \text{Кудин}$$

$$a_{24} \quad a_{32} = 6\sqrt{3}^2, \quad a_{52} = 6 - 4\sqrt{3}^2, \quad a_{62} = 6 + 4\sqrt{3}^2, \quad a_{82} = 6 + 5\sqrt{3}^2$$

$$d = 2\sqrt{3}^2, \quad a_5 = a_3 + 2d = a_3 + 4\sqrt{3}^2$$

$$a_8 = a_3 + 5d = a_3 + 5\sqrt{3}^2$$

(a<sub>24</sub>)

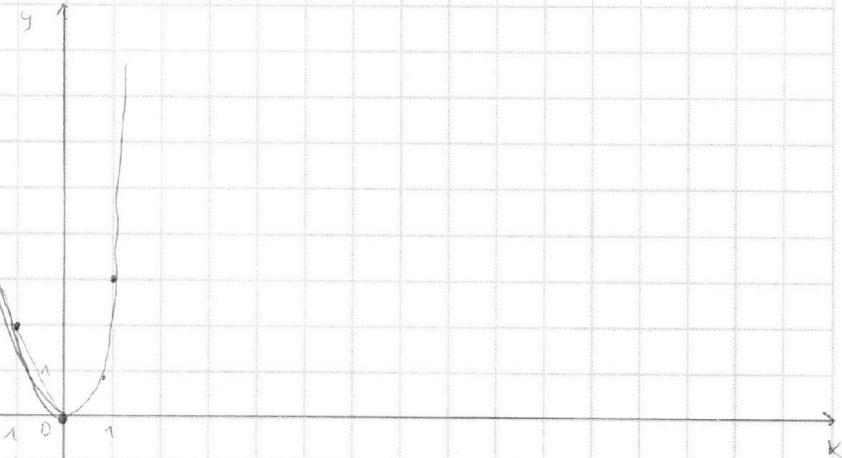
$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{z}{x} \left( \frac{z+3}{x+3} \right)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \left( \frac{y+3}{x+3} \right) \Rightarrow x^3 + 3x^2 = y^3 + 3y^2$$

$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{z+3}{x+3}$$

$$x^3 + 3x^2 = z^3 + 3z^2$$

$$x^2(x+3) = z^2(z+3) = x^2(z+3)$$



(-2, -2; 1)

$$1^2 + 1^2 + 4^2 = 18.$$

Найду

$$x^2 z^2 (x+3)^2 = x^2 (x+3)^2$$

$$x^2 z^2 = x^2 (x+3)^2$$

$$0 = 3x + 18$$

$$x = -6$$

$$x^2 = 3(x+3)^2$$

$$x^2 = 3(x+3)^2$$

$$x^2 = 3(x+3)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(x+3)^2 = \left(\frac{yz}{x}\right)^2$   $\frac{y^4 + x^4 y^4 + z^4 x^4}{x^2 y^2 z^2}$  6 корней  $\frac{y}{x}$  и корней  $\frac{z}{x}$   
 $y(x+z) = 3(x+z) + x^2 + z^2$   $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq xy$   $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n-1}$   
 $(y-3)(x+z) = x^2 + z^2$   $\frac{n-3-2}{n-2} = \frac{n-3-(n-8)}{n-(n-8)}$   
 $(y-3)(x+z) = (x+z)^2 - 2xz$   $x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+z) = k_3 + k_2 + 2x$   
 $(x+z)(x-z-y+3) - 2y(y+3) = 0$   $x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+z) = k_3 + k_2 + 2x$   
 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx - 3(x+y+z) = 0$   $P_2$   $xy + yz + zx + 3(x+y+z) = 27$   
~~6 корней~~ ~~6 корней~~ ~~6 корней~~  
 ~~$\frac{x}{k_3} \frac{y}{k_2} \frac{z}{k_1}$~~   $-x^3$   $\frac{(xy)^2}{2} + \frac{(yz)^2}{2} + \frac{(zx)^2}{2}$   
 $2xy = 6z + 2z^2$   $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 + 6(x+y+z) = 0$   
 $2yz = 6x + 2x^2$   $x=y, z=-2x, 2(x-x^2) + 6(2x+2) = 0$   
 $2zx = 6y + 2y^2$   
 $\frac{xyz}{zx} = \frac{2(z+3) + x(x+3)}{y(y+3)}$   $0 + 3x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 0, x=0$   
 $y^2 = \frac{z(z+3)x(x+3)}{2(y+3)}$   ~~$x^2 - 2xz + z^2 + 6x + 3z = 0$~~   
 $x^2 y^2 z^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3)$  6 корней ~~6 корней~~  
 $xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$   $P_1 = \frac{1}{2}$   $\frac{y}{x} = \frac{3}{7}, \frac{z}{x} = \frac{1}{2}, \frac{y}{z} = \frac{4}{7}$   
 $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- 1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$AB^2 = BE^2 + AE^2$

$AD^2 = DP^2 + AP^2$

$AD^2 = 36 - BC^2$

$\frac{BD}{AE} = \frac{DT}{TE} = \frac{BT}{AT} = k$

$100 = AD^2 + DC^2$

$DC^2 = DP^2 + PC^2$

$AD^2 = 100 - DP^2 - PC^2$

$100 - DP^2 - PC^2 = DP^2 + AP^2$

$100 - 2DP^2 - PC^2 - AP^2 = 0$

$100 - 2DP^2 - (10 - AP)^2 - AP^2 = 0$

$100 - 2DP^2 - 100 + 20AP - AP^2 - AP^2 = 0$

$DP^2 = -AP^2 + 10AP$

$AD^2 = AP^2 - AP^2 + 10AP, \quad AD^2 = 10AP$

$AD^2 = \frac{11 \cdot 25}{9}$

$AP^2 = \frac{AD^2}{10}$

$AP = \frac{11 \cdot 25}{90} = \frac{11 \cdot 5}{18} = \frac{11 \cdot 10}{36}$

$6 \cdot \frac{AD^2}{10} = S_{\triangle} AD$

$AD = \sqrt{\frac{S_{\triangle} \cdot 10}{6}}$

$AD = \sqrt{\frac{5 \cdot 5}{3}}$

$BE^2 = BD^2 + DE^2 - 2BD \cdot DE \cdot \cos \angle$

$25 = 9 + 9 - 18 \cos \alpha \leq 25$

$AB^2 = BE^2 + AE^2$

$AC = 10$

$AD = AT + TD = k \cdot TE + \frac{BT}{k}$

$\angle ADE = \angle ABE$

$\triangle ABR \sim \triangle ABE$

$\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DP} = \frac{AE}{AP}$

$AB \cdot AP = AE \cdot AD$

$6AP = S_{\triangle} AD$

$6 \frac{AD^2}{10} = S_{\triangle} AD$

$\frac{3}{5} AD = S_{\triangle} AD \quad AD = \frac{5}{3} S_{\triangle} AD$

$AD^2 = \frac{25}{9} \cdot 11, \quad AP^2 = \frac{25 \cdot 11}{90}$

$\angle BOE \leq 90^\circ$

$N4$   
 $B = \text{права}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.










СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a = x - \frac{15}{2}$$

$$b = \frac{y}{6\sqrt{3}}$$

$$|a+b| + |a-b| \leq 3$$

$$a \geq b \geq 0$$

$$a \geq 0 \geq b$$

$$0 \geq a \geq b$$

$$a+b + a-b = 2a \leq 3$$

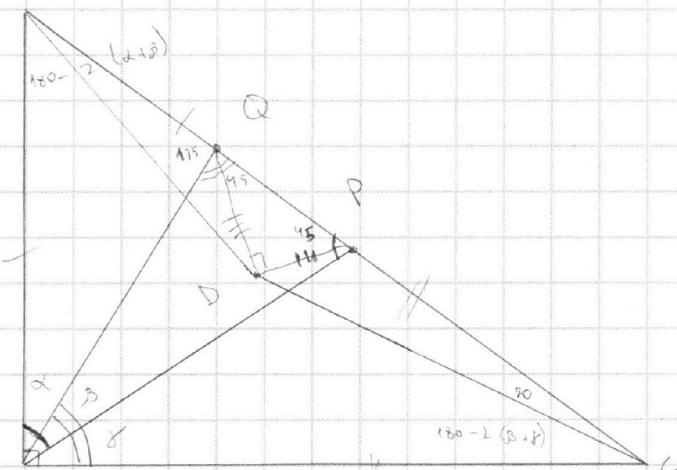
$$a+b + b-a = 2b \leq 3$$

$$a-b + a+b = 2a \leq 3$$

$$b-a + a+b = 2b \leq 3$$

$$-a-b + -a+b = -2a \leq 3$$

B



$$\angle B = 90^\circ, \angle C = 45^\circ$$

$$2B = 90^\circ$$

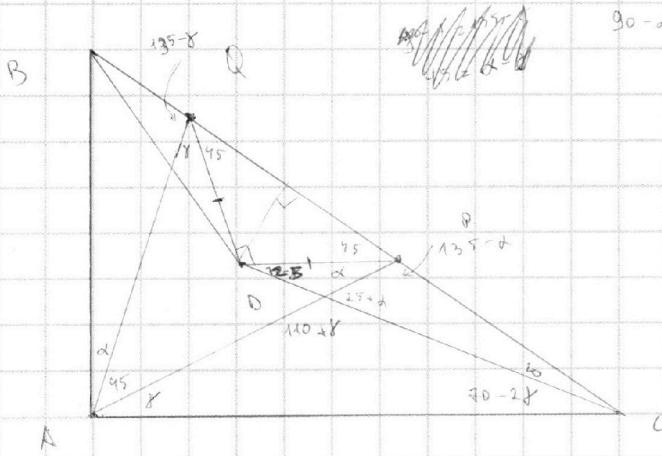
$$B = 45^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$x + y + z + f = 180^\circ$$

$$360 - \alpha - \beta - \gamma = 180$$

A



$$90 - \alpha + 135 - x = 180$$

$$25 - x = \gamma + 70 - f$$

$$135 - x$$

$$25 + x$$

$$25 - 70 - f$$

$$f = 45$$

$$2\alpha + 25 = 70 - f$$

$$\alpha + f + d = 55$$

$$25 + x = 2\gamma$$

$$25 + x = 2\gamma$$

$$BQ^2 + CQ^2 = BC^2$$

$$(BQ + CP + PQ)^2 = BQ^2 + CP^2 + PQ^2 + 2BQ \cdot CP + 2CP \cdot PQ + 2PQ \cdot BQ = BC^2$$

$$(BQ^2 + CP^2) + (CP^2 + PQ^2) = BQ^2 + 2BQ \cdot CP + CP^2 + 2CP \cdot PQ + PQ^2 = BC^2$$

$$PQ^2 = 2BQ \cdot PC$$

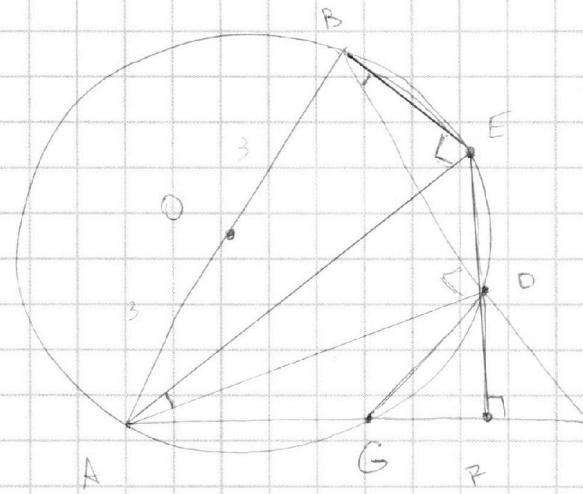


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_ из \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$AC = 10 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{и} \\ \text{б} \end{array} \right. BC = 8$$

$$AB = 6$$

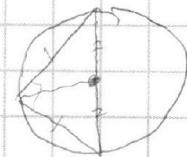
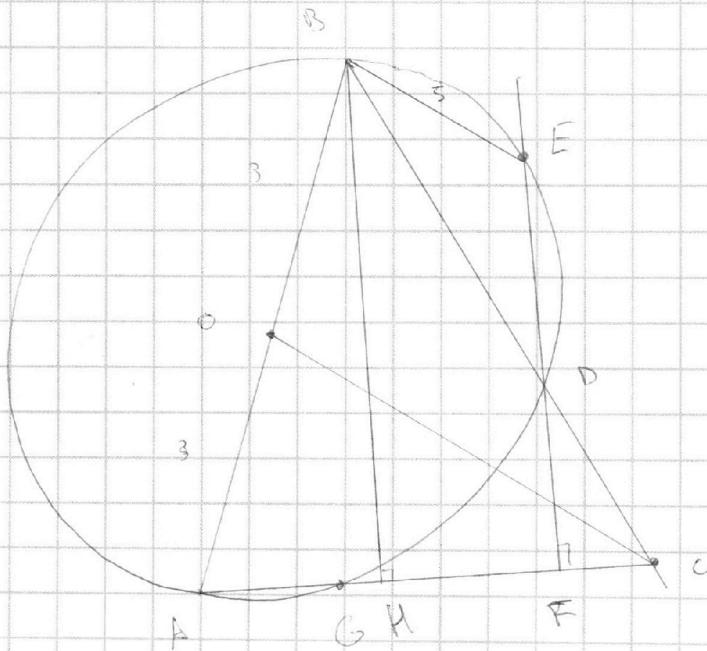
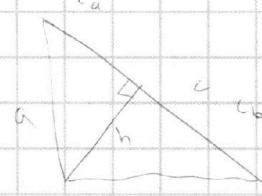
$$BE = 5$$

$$AE = \sqrt{11}$$

$$BD = \sqrt{36 - AD^2}$$

$$BC^2 = CA^2 - AB^2$$

$$b^2 = c_a^2 + h^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(-2; -2; 1)$$

решение: 18

$$x^2(x+3) = x^3 + 3x^2$$

$$(x+d)^2(x+d+3)$$

$$(x^2 + 2xd + d^2)(x + d + 3) =$$

$$xzky$$

$$kyz = z(z+3)$$

$$= x^3 + x^2d + 3x^2 + 2x^2d + 2x^2d + 6xd^2 + d^3 + 3d^2z$$

$$xyz = kyz(ky + 3)$$

$$= x^3 + 3x^2d + 3x^2 + 3d^2 + d^3 + 6xd^2 + 3d^2$$

$$kyz = y(y+3)$$

$$kz = y+3$$

$$z = y+3$$

К

$$kyz = \frac{y+3}{k} \left( \frac{y+3}{k} + 3 \right)$$

$$y \frac{y+3}{k} = kyz(ky + 3)$$

$$-3(v+y+z) - 9 = 3(v+y+z) + v^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{y+3}{k} = k^2y + 3ky$$

$$-9 = v^2 + y^2 + z^2 + 6(v+y+z)$$

$$y+3 = k^3y + 3k^2y$$

$$k^3y + 3k^2y - y - 3 = 0$$

$$y(k^3 + 3k^2 - 1) - 3 = 0.$$

$$y = \frac{3}{k^3 + 3k^2 - 1}$$

$$k^2y(k+3) - (y+3)$$

$$xyz = (y+3)(y+3)(z+3)$$

$$-(k^3 - 1) + 3(k^2y - 1) = 0$$

$$xyz = (ky + 3k^2y + 3) (z+3)$$

$$vyz = xyz + 3xy + 3xz + 9x + 3yz + 9y + 3z + 9$$

$$0 = \cancel{xyz} + 9v + 9z + 3(kyz) + 9$$

$$-3(x+y+z) = 2(kyz + yz) + 9$$

$$0 = k^2 + y^2 + z^2 + 6(v+y+z)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(ky + kz + yz)$$

$$(x+y+z)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$