



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном  $n$  число  $n! + (n + 1)! + (n + 2)!$  делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа  $N$ , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение  $N$ .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка  $[1; 50]$ . Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых для множества точек плоскости  $Oxy$ , задаваемых уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ , наибольшее значение выражения  $x^2 - 6x + a$  равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$ . Найдите  $\angle CAN$ , если известно, что  $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n! + (n+1)! + (n+2)! \stackrel{\text{№ 1}}{=} 361$$

$$n! \cdot (1 + (n+1) + (n+1)(n+2)) = 361$$

$$n! \cdot (n+2)(n+2) = 361 \quad (361 = 19^2, 19 - \text{простое})$$

Пусть  $n < 19 \Rightarrow n! \neq 19$  (т.к. 19 - простое, никакое  $a \in \mathbb{N}$  и  $n < 19$  не делится на 19)

$$\Downarrow \\ n+2 = 19, \quad n < 19$$

$\Downarrow$

$$n = 17$$

$$\text{Тогда } n! \cdot (n+2)^2 = 17! \cdot 19^2 = 361$$

Для  $n \geq 19$   $n > 17$ , значит  $\div 17$  - наименьшее значение  $n$ .

$$\text{Ответ: } n = 17.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть даны числа  $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ .

Тогда сумма их квадратов:

$$n^2 + (n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 4n + 4) + (n^2 + 6n + 9) + (n^2 + 8n + 16) = 5n^2 + 20n + 30$$

По условию  $(5n^2 + 20n + 30) - 10 = N^3, N > 6, N \in \mathbb{N}$

$$5n^2 + 20n + 20 = N^3$$

$$5(n^2 + 4n + 4) = N^3$$

$$5(n+2)^2 = N^3$$

$$\div 5 \Rightarrow \div 5, \text{ но т.к. } N^3 - \text{куб а 5-простое, } N^3 : 5^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(n+2)^2 : 5^3 \Rightarrow (n+2)^2 : 5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+2 : 5$$

Но  $n+2 \neq 5$ , т.к. тогда  $N^3 = 5^3$  и  $N=5$ , а  $N > 6$ .

Значит,  $n+2 = 5 \cdot p_1^{k_1} \cdot p_t^{k_t}$ , где  $k$  и  $t$  - натуральные числа, а  $p_i$  - любые простые числа. ( $p_i \neq p_j$ , где  $i \neq j$ )

$$\text{Тогда } 5(n+2)^2 = 5^3 \cdot p_1^{2k_1} \cdot p_t^{2k_t} = N^3$$

Тогда, т.к.  $p_i$  - простое  $2k_i : 3$ , т.к.

$$k_i : 3$$

$p_i^{2k_i}$  - куб

Если мы хотим наименьшее значение  $N$ , нам нужно



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

наименьшее значение  $n \Rightarrow t$  и  $k$  равно  $n$  или  $n+1$   
 $\Rightarrow t=1$  и  $k=3$  (м.к.  $k \in \mathbb{N}$  и  $k:3 \nmid n$ )  
Тогда  $n+2 = 5 \cdot p^k$ , но  $5 \cdot p^k$  мин тогда, когда  $p=2$ ,  
м.к.  $p$ -простое.  
 $n+2 = 5 \cdot 2^3 = 40$   
 $n=38 \Rightarrow N^3 = 5 \cdot (n+2)^2 = 5 \cdot 40^2 = 20^3 \Rightarrow N=20$ .  
Ответ:  $N=20$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + |2x - 1| + |7 - 2x|$$

1)  $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$ , когда  $2x - 1 \geq 0$ , т.к.  
 $2x - 1 \geq 0$   
 $2x \geq 1$   
 $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$  при  $x \geq \frac{1}{2}$   $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 < 0$   
 $\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$  всегда.

2)  $7 - 2x \geq 0$

$$7 \geq 2x$$

$$3,5 \geq x, \text{ при } x < 3,5 \quad 7 - 2x < 0.$$

Тогда, раскрывая модули, у нас 3 случая:

a)  $x < \frac{1}{2}$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 = -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1$$

$$|7 - 2x| = 7 - 2x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 2 - 4x$$

РДЗ:  $x^2 - 2x - 3 \geq 0$   
 $(x-1)^2 - 4 \geq 0$   
 $(x-1) \geq 2$   
 $|x-1| \geq 2$   
 $\begin{cases} x-1 \geq 2 \\ x-1 \leq -2 \end{cases}$   
 $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\nearrow 2 - 4x \geq 0, \text{ т.к. } 2 \geq 4x, \text{ т.к. } \frac{1}{2} > x$$

$\Downarrow$  Мы можем возвести нер-во в квадрат:

$$4x^2 - 8x - 12 \geq 4 + 16x^2 - 16x$$

$$0 \geq 16 + 12x^2 - 8x \quad | :4$$

$$0 \geq 4 + 3x^2 - 2x$$

$$0 \geq \underbrace{(x-1)^2}_0 + \underbrace{2x^2}_0 + \underbrace{3}_0$$

$\Downarrow$   
Это невозможно

$$\delta) \frac{1}{2} \leq x \leq 3,5$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1$$

$$|7 - 2x| = 7 - 2x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + \underbrace{2x - 1 + 7 - 2x}_6$$

$$0 \geq 0$$

Это верно для любого  $x$ , кроме  $x < \frac{1}{2}$ ,  $x > 3,5$ ,

и кроме  $x^2 - 2x - 3 < 0$

$$(x-1)^2 - 4 < 0$$

$$(x-1)^2 < 4$$

$$|x-1| < 2$$

$$-2 < x-1 < 2$$

$$-1 < x < 3 \Rightarrow \text{пункт B верен для любых}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \leq x \leq 3,5$$

$$6) 3,5 \leq x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x - 1 = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1$$

$$-7 - 2x = 2x - 7$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 2x - 7$$

$$6 \geq 4x - 8$$

$$14 \geq 4x$$

$$7 \geq 2x$$

$$3,5 \geq x, \text{ но } x < 3,5$$

Противоречие.

$$\text{Ответ: } x \in [3; 3,5]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

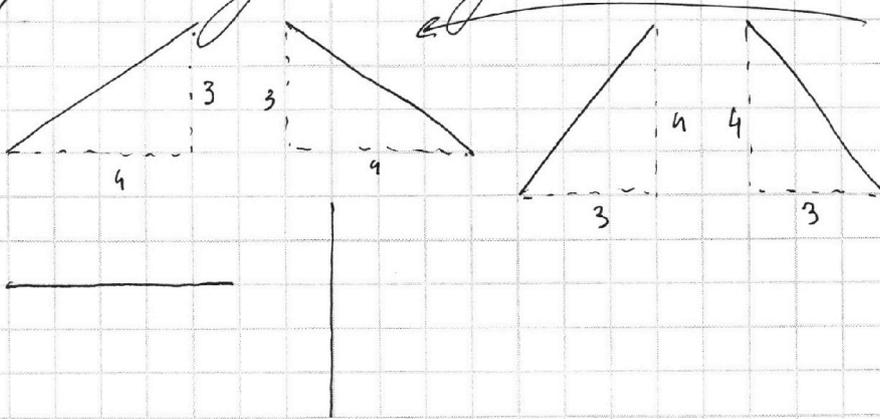
Заметим, что отрезок длины 5, соединяющий узлы сетки, можно достроить до прямоугольного  $\triangle$ , проведя к одному концу отрезка перпендикуляр  $\parallel O_x$ , а к другому  $\parallel O_y$ , тогда длины катетов будут целыми числами, и свои длины имеют  $a$  и  $b$ , но  $a^2 + b^2 = 25$ . (по теореме Пифагора)

$$a \in \mathbb{Z} \text{ и } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{либо } a=0, b=5; a=5, b=0;$$

$$a=3, b=4; a=4, b=3$$

т.к.  $a$  и  $b \leq 5$ , а если  $a$  или  $b = 2$ , то  $a^2$  или  $b^2 = 21$ , и  $a$  или  $b$  будет не целое.

Значит, на координатной плоскости стороны ромба могут вывестись 6 способами (т.к.  $a=3$  и  $b=4$  может быть в разном порядке)



так же  $a=4$  и  $b=3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1     2     3     4     5     6     7

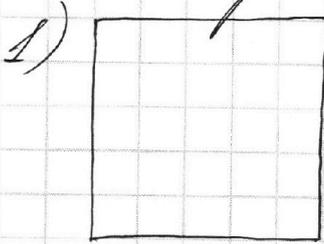
СТРАНИЦА  
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

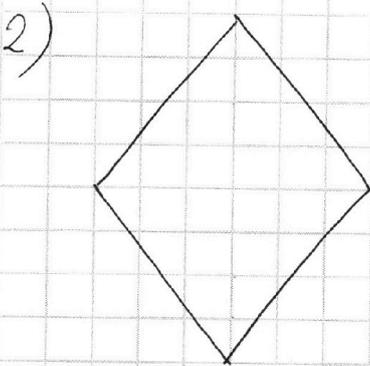
Любой ромб составляется из 2 видов сторон, т.е.  
в нем по 2 пары параллельных сторон.

Тогда таких ромбов  $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$  (в кол-во способов выбрать 2 разные стороны из 6)

Рассмотрим для каждого кол-во способов его расположения: ~~каждый ромб можно расположить по-разному~~ ~~внутри квадрата~~

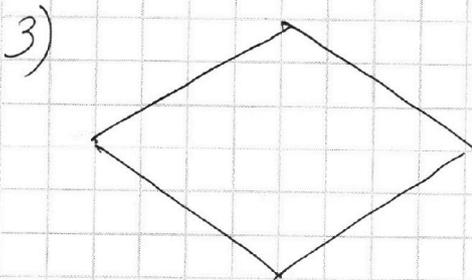


Вариантов для размещения ромба на клеточном поле, что все вершины были внутри или на сторонах квадрата  $50 \times 50 - 46 \cdot 46$



Вариантов для размещ. ромба ~~на клеточном поле~~ ~~внутри квадрата~~ ~~так~~ ~~чтобы~~ ~~соблюдалось~~ ~~условие~~:

44 · 42 ← второе число - кол-во координат по оси Oy,   
 ← первое число - кол-во координат по оси Ox,



Аналогично 2) -  $44 \cdot 42$  (но в повернутом виде)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4)  $403.43 \ 8)$

5)  $43.43$

6)  $46.42$

7)  $46.42$

8)  $47.41$

9)  $47.41$

10)  $41.47$

11)  $41.47$

12)  $42.46$

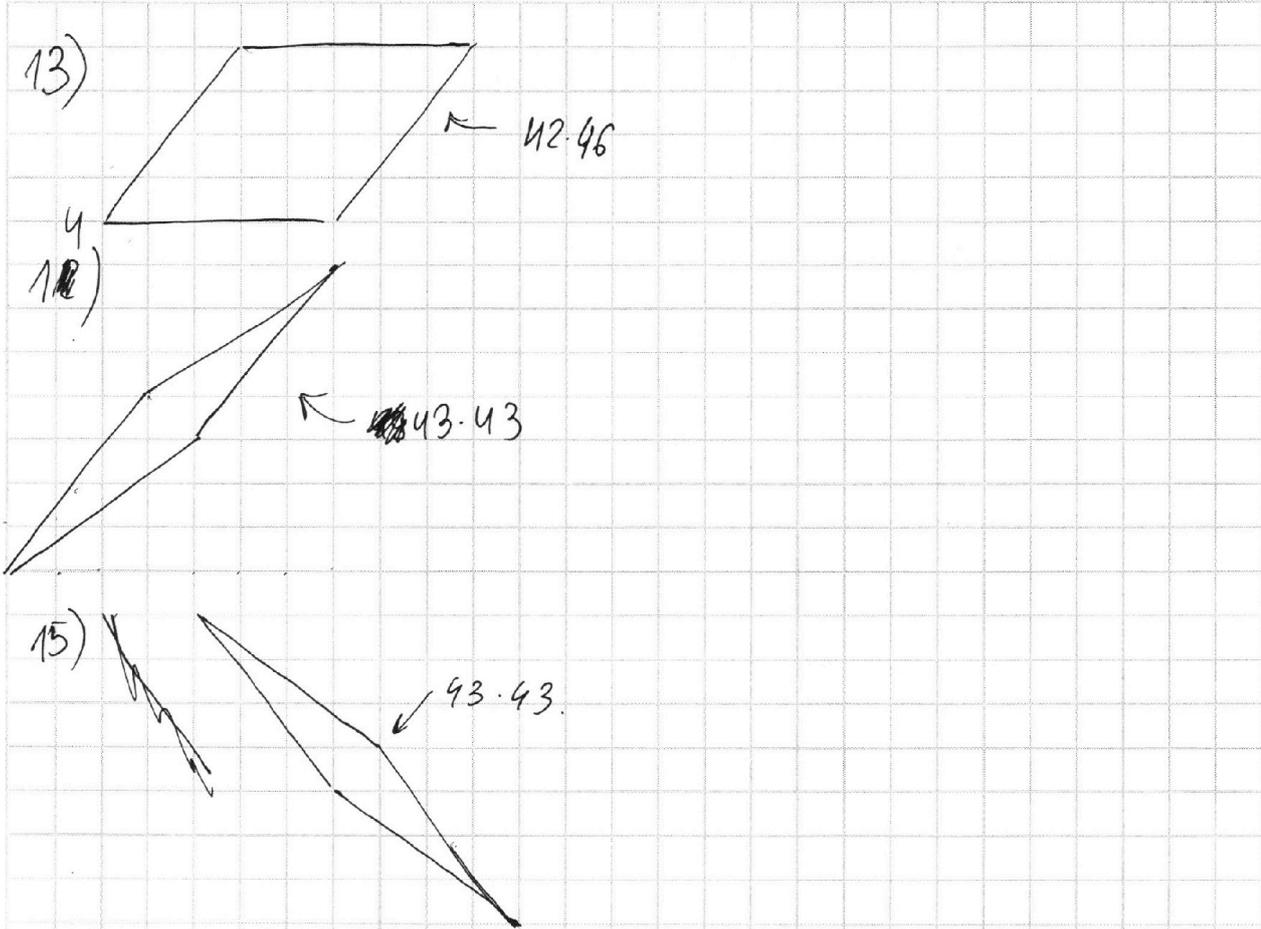


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Мы рассмотрим кат-во вершины, для каждой воз-  
можной пары. Сложим их:

$$\begin{aligned}
 & 46^2 + 44 \cdot 42 + 44 \cdot 40 + 43^2 + 43^2 + 46 \cdot 42 + 46 \cdot 42 + \\
 & 47 \cdot 41 + 47 \cdot 41 + 41 \cdot 47 + 41 \cdot 47 + 42 \cdot 46 + 42 \cdot 46 + \\
 & + 43^2 + 43^2 = 46^2 + 4 \cdot 43^2 + 4 \cdot 41 \cdot 47 + 4 \cdot 46 \cdot 42 + 2 \cdot 44 \cdot 42 = \\
 & = 46^2 + 4 \cdot 43^2 + 4 \cdot 41 \cdot 47 + 42(4 \cdot 46 + 2 \cdot 44) = 46^2 + \\
 & + 4(43^2 + 41 \cdot 47) + 42(4 \cdot 46 + 2 \cdot 44) = 2116 + \\
 & + 4(1849 + 1927) + 42(184 + 88) = 2116 + 9 \cdot 3776 +
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$+ 42 \cdot 272 = 2116 + 15104 + 1424 = 28644$$

Ответ: ~~18318~~ 28644



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 2025 = (y-45)(y+45) \quad \text{№5}$$

19 и 2 - простые числа

Пусть  $x \geq 1$ .

Тогда либо  $y-45$ , либо  $y+45$  делится

~~на~~ на 12, но не делится на 4, либо не делится на 2.

Итак: пусть  $y-45:4$  и  $y+45:4$ .

Тогда ~~и~~  $y-45 + y+45:4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2y:4 \Rightarrow y:2 \Rightarrow y+45:2$$

но  $y+45:4$ .

Противоречие.

Значит, рассмотрим, чему могут быть равны

свойки: 19 и  $2^x$ ; ~~и~~  $2^x$  и 19;

(в порядке  $(y-45)$  и  $(y+45)$ )

$19 \cdot 2$  и  $2^{x-1}$ ;  $2^{x-1}$  и  $19 \cdot 2$ ; 1 и  $19 \cdot 2^x$ ;  $19 \cdot 2^x$  и 1;

2 и  $19 \cdot 2^{x-1}$ ;  $19 \cdot 2^{x-1}$  и 2. (т.к. мы считаем

но  $(y-45)$  и  $(y+45)$  имеют

одинаковую четность, т.к.  $y \equiv y$  и  $-45 \equiv 45$ .

Могут быть только варианты:

распределить множители  
 $2, 2^{x-1}$  и  $19$  по 2 скобкам  
и  $y$  нас  $2^2=8$

вариантов  
для  $y$  мож.  $2^2=8$   
и  $19$  только все для  $y$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2 \text{ и } 2^{x-1}; 2^{x-1} \text{ и } 19 \cdot 2; -2^{x-1} \text{ и } -19 \cdot 2; -19 \cdot 2 \text{ и } -2^{x-1};$$

$$2 \text{ и } 19 \cdot 2^{x-1}; 19 \cdot 2^{x-1} \text{ и } 2; -2 \text{ и } -19 \cdot 2^{x-1}; -19 \cdot 2^{x-1} \text{ и } -2.$$

Рассмотрим эти случаи:

1)  $y - 45 = 38, y + 45 = 2^{x-1}$     2)  $y - 45 = 2^{x-1}, y + 45 = 38$

$$38 + 90 = 2^{x-1}$$

$$128 = 2^{x-1}$$

$$x = 8$$

$$y = 83$$

$$2^{x-1} + 90 = 38$$

$$2^{x-1} = -52$$

Для  $x \geq 1$  такого  
значения не существует.

3)  $y - 45 = -2^{x-1}, y + 45 = -38$     4)  $y - 45 = -38, y + 45 = -2^{x+1}$

$$-2^{x-1} + 90 = -38$$

$$-2^{x-1} = -128$$

$$x = 8$$

$$y = -83$$

$$-38 + 90 = -2^{x+1}$$

$$52 = -2^{x+1}$$

Для  $x \geq 1$  такого  
значения не существует.

5)  $y - 45 = 2, y + 45 = 19 \cdot 2^{x-1}$

$$2 + 90 = 19 \cdot 2^{x-1}$$

$$92 = 19 \cdot 2^{x-1}$$

$$92/19$$

Противоречие

6)  $y - 45 = 19 \cdot 2^{x-1}, y + 45 = 2$

$$19 \cdot 2^{x-1} + 90 = 2$$

$$19 \cdot 2^{x-1} = -88$$

Противоречие

7)  $y - 45 = -2, y + 45 = -19 \cdot 2^{x-1}$     8)  $y - 45 = -19 \cdot 2^{x-1}, y + 45 = -2$

$$-2 + 90 = -19 \cdot 2^{x-1}$$

$$88 = -19 \cdot 2^{x-1}$$

Противоречие

$$-19 \cdot 2^{x-1} + 90 = -2$$

$$-19 \cdot 2^{x-1} = -92$$

Противоречие



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но есть для  $x \geq 1$  два решения  $-(8; 83)$  и  $(8; -83)$ .

Если  $x=0$ , то  $19 + 2025 = y^2$   
 $2044 = y^2$

Но  $45^2 = 2025$ , а  $46^2 = 2116$

$2025 < 2044 < 2116$

$\Downarrow$   
 $x \neq 0$

Если  $x < 0$ , то  $19 \cdot 2^x$  не целое, а  $y^2 - 2025$  - целое, т.к.  $y \in \mathbb{Z}$  и  $2025 \in \mathbb{Z}$ .

Но  $19 \cdot 2^x = y^2 - 2025$

Противоречие.

Ответ:  $(8; 83)$  и  $(8; -83)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 6x + a = 8$$

№ 6

$$x^2 - 6x + 9 + a = 17$$

$$(x-3)^2 + a = 17$$

Условие равносильно тому, что максимальное значение функции  $(x-3)^2 + a$  равно 17. Но  $a$  - параметр, значит,  $(x-3)^2 + a$  максимален тогда, когда  $x$  максимален. Но наибольший  $x$  в выражении  $x^2 + y^2 = a^2$  тогда, когда  $y^2$  минимален, т.к.  $a$  - константа.

Но  $y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2$  минимален при  $y=0 \Rightarrow x$  наибольший в  $x^2 = a^2$ .

~~Если  $a > 0$ , то~~ тогда  $x = \pm|a|$ . Но нам нужен  $x$  наибольший, но есть  $x = |a|$ .

$$\text{Тогда } |a|^2 - 6|a| + a = 8; \quad \cancel{|a|^2 - 6|a| + |a| = 8}$$

$$\text{Пусть } a > 0, \text{ тогда: } a^2 - 6a + a = 8$$

$$a^2 - 5a - 8 = 0$$

$$D = 5^2 + 4 \cdot 8 = 25 + 32 = 57$$

$$\cancel{x_1 = \frac{5 + \sqrt{57}}{2}} \quad a_{x_1} = \frac{5 + \sqrt{57}}{2}$$

$$\cancel{x_2 = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}} \quad a_{x_2} = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$$

Но  $a > 0 \Rightarrow a_2$  не подходит, т.к.  $57 > 25 \Rightarrow 5 - \sqrt{57} < 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a \neq 0$ , тогда:  $(-a)^2 + 6a + a = 8$

$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

$$D = 49 + 48 = 49 + 32 = 81$$

$$a_1 = \frac{-7 + \sqrt{81}}{2} = \frac{-7 + 9}{2} = 1$$

$$a_2 = \frac{-7 - \sqrt{81}}{2} = \frac{-7 - 9}{2} = -8$$

Ответ:  $a = \frac{5 + \sqrt{57}}{2}$ , либо  $a = -8$ . Но  $a < 0 \Rightarrow a_1 = 1$  не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \quad \text{№ 7}$$

$$\frac{BN}{2NC} = \frac{BM}{MA}$$

Пусть  $N'$  — точка на  $BC$

за точкой  $C$  такая, что  $NC = CN'$

$$\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NN'}, \text{ т.к. } \frac{BN}{NN'} = \frac{BN}{2NC}$$

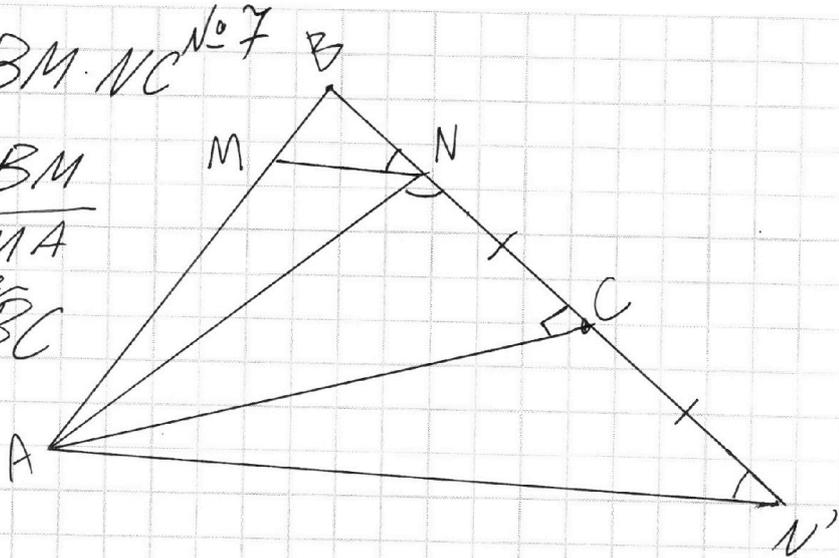
$MN \parallel AN' \Rightarrow \angle BNM = \angle BN'A = 80^\circ$

Значит,  $\angle ANN' = \angle AN'N$ ,  
и  $NC = CN'$   $\angle ANN'$   
( $\parallel \angle ANC$ )

$AC$  — медиана к основанию равнобедренного  $\triangle ANN'$  с углом при основании  $= 80^\circ$ .

$\angle NAC + \angle ANC = 90^\circ \Rightarrow \angle NAC = 10^\circ$ , т.к.  $\angle ANC = 80^\circ$

Ответ:  $\angle CAN = 10^\circ$   $\angle CAN$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

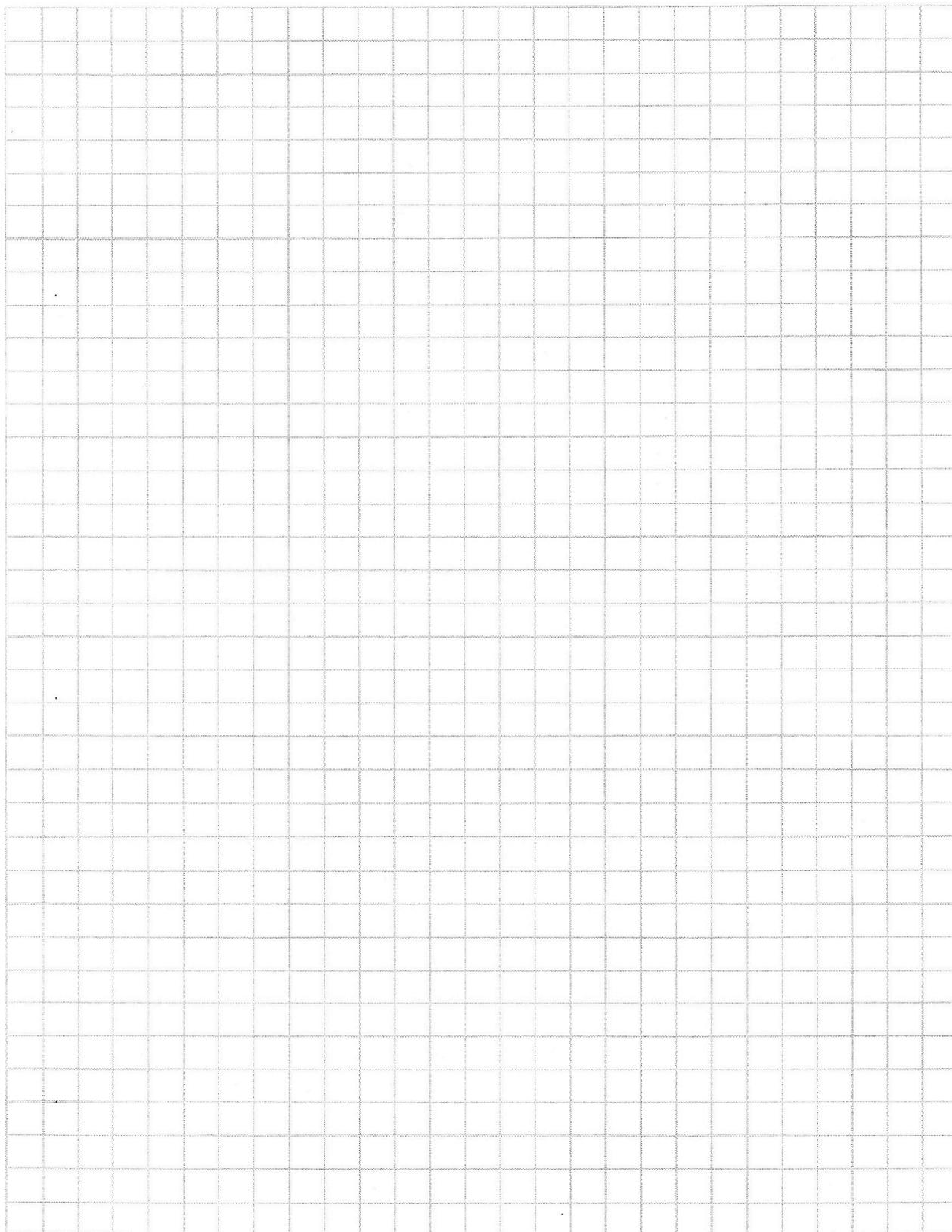
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper. The main diagram shows a triangle ABC with side AC = 10 and angle C = 80°. A point M is on AC, and a line segment BM is drawn. A large circle is drawn with center M and radius MB. Another circle is drawn with center A and radius AB. The intersection of these two circles is point N. The line segment BN is drawn. The ratio  $\frac{BN}{BM} = \frac{BM}{MA}$  is noted. The ratio  $\frac{BN}{2NC} = \frac{BM}{MA}$  is also noted. The diagram is annotated with various numbers and calculations.

Calculations shown:

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 43 \\ \hline 129 \\ 172 \\ \hline 1849 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 272 \\ \times 42 \\ \hline 544 \\ 81088 \\ - 424 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 41 \\ \hline 47 \\ 188 \\ \hline 1927 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1927 \\ \times 1849 \\ \hline 3776 \end{array}$$

Other numbers and calculations:

- 12000
- 2800
- 280
- 15104
- 4.3
- 33776
- 4
- 2
- 2

Formulas and diagrams:

- $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$
- Diagram of two overlapping circles with centers A and M.
- Diagram of three overlapping circles.
- Diagram of a circle with center M and radius MB.
- Diagram of a circle with center A and radius AB.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper. The page contains several diagrams of rectangles and squares, some with internal lines and dots. There are various calculations and numbers written in black ink. Some numbers are circled or underlined. The work appears to be a solution to a geometry problem involving area and perimeter.

Calculations and numbers visible:

- $23 \times 23$
- $460$
- $609$
- $529$
- $256$
- $529 + 4$
- $2000$
- $80$
- $36$
- $160$
- $46$
- $4 \cdot 46$
- $184$
- $43 \times 43$
- $129$
- $122$
- $1849$
- $2000$
- $1700$
- $60$
- $16$
- $3776$
- $41$
- $47$
- $28$
- $164$
- $1927$
- $18$
- $260$
- $12$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \quad x \leq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -4x + 2$$

$$4x^2 - 8x - 12 \geq 16x^2 + 4 - 16x$$

$$0 \geq 12x^2 + 16 - 8x$$

$$0 \geq 3x^2 + 4 - 2x$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 4$$

$$2) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 3,5$$

$$3) \quad \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 - 7 + 2x$$

$$6 \geq 4x - 8$$

$$14 \geq 4x$$

$$7 \geq 2x$$

$$3,5 \geq x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$   
 $19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$   
 $x \geq 1$

$90 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64$   
 $2025 = 45 \cdot 45$   
 $38 \quad 20 \quad 38 \cdot 5$   
 $38 \quad 2 \quad 380 \quad 150 + 40$   
 $304 \quad 6 \quad 556 + 25$   
 $114 \quad 11$   
 $1444$   
 $0 \quad 0 \quad 1 \quad 1$   
 $2 \quad 4$   
 $3 \quad 0$   
 $4 \quad 7$   
 $5 \quad 7$   
 $6 \quad 0$   
 $7 \quad 4$   
 $8 \quad 1$   
 $0 \quad 1 \quad 4 \quad 7$   
 $2 \quad 2 =$   
 $4 \quad x = 2k$   
 $8$   
 $7$   
 $5 \quad 17 \quad 220$   
 $1 \quad 1 \quad 088$   
 $2 \quad 1 \quad 8308$   
 $4$   
 $24$   
 $1 \quad 272$   
 $\times 42$   
 $544$   
 $1088$   
 $x = 8$   
 $y =$   
 $90 \quad 83$   
 $2 \cdot 19 \quad 2 \cdot 7 \quad 128$   
 $38$   
 $38 + 45 \quad 92 \quad 38 \quad 76$   
 $47 + 45 \quad 49$   
 $46 \quad 46$   
 $800$   
 $280$   
 $8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено болсе одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|$$

1.  $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$

$$7 - 2x \geq 0$$

$$7 \geq 2x$$

$$2x - 1 \geq 0$$

$$2x \geq 1$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 3 + 36 + 12\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$$

$$2x - 1 \geq 0$$

$$2x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$7 - 2x \geq 0$$

$$7 \geq 2x$$

$$3,5 \geq x$$

$$7 - 2x < 0$$

$$7 < 2x$$

$$3,5 < x$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 1 + 4x^2 - 4x \quad (1 - 2x \geq 0)$$

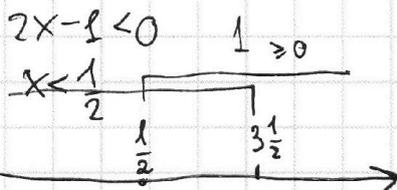
$$2x \geq 3x + 4$$

$$-3x + 2x - 4 \geq 0$$

$$4 - 4 \cdot 3 \cdot 4$$

$$-x^2 + 2x - 1$$

$$-(x - 1)^2 - 2x^2 - 3$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено болес одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n! + (n+1)! + (n+2)! : 361 \cdot (19^2) \quad (190 + 90 + 81)$$

$$n! \cdot (\cancel{n+1} + 1 + n+1 + (n+1)(n+2)) : 361$$

$$\begin{matrix} 8000 \\ 3000 \\ 5000 \\ 1600 \end{matrix} \cdot n! \cdot (n+2)^2 : 361$$

$$19^2$$

$$n \geq 19$$

$$n \leq 19$$

8 4.5

$$17! \cdot (19)^2$$

$$n=17$$

$$\begin{matrix} n & n+1 & n+2 & n+3 & n+4 \\ n^2 & n^2+2n+1 & n^2+4n+4 & n^2+6n+9 & n^2+8n+16 \end{matrix}$$

$$5n^2 + 20n + 30$$

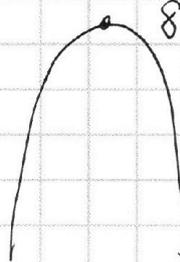
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 - 6x + 8$$

$$x^2 - 6x - 8$$

$$-6$$

$$x \geq 0$$



$$5n^2 + 20n + 20 = N^3; N \geq 6$$

$$5(n^2 + 4n + 4)$$

$$5(n+2)^2 = N^3$$

$$n+2 = 5$$

$$x(x-6) \quad n+2=5$$

$$\begin{matrix} 5 \cdot 4 & 18 \\ 2 & 20 \end{matrix}$$

$$5^3 \cdot 2^6$$

$$n=18$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper, including calculations, geometric diagrams, and trigonometric formulas.

**Calculations:**

$$\begin{array}{r} 1 \\ 272 \\ \times 42 \\ \hline 544 \\ 1088 \\ \hline 11424 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 272 \\ \times 42 \\ \hline 544 \\ 1088 \\ \hline 11424 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12000 \\ 28000 \\ 2800 \\ 24 \\ \hline 17220 \\ + 11424 \\ \hline 28644 \end{array}$$

**Formulas:**

$$BN \cdot MA = 2 \cdot BM \cdot NC$$

$$\frac{BN}{BM} = 2 \cdot \frac{NC}{MA}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{2 \cdot BM}{MA} \cdot 2$$

**Geometric Diagrams:**

- Triangle  $ABC$  with points  $M$  on  $AB$  and  $N$  on  $BC$ .
- Circle with center  $O$  and radius  $80$  passing through  $M$  and  $N$ .
- Angles of  $20^\circ$  and  $80^\circ$  are marked in various triangles.
- Other diagrams show triangles with sides  $16$ ,  $16$ ,  $15$ , and  $4$ .

