



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



- ✓1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361? 17
- ✓2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N . 20
- ✓3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

- ✓4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом. 9575
- ✓5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2. \quad \sim$$

- ✓6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8. 1: $\frac{5-\sqrt{57}}{2}$
- ✓7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.

10°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n! + (n+1)! + (n+2)! = n! (1 + n+1 + (n+1) \cdot (n+2)) = \\ = n! (n+2)^2 : 19^2 (361)$$

тако $n! : 19^2$, тако $n+2 : 19 :$

$$1) n \geq 19^2; \min n = 19^2 = 361$$

$$2) n = 19k + 17; \min n = 17$$

(если $n! : 19$, то $n \geq 19$. Тут $n=17$ число кратно 361, значит при $\min n$ $n! : 19$, значит $(n+2)^2 : 19^2 \Rightarrow n+2 : 19$)

Ответ: $n=17$ $(17! \cdot 19^2 : 19^2)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 - 10 = N^3$$

(условие) x - медиана пяти чисел

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 - 10 = 5x^2 + 10 - 10 = \\ = 5x^2$$

$$5x^2 = N^3$$

$$5x^2 : 5, \text{ значит } N^3 : 5 \Rightarrow N : 5 \Rightarrow N : 5^3,$$

$$\text{значит } 5x^2 : 5^3 \Rightarrow x : 5.$$

Так как $N > 6$ можно представить N

в виде ~~5p~~ 5p (т.к. $N : 5$). Тогда

пусть $N : n^m$, где n -простое. Тогда

$$N \geq 5n^m$$

$$5^3 n^{3m} = 5 \cdot x^2 \Rightarrow x = 5 \cdot n^{\frac{3m}{2}} \Rightarrow m : 2, \text{ тогда}$$

$$\min n = 2 \text{ и } \min m = 2 \Rightarrow \min N = 5 \cdot 2^2 = 20$$

$$20^3 = 8000 = 5 \cdot 1600 = 5 \cdot 40^2 \quad (x = 40)$$

$$\text{Ответ: } N = 20$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 - 2x - 3 \geq 0$, т.к. под корнем не может находиться отрицательное число

$$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

1) $x \geq 3,5$:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 - 7 + 2x$$

$$14 \geq 4x \Rightarrow 3,5 \geq x, \text{ но } x \geq 3,5 \Rightarrow x = 3,5$$

2) $3 \leq x < 3,5$:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$0 \geq 0$ (при всех $x \in [3; 3,5]$) неравенство верно

3) $x \leq -1$:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 4x \quad | : 2$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x \quad (1 - 2x \geq 0, \text{ т.к. } x \leq -1,$$

значит $x^2 - 2x - 3 \geq (1 - 2x)^2$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 + 4x^2 - 4x$$

$$-3x^2 + 2x - 4 \geq 0$$

$D < 0$ и $a(-3) < 0$, значит $-3x^2 + 2x - 4 < 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит при $x < -1$ неравенство не верно

Ответ: $x \in [3; 3,5]$

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

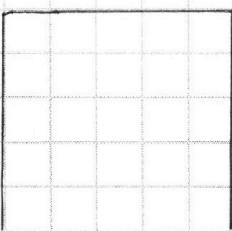
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

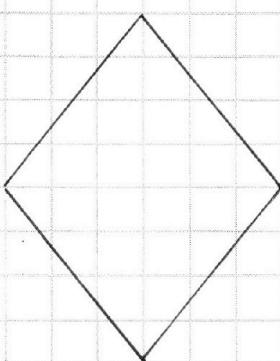
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Под уравнение $x^2 + y^2 = 25$ подходят пары $(3; 4)$ и $(5; 0)$ в каком-то порядке, то есть всего два отрезка (два отрезка при ~~повороте~~ в решении повороте на 90° в решении считались как один)

Значит всего 5 различных ромбов (так как всего 2 выбрать отрезок и 2, из-за поворота на 90° , то при выборе 1 вид и 2 вид = 2 вид и 1 вид, значит - 2, а при повороте квадрат не изменился, $-1. 8-2-1=5$)



- всего 2025 ($45 \cdot 45$)



- всего $1848 \cdot 2$ ($44 \cdot 42$ и 2 из-за поворота)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- Всего $1927 \cdot 2$ ($47 \cdot 41$ и $\cdot 2$, поворот)

Общая сумма = $2025 + 3696 + 3854 = 9575$

Ответ: 9575

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Строчку длиной 5 можно получить 2 способами: прямая, параллельная оси из осей и прямая, координаты которой $(x; y)$ и $(x+3; y+4)$ (координаты могут меняться по типу: из $(x; y) \rightarrow (x+3; y)$ в $(x; y) \rightarrow (x+4; y+3)$).

Других способов нет, т. к. по теореме Пифагора $x^2 + y^2 = 5^2$ (x и y - половины диагоналей ромба). x и y - целые числа, т. к. любую прямую не параллельную осям можно проектировать на оси (то есть $x = x_1 - x_0$, $y = y_1 - y_0$).

для прямых (отрезка AB , где $A(x_1; y_1)$, $B(x_0; y_0)$). Если $AB \parallel OX$ или $AB \parallel OY$, то либо $x=0$; $y=5$, либо $x=5$; $y=0$.

$$x=1 \Rightarrow y^2 = 24 \quad (-, \text{ т. к. не квадрат})$$

$$x=2 \Rightarrow y^2 = 21 \quad (-) \quad x=4 \Rightarrow y^2 = 9 \quad (+)$$

$$x=3 \Rightarrow y^2 = 16 \quad (+) \quad x=5 \Rightarrow y^2 = 0 \quad (+) \quad x=0 \Rightarrow y^2 = 25 \quad (+)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

Если $x < 0$, то $19 \cdot 2^x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 19 \cdot 2^x + 2025 \notin \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$, противоречие.

Если $x \geq 2$, то $19 \cdot 2^x + 2025 \equiv 2^x \equiv 2 \pmod{3}$, значит
 $y \equiv 2 \pmod{3}$, противоречие, т.к. квадрат не
может давать остаток 2 при делении
на 3. Значит $x \leq 2$.

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

||

$$\cancel{45 \cdot 2^x + 2025 = y^2 - 64 \cdot 2^x}$$

$$\cancel{45(2^x + 45) = y^2 - 3}$$

$$2025 - 45 \cdot 2^x = y^2 - 64 \cdot 2^x$$

$$45(45 - 2^x) = (y - 2^{\frac{x+6}{2}})(y + 2^{\frac{x+6}{2}})$$

Можно заметить, что при $x \geq 6$,

$2^{\frac{x+6}{2}} \leq 2^3$, значит $45 - 2^x \leq y - 2^{\frac{x+6}{2}}$ (т.к. $y \geq 45$)

также $y + 2^{\frac{x+6}{2}} \geq 45$. Значит при $x \geq 6$

$$45(45 - 2^x) < (y - 2^{\frac{x+6}{2}})(y + 2^{\frac{x+6}{2}})$$

$$1) x=0: 19 + 2025 = 2044 (-)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) X=2 : \quad 76 + 2025 = 2101 \quad (-)$$

$$3) X=4 : \quad 304 + 2025 = 2329 \quad (-)$$

Значит решений нет

Ответ: таких пар нет

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad - \text{ уравнение окружности, значит} \\ x \in [-a; a].$$

1) Если $a \geq 0$:

$$\max x^2 = a^2 \quad \text{и} \quad \max -6x = 6a, \quad \text{данные ра-}$$

внемства выполняются при $x = -a$, значит

$$a^2 + 6a + a = a^2 + 7a = 8 \quad (a = \text{const} \quad \beta \quad x^2 - 6x + a)$$

$$D = 49 + 32 = 81$$

$$a_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{2} = \begin{cases} 1 \\ -8 \end{cases} \quad (-, \text{ m.k. } a \geq 0) \Rightarrow a = 1$$

2) Если $a < 0$:

$$\max x^2 = a^2 \quad \text{и} \quad \max -6x = -6a, \quad \text{значит}$$

$$x = a.$$

$$a^2 - 6a + a = a^2 - 5a = 8$$

$$D = 25 + 32 = 57$$

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{57}}{2} \quad \left(\frac{5 + \sqrt{57}}{2} > 0, \text{ не подходит} \right),$$

$$5 - \sqrt{57} < 0, \quad \text{m.k. } 25 < 57 \quad (5 < \sqrt{57})$$

$$\text{значит } a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2} \quad \text{и} \quad a = 1$$

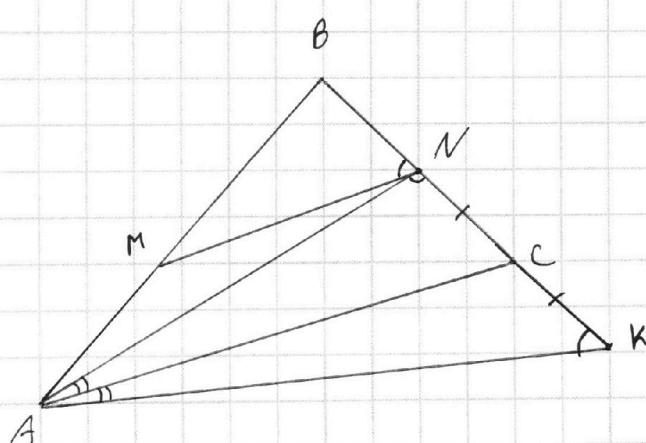


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$$

$$BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$$

Пусть NC за точку C так, чтобы $NC = CK$ (K -точка за BC), тогда:

$$NC = CK.$$

$$BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC \quad | + BN \cdot BM$$

$$BN \cdot BM + BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC + BN \cdot BM$$

$$BN(BM + MA) = BM(2NC + BN)$$

$$BN \cdot AB = BM \cdot BK$$

$$\frac{BN}{BK} = \frac{BM}{AB}$$

, значит $\triangle BMN$ и $\triangle ABK$ подобные $\Rightarrow \angle AKB = \angle MNB = 80^\circ$, значит

$\triangle ANK$ - μ/δ , т.к. $\angle ANK = 80^\circ = \angle AKN$,

значит AC - медиана и биссектриса



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

одновременно.

$MN \parallel AK$, т. к. $\angle MNB = \angle AKN$, значит

$\angle MNA = \angle NAK = 180^\circ - \angle MNB - \angle ANC = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$.

$\angle NAK = 20^\circ \Rightarrow \angle NAC = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$

Ответ: $\angle CAN = 10^\circ$

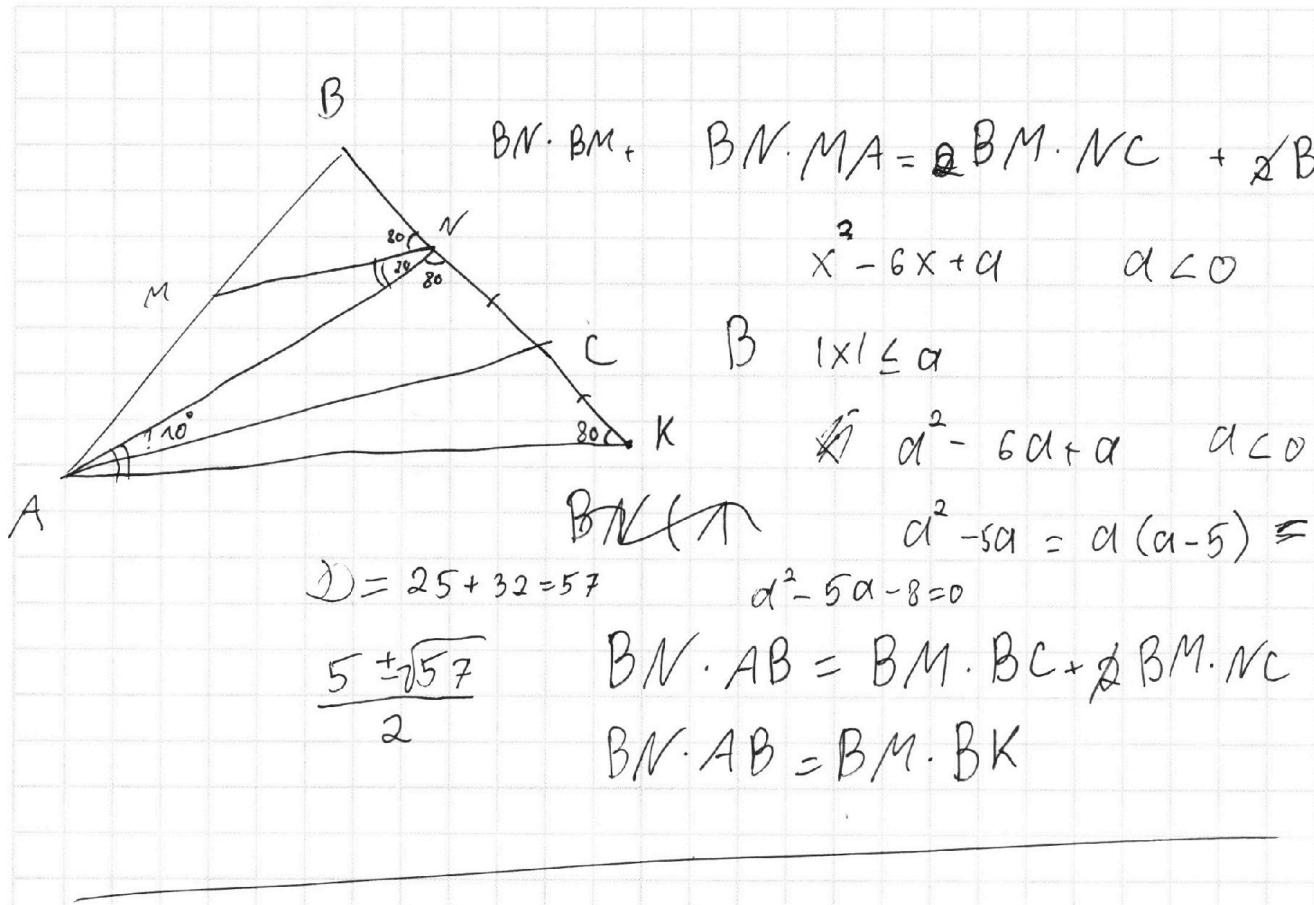


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
0 из 0

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 = a^2$$

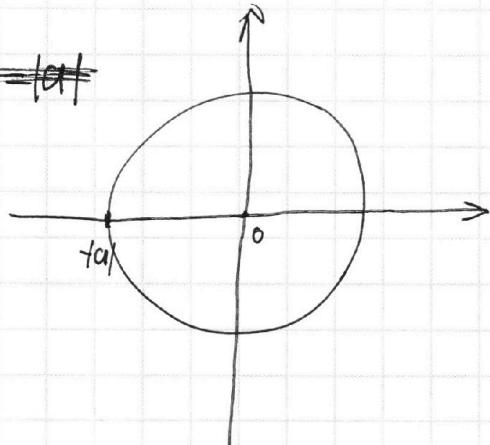
~~$|x| + |y| = a$~~

$$x^2 - 6x + a \leq 8$$

$$|a| \leq 8$$

~~$\frac{6}{\sqrt{57}}$~~

$$a(a-5) \leq 8$$



$$x^2 - 6x + a \leq a^2 + 6a + a = a(a+7) \leq 8$$

$$x^2 - 6x + a \leq a$$

$$\boxed{|a| \leq 1}$$

~~$x = 8$~~

~~$A6$~~

$$x = 6$$

$$a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
0 ИЗ 0

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-3)(x+1) = A$$

$$x \geq 3,5$$

$$0,5 \leq x < 3,5 \quad (3 \leq x \leq 3,5)$$

$$\sqrt{A} + 6 \geq |\sqrt{A} + 2x - 1| + |7 - 2x| \quad \times$$

$$\sqrt{A} + 6 \geq \sqrt{A} + 2x - 1 - 7 + 2x \quad y = 44 \quad x < 0,5 \quad (x < -1)$$

$$6 \geq 2x - 8 \quad y^2 + 19^2 \cdot 2^{x-1} + 19 \cdot 2^x \cdot 44 \quad 0 \quad 0$$

$$4x \leq 14 \quad 1) x \geq 3,5 \quad 3 \leq x \leq 3,5 \quad 1 \quad 1$$

$$x \leq 3,5 \quad y > 45 \quad y = k + 44 \quad 2 \quad 4$$

$$6 \geq 2x - 1 + 7 - 2x \quad \begin{array}{r} \cancel{x} \\ \cancel{46} \\ + \cancel{184} \\ \hline 2036 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{x} \\ \cancel{96} \\ + \cancel{184} \\ \hline 276 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{x} \\ \cancel{96} \\ + \cancel{184} \\ \hline 2116 \end{array} \quad 0 \quad 1, [4]$$

$$\sqrt{A} + 6 \geq -\sqrt{A} - 2x + 1 + 7 - 2x \quad 8 \text{ и } 6$$

$$2\sqrt{A} \geq 2 - 2x \quad | : 2 \quad 91 \quad x^2 + y^2 = 5^2$$

$$\sqrt{A} \geq 1 - x \quad \begin{array}{r} \cancel{x} \\ \cancel{2x-3} \\ + \cancel{2x} \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{x} \\ \cancel{2x-3} \\ + \cancel{2x} \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{cases} y = 19k + 12 \\ y = 64k + 19 \end{cases}$$

$$-3 \geq 1 \quad (y = 19 \cdot 2^x)(y + 19 \cdot 2^x) = 45^2 \quad = 3k + 1 = 9t + 1$$

$$2^k + 46 =$$

$$+ 19 \cdot 2^x + 45 = y^2 \quad (A) \quad \begin{array}{r} \cancel{y^2} \\ \cancel{y^2} \\ + \cancel{45} \\ \hline y^2 \end{array} \quad y^2 \equiv 1 \quad y^2 \equiv -2^x$$

$$19 \cdot 2^x \equiv y \quad (y - 45)(y + 45) = 19 \cdot 2^x \quad \begin{array}{r} \cancel{y^2} \\ \cancel{y^2} \\ + \cancel{45} \\ \hline y^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{y^2} \\ \cancel{y^2} \\ + \cancel{45} \\ \hline y^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} y = 2^k + 1 \\ 2^k(2^k + 45) = 19 \cdot 2^x \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
0 из 0

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 - 10 = N^3$$

~~5x² = N³~~

$$19 \cdot 2^x + 45^2 = y^2$$

$x > 0$

$$x : 2 \quad y \neq 2$$

~~N²~~

$$5x^2 + 10 - 10 = N^3$$

$$(y-45)(y+45) = 19 \cdot 2^x$$

$$5x^2 = N^3$$

$$\text{mod } 19: \quad (y-45)(y+45) \equiv 0 \pmod{19}$$

$$N : 5 \quad N > 6 \quad N = 10 \Rightarrow x =$$

$$(2^k - 44)(2^k + 46) = 19 \cdot 2^x$$

$$2^{2k} + 2^{k+1} - 2^k - 2^{k+2} - 11 \cdot 2^3 = 19 \cdot 2^x$$

$$\boxed{x=3}$$

$k \geq 6$

~~2^{k+1}~~

$k \geq 3$

$k = 2$

~~18³ = 512~~

~~5³~~

$$x : p \quad (p \neq 5)$$

~~8.~~

$$x : p^6$$

"

~~5⁶~~

$$N^3 : p^6$$

~~1512 + 2025~~

$$2^{2k-3} + 2^{k-2} - 6 : 19$$

$$2^{2k} + 2^{k+1} - 2^k - 2^{k+2} - 11 \cdot 2^3 = 19 \cdot 2^x$$

$$x = 5 \cdot 2^3 = 40$$

$$1600 \cdot 5$$

$$N = 5 \cdot 2^2 = 20$$

$$8000$$

$$\begin{array}{r} + \\ - \\ \hline -1 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$1) x^2 - 2x - 3 \geq 0 \quad (x-3)(x+1) \geq 0$$

$$4 + 12 = 16 = 4^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 3 / -1$$

$$2151$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
0 ИЗ 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

2025

2116

2209

$$n! + (n+1)! + (n+2)! \quad \cancel{13872} : 19^2$$

~~19.19~~

$$N = 5 \cdot p^q \Rightarrow 5^3 \cdot p^{3q} = 5^1 \cdot X^2$$

~~X=5~~

$$X = 5^2 \cdot p^{3q}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{11} \\ q : 2 \end{array}$$

$$X = 5^{\frac{3q}{2}} \cdot p^{\frac{3q}{2}}$$

$$X + Xn + X + (Xn + X)(n+2) = 4X + 4Xn + Xn^2 = 0$$

$$X(4 + 4n + n^2) = 0$$

$$X(n+2)^2 : 19^2 \times \cancel{47}$$

$$X = 0$$

$$4 + 4n + n^2 = 0 = (n+2)^2$$

$$\begin{array}{r} n+2 : 19 \\ - \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{209} \\ + \cancel{188} \\ \hline \cancel{2089} \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{329} \\ + \cancel{188} \\ \hline \cancel{2109} \end{array}$$

$$4n - 4 \cdot 4 = 0$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ + 276 \\ \hline 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$T+V+T = 5202 + T \cdot 62$$

$$17! + 18! + 19! = 17! (1 + 18 + 18 \cdot 19) = 17! \cdot (19(1 + 18)) =$$

$$= 19^2$$

$$y^2 \equiv 2 \pmod{9}$$

0
1
4

~~125~~

$$x = 2$$

$$y^2 = 21 \Rightarrow 19$$

$$18k+19$$

$$2 - 9k = 4$$

0
1
4



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
0 ИЗ 0

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \Rightarrow y^2 > 2025 \Rightarrow |y| > 45$$

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 45^2 \quad 45(2^x + 45) = (y - 2^{\frac{x+6}{2}})(y + 2^{\frac{x+6}{2}})$$

$$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45) \quad y^2 - 2^{x+6}$$

Пусть $|y| = 2^k + 1$, тогда $y^2 = 2^{2k} + 2^{k+1} + 1$

(Заметим, что любое чётное число можно представить в виде 2^k)

$$y : p \Rightarrow 19 \cdot 2^x + 2025 : p$$

445

~~5721~~ ~~470~~

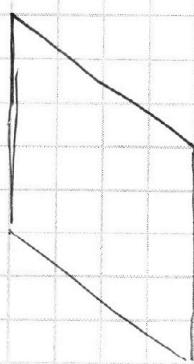
~~3259~~
~~4548~~

$$2^x = \frac{(y-45)(y+45)}{19} \quad y+45 = 2^k \quad y-45 = 2^x$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 19 \\ \hline 184 \\ +176 \\ \hline 1848 \end{array} \quad y-45 : 19 \quad y+45 : 19$$

$$y = 45 + 19k \quad y = 12 + 19k = 50 + 19k$$

$$+ \begin{array}{r} 19 \\ \times 16 \\ \hline 154 \\ +16 \\ \hline 304 \end{array}$$



$$44 \cdot 42 =$$

$$= \frac{41}{47} \times 47$$

$$= +188$$

$$\hline 1927$$

$$47 \cdot 41 =$$

$$=$$

$$90 + 19k = 2^k \quad -90$$

$$19k + 5 = 2^x$$

$$y-45 = 19 \cdot 2^{x-k}$$

$$y+45 = 2^{x-k}$$

$$2 - 90 = 19 \cdot 2^{x-k}$$

$$2 - 95 = 19 \cdot 2^{k-1}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
0 ИЗ 0

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего два вида таких ромбов: квадрат со стороной 5 и ромб с диагональями 6; 8.

Других быть не может, т. к. тогда по теореме Пифагора $x^2 + y^2 = 25$, где x и y половины диагоналей. Заметим, что у диагоналей целочисленные координаты

$$\begin{matrix} \times \\ -2 \end{matrix}$$

$$x > 3$$

$$x = 4 \quad x = 2$$

$$x = 4$$

$$x = 6$$

$$-149 \cdot 2 + 2025 = y^2 \Rightarrow -64$$

$$2x$$

$$19 \cdot (2+16) + 14 = y^2$$

$$45^2 - 45 \cdot 2^x = y^2 - 64 \cdot 2^x$$

$$45(45-2^x) = (y-8 \cdot 2^x)$$

$$45(45-2^x) = (y - \frac{2^3}{2})(y + \frac{2^3}{2})$$

$$10 \cdot 2^x + 2025 = y^2 - 9 \cdot 2^x$$

$$(y - 2^{\frac{x+6}{2}})(y + 2^{\frac{x+6}{2}})$$

By

~~$$2 + 45 \cdot 2^x + 2025$$~~

$$45 \cdot 2^x + 2^{\frac{x-1}{2}} = 2^{\frac{x-1}{2}} (45 \cdot 2 + 1) =$$

$$= 91 \cdot 2^{\frac{x-1}{2}}$$

~~$$19 \cdot 2^x = 23 \cdot 2^{\frac{x-1}{2}}$$~~