МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y =$ $= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A = \overline{aaaa}$, где $1 \le a \le 9$. $A = 1111 \cdot a = 101 \cdot 11 \cdot a$.
Произведение ~~ab~~ ABC должно быть квадратом, значит все делители должны входить в него в четной степени.
101 - простое число, значит $B \cdot C$ должно делиться на 101, чтобы оно входило в $A \cdot B \cdot C$ ~~хотя~~ в четной степени.
Число C двузначное, значит оно не может делиться на 101, потому что оно простое и больше, чем C. Значит B делится на 101. Также у нас есть условие, что B имеет в своей записи цифру 7, значит единственное подходящее для B значение = 707

Запишем произведение $A \cdot B \cdot C$:

$\overline{aaaa} \cdot 707 \cdot c = 11 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot a \cdot C$

a - однозначное число, значит оно не ~~имеет в своей~~ делится на 11, значит $C \vdots 11$, чтобы 11 входило в $A \cdot B \cdot C$ в четной степени. Так как C в своей записи должен иметь цифру 7, то единственный вариант для C: 11

$A \cdot B \cdot C = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 7 \cdot a$. Чтобы произведение было квадратом, a должно быть равно 7.

Получаем тройку чисел 7777, 707, ~~7~~ 11

Ответ: (7777, 707, 11)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Немного преобразуем K:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{x+y+3}{xy}$$

Когда x и y поменяли K стало:

$$\frac{1}{x-4}+\frac{1}{y+4}+\frac{3}{(x-4)(y+4)}=\frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}=\frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

Значение K не изменилось, значит:

$\frac{x+y+3}{xy}=\frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$, так как числа x и y по условию положительные, то числитель не равен 0, значит ~~он~~ ~~что~~ если числители одинаковые, а знаменатели разные, при этом значения равны, то знаменатели равны.

$$xy=(x-4)(y+4)$$

$$(x-4)(y+4)=\underbrace{xy+4x-4y-16=xy}$$

$y=x-4$, т.к. x и y >0, то $\underline{x>4}$. Подставим $x-4$ вместо y и преобразуем M:

$$M=x^3-(x-4)^3-12x(x-4)=x^3-(x^3-12x^2+48x-64)-12(x^2-4x)=$$

$$=\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+\cancel{12x^2}-\cancel{48x}+64-\cancel{12x^2}+\cancel{48x}=64$$

Значит M может принимать только значение 64.

Ответ: 64.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

а) $(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cos\pi y$

$\sin^2\pi y - \sin\pi x \sin\pi y = \cos^2\pi y + \cos\pi x\cos\pi y$

перенесем все в одну часть

$(\cos^2\pi y - \sin^2\pi y) + (\cos\pi x\cos\pi y + \cancel{\cos}\sin\pi x\sin\pi y) = 0$

$\cos^2\pi y - \sin^2\pi y = \cos 2\pi y$ по формуле косинуса двойного угла

$\cos\pi x\cos\pi y + \sin\pi x\sin\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$ - по формуле косинуса разности.

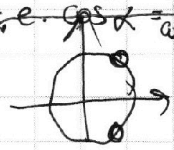
Получаем уравнение: $\cos 2\pi y = -\cos(\pi x - \pi y)$

$\cos 2\pi y = \cos(\pi - \pi x + \pi y)$ (Это одно и то же, т.к. $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$)

~~Косинусы 2-х углов равны, когда они либо отличаются на 2πk, либо углы противоположные с периодом 2πk,~~

Косинусы равны в 2-х случаях: 1) $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi k)$

2) $\cos\alpha = \cos(-\alpha + 2\pi k)$ т.е. $\cos\alpha = \cos(-\alpha + 2\pi k)$



1) $2\pi y = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k \quad |:\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$2y = 1 - x + y + 2k$

$\boxed{y = 1 - x + 2k,\ k \in \mathbb{Z}}$ подходят пары $(x,\ 1 - x + 2k),\ k \in \mathbb{Z}$

2) $2\pi y = -\pi + \pi x - \pi y + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \quad |:\pi$

$2y = -1 + x - y + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$

$y = \dfrac{-1 + x + 2k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

подходят пары вида $\left(x,\ \dfrac{-1 + x + 2k}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

а) $(x,\ 1 - x + 2k),\ k \in \mathbb{Z}$ и $x;\ \left(\dfrac{-1 + x + 2k}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

б) $\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$ $\boxed{ОДЗ: \begin{matrix}-7\le x\le 7\\ -4\le y\le 4\end{matrix}}$

Заменим $\arccos\frac{x}{7} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{7}$ по основному арктригонометрическому тождеству, получаем

$\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

$\Updownarrow$

$\arcsin\frac{x}{7} + \arcsin\frac{y}{4} < \pi$, так как функция арксинуса принимает значение от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то единственный ~~не~~ случай, неудовлетворяющий неравенству при $\arcsin\frac{x}{7} = \frac{\pi}{2}$ и $\arcsin\frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$, то есть пара $(7, 4)$ не подходит.

Осталось посчитать к-во пар, учитывая ОДЗ:

1) $y = 1 - x + 2k$. Если мы возьмем нечетное x, то $1-x \,\vdots\, 2$, т.к $2k$ - целое, то $2k \,\vdots\, 2$, мы получаем, что y четное, значит принимает значения $[-4, -2, 0, 2, 4]$

~~2)~~ если x четное, то наоборот y нечетное, то есть принимает значение $(-3, -1, 1, 3)$

т.к. $1-x$ нечетное а $2k$ - четное

2) $y = \frac{x-1+2k}{3}$, если x-нечетный, то $x-1+2k$ - четное число то есть ~~или~~ y - четное, если же x - четный, то $x-1+2k$ - нечет, тогда y-нечетное. Получаем ~~также~~ такие же пары как и в 1) пункте. Осталось посчитать:

1) x нечет y чет: 8 значений x $(-7, -5, \ldots, 7)$ · 5 знач y $\cancel{(-4, -2, 4)}$ $(-4, -2, \ldots 4)$ $= 40$ и пара $(7, 4)$ не подходит, то есть 39 ~~значений~~ пар

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2) x - четное, y - нечетное

7 значений x $(-6, -4, \ldots 4, 6)$ • 4 значение y $(-3, -1, 1, 3)$

~~Всего~~ $7 \cdot 4 = 28$ пар.

Всего пар получается $28 + 39 = 67$

Ответ: 67.

*В подсчете пар мы понимаем, что можем взять любое k, по этому любое значение y нужной четности мы можем получить при данном x.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть у нас было x 11-тиклассников. Посчитаем вероятность Пети и Васи попасть на концерт в начале месяца. Для этого мы должны посчитать количество четверок, где есть Петя и Вася, и поделить на количество всех четверок:

1) $\underline{П}\ \underline{В}\ \underbrace{\overset{x-2\text{ вар}}{\_}\ \overset{x-3\text{ вар}}{\_}}_{2!}$ $\quad \dfrac{(x-2)(x-3)}{2!}$ 4-рок (делим на 2!, т.к. учитываем без повторений отличающихся перестановкой)

Всего C_x^4 четверок

Вероятность в начале месяца: $\dfrac{(x-2)(x-3)}{C_x^4\, 2!} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{\dfrac{x!\ 2!}{(x-4)!\ 4!}} =$

$$= \frac{4!\,\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x-2)}\,(x-1)(x)} = \frac{24}{2!\,x(x-1)} = \frac{12}{x(x-1)}$$

Пусть в конце месяца выделили n билетов, $n>4$. Посчитаем вероятность Пети и Васи попасть на концерт

2) ~~4-рок~~ n-к где есть Пети и Вася: $\underset{1}{\underline{П}}\ \underset{2}{\underline{В}}\ \underbrace{\overset{(x-2)\text{в}}{\_}\ \ldots\ \overset{(x-n+1)\text{ в}}{\_}}_{(n-2)!}^{n} = \dfrac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{(n-2)!}$

Всего n-к: C_x^n

Вероятность: $\dfrac{(x-2)(x-3)\ldots(x-n+1)}{\dfrac{x!\,(n-2)!}{(x-n)!\ n!}} = \dfrac{n!\,(x-2)(x-3)\ldots(x-n+1)}{(x-n+1)(x-n+2)\ldots(x-1)(x)} =$

$$= \frac{n!}{x(x-1)(n-2)!} = \frac{(n-1)(n)}{x(x-1)}$$

По условию $\dfrac{n(n-1)}{x(x-1)} = \dfrac{12\cdot 11}{x(x-1)} \iff n^2-n = 12\cdot 11$

Корни этого уравнение $n=12$ - подходит и $n=-11$ не подходит, т.к. $n\in\mathbb{N}$

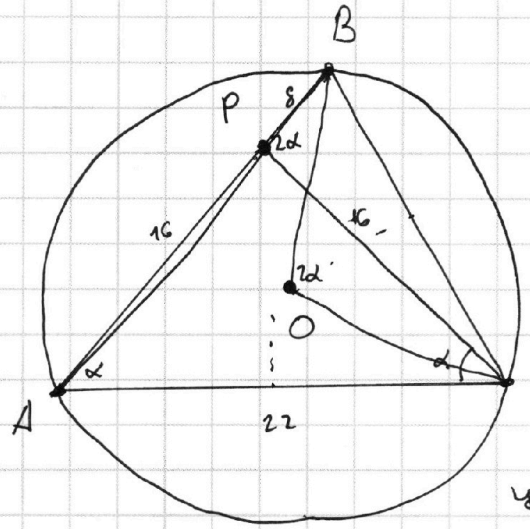
Ответ: 12.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Так как точка P принадлежит ω_2 и $O \in \omega_2$, то 4-ник BPOC – вписанный, а значит $\angle BPC = \angle BOC$, т.к. они опираются на одну дугу

Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle BOC = 2\alpha$, потому что в окружности ω_1 угол BAC вписанный, а угол BOC центральный.

$\angle CPB = \angle BOC = 2\alpha$ из вписанности.

Рассмотрим $\triangle APC$: $\angle APC = 180 - \angle BPC = 180 - 2\alpha$

$\angle PAC = \alpha$

$\angle ACP = 180 - \alpha - 180 + 2\alpha = \alpha$, значит

$\triangle PC$ – равнобедренный, ~~то есть~~ тогда $AP = PC = 16$

Найдем по теореме косинусов из $\triangle APC$ угол A:

$\cancel{16^2 = 1}$ $PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos\alpha$

$16^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos\alpha$ $= \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \dfrac{11}{16} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\dfrac{16^2 - 11^2}{16^2}} = \dfrac{\sqrt{5 \cdot 27}}{16} = \dfrac{3\sqrt{15}}{16}$

Теперь мы можем найти S_{ABC}:

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle A = \dfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \dfrac{3\sqrt{15}}{16} = \dfrac{99\sqrt{15}}{2}$

Ответ: $\dfrac{99\sqrt{15}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

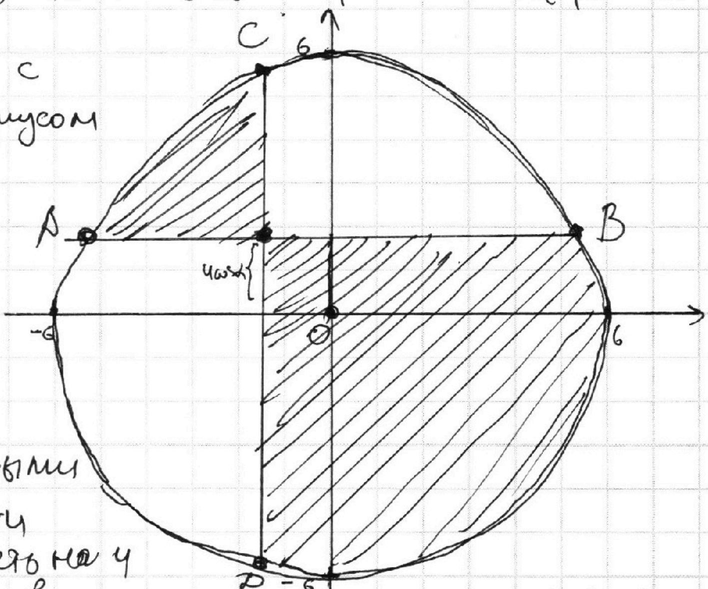
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0 \\ x^2+y^2\le 36 \end{cases}$$

~~ГМТ~~ Множество точек 2-го неравенства расположено внутри окружности с центром $(0,0)$ и радиусом 6.



Множество точек 2-го неравенства ~~окружности~~ образуется точкой с координатами $(-4\sin\alpha, 4\cos\alpha)$ и 2-мя прямыми параллельными осям координат. Эти прямые делят плоскость на 4 части, и под неравенство подходят значения x и y такие, что $x+4\sin\alpha$ и $y-4\cos\alpha$ разных знаков, т.е.

1) $x\le -4\sin\alpha$ $y\ge 4\cos\alpha$

2) $x\ge -4\sin\alpha$ $y\le 4\cos\alpha$.

Фигура $\Phi(\alpha)$ нарисована выше.

Периметр состоит из сумм отрезков AB и CD и дуги AC и BD

Сумма дуг AC и BD постоянна и равна $\frac{2\pi R}{2}=6\pi$

Найдем сумма AB и CD:

$AB=2\sqrt{9-16\cos^2\alpha}$ по Т Пиф.

$CD=2\sqrt{9-16\sin^2\alpha}$

$M=6\pi+2\sqrt{9-16\cos^2\alpha}+2\sqrt{9-16\sin^2\alpha}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

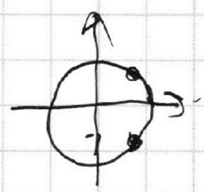
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$

$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$



$\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y =$

$= \cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$

$\cos(\pi x - \pi y) = -\cos 2\pi y = \cos(\cancel{\pi - 2y}\ \pi - 2\pi y)$

$\cancel{\pi x - \pi y}\ \cancel{\pi - 2\pi y = \pi y - \pi x + 2\pi k}$

$\pi x - \pi y = \pi - 2\pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x - y = 1 - 2y + 2k$

$x + y = 1 + 2k$ $\qquad x = 5$, $k = 2$, $y = 0$

$\boxed{y = 1 + 2k - x}$

$\pi x - \pi y = 2\pi y - \pi + 2\pi k$

$x - y = 2y - 1 + 2k$

$3y = x + 1 - 2k$

$\boxed{y = \frac{x}{3} + \frac{1 - 2k}{3}}$

$= \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{7}$

$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

$-(\arcsin \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4}) > -\pi$

$\arcsin \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4} < \pi$

$\frac{x}{7} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \ \Big| \ \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\underbrace{(\sin 0 - \sin 5\pi)}_{=0} \cdot \sin 0 = \underbrace{\cos 0}_{1} (\underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{\cos 5\pi}_{-1})$

№3 б) скорее всего ∞

$\arcsin \frac{x}{7} \neq \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\begin{matrix} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{matrix}}$

$-1 \le \frac{x}{7} \le 1$

$-7 \le x \le 7$

$-4 \le y \le 4.$

$-4 \le y \le 3$

$-7 \le x \le 6$

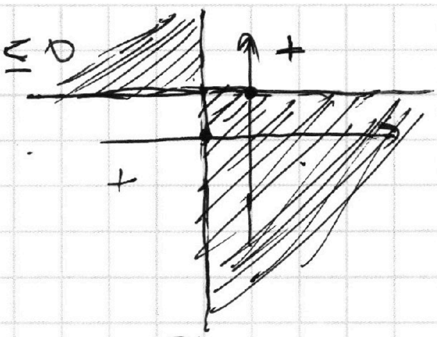
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6.

$(x+1)(y-1)\le 0$



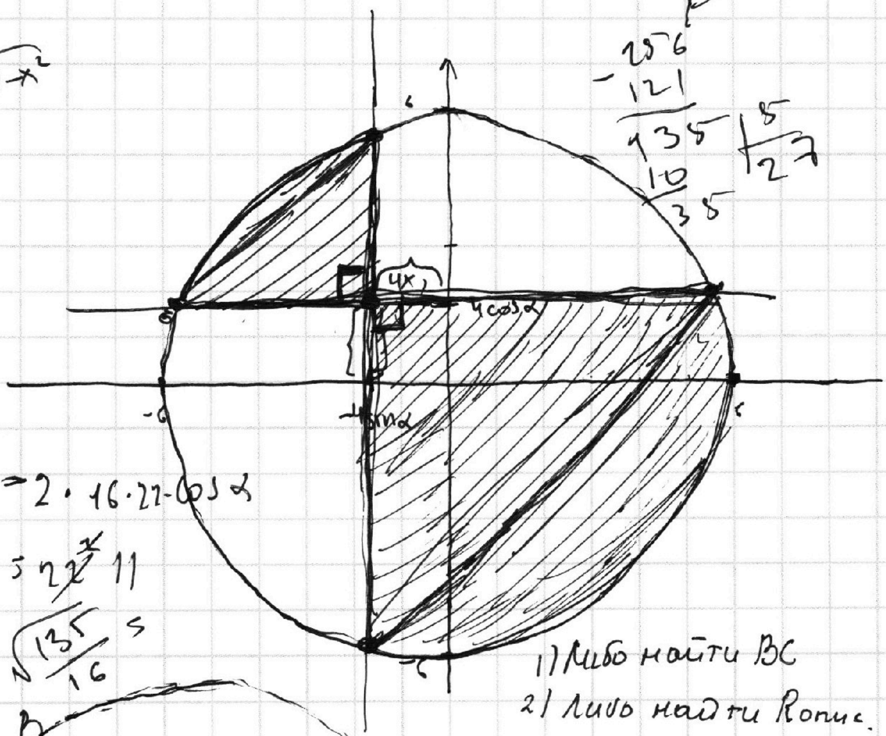
$x^2+y^2\le 36$

$\cos\alpha = x$ $\quad 4\cos\alpha = 4x$

$\sin\alpha = \sqrt{1-x^2}$

$-4\sin\alpha = -4\sqrt{1-x^2}$

22
22
44
44
484



-256
121
135 | 5
10 | 27
35

~~256~~ = ~~256~~ + 484 − 2 · 16 · 22 · cos α

~~2~~ · 16 · ~~22~~ · cos α = ~~22~~ 11

$\cos\alpha = \frac{11}{16}$

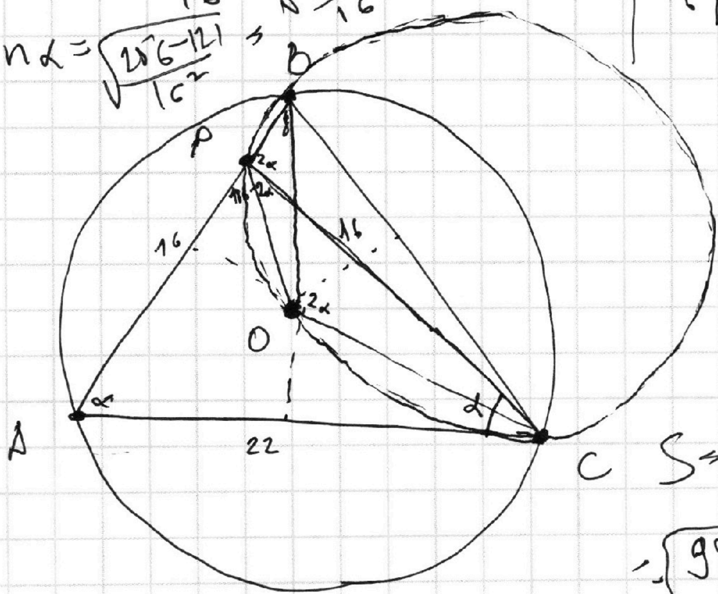
$\sin\alpha = \sqrt{\frac{256-121}{16^2}} = \sqrt{\frac{135}{16}} =$

1) Либо найти BC
2) Либо найти Rопис.

$PC=16$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{9\cdot 15}}{16} =$

$= \frac{3\sqrt{15}}{16}$



$S = \frac{1}{2}\cdot \cancel{24}^{3} \cdot \cancel{22}^{11} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{\cancel{16}\cdot \cancel{2}} =$

$= \boxed{\frac{99\sqrt{15}}{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^3-(x^2-8x+16)(x-4)-12(x)(x-4)$ $n! = 24\cdot 11$? 264

$x^3-4x^2-8x^2+32x+16x-64 = x^3-12x^2+48x-64$ $48 \times 11 = 528$

$-(12x^2-48x)$

$\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+\cancel{12x^2}-\cancel{48x}+64$ $-\cancel{12x^2}+\cancel{48x}$ $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$

(x) 11-классников

~~$(x-2)$~~ вероятность

C^3_{x-2}

4 билета П, В.

$\frac{П \; В \; (x-2)\;(x-3)}{C^4_{x-2}} = \frac{(x-2)(x-3)}{\frac{(x-2)!}{4!\cdot(x-6)!}} = \frac{4!\cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)}}{(x-5)(x-4)\cancel{(x-3)}\cancel{(x-2)}}$ $24 \cdot 11 = 264$

$n^2-n \; -12\cdot 11$

$D = +1+$

$= \frac{24}{(x-5)(x-4)}$ — вероятность в начале месяца.

$n^2-n-12\cdot 11 \mid n-12$
n^2-12n
$11n-12\cdot 11$
$11n-12\cdot 11$ $\mid n+11$

$\frac{264}{(x-5)(x-4)}$ — вероятность в конце.

$\underbrace{П \; В \; (x-2)\;(x-3)\ldots(x-n+1)}_{n}$

$\frac{(x-2)(x-3)\ldots(x-n+1)}{C^n_{x-2}} = \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{\frac{(x-2)!}{n!(x-2-n)!}} = \boxed{n=4+t}$

$= \frac{n!\cancel{(x-2)\ldots(x-n+1)}}{(x-n-1)(x-n)\cancel{(x-n+1)}\ldots\cancel{(x-2)}} = \frac{n!}{(x-n-1)(x-n)} = \frac{264}{(x-5)(x-4)}$

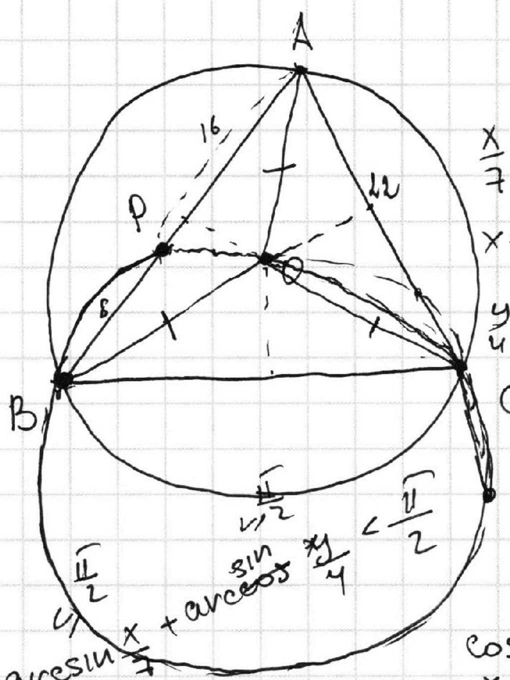
$n!(x-5)(x-4) = 264(x-n-1)(x-n)$

$n! \leq 264$ $n=5$ $5! = 120$ $6! = 720$ — много.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



S_{ABC} -?

$\frac{x}{7} \neq \frac{\pi}{2}$

$x \neq \frac{7\pi}{2}$

$\frac{y}{4} \neq$

$16 \cdot \cancel{24}^{12} = \cancel{22}^{11} \cdot (22 + x)$

$192 = 242 + 11x$

$x = \frac{50}{11}$

$16 \cdot 12 = 192$

$(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 =$

$= \cancel{\sin^2\alpha}$

$242 - 192 = 50$

$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$ $\arcsin\frac{x}{7} + \cancel{\arccos}\ \sin\frac{y}{4} < \frac{\pi}{2}$

$\cancel{\arccos\frac{x}{7}}$ $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

$(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cos\pi y$

$\sin^2\pi y - \sin\pi x \cdot \sin\pi y = \cos^2\pi y + \cos\pi x\cos\pi y$

$(\cos\pi x\cos\pi y + \sin\pi x\sin\pi y) + (\cos^2\pi y - \sin^2\pi y) =$

$= \cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi y = 0$

$2\pi y = -\pi + \pi x - \pi y + 2\pi k$

$2y = -1 + x - y + 2k$

$y = \frac{-1 + x + 2k}{3}$

$\cos 2\pi y = -\cos(\pi x - \pi y) = \cos(\pi - \pi x + \pi y)$

$-\pi x + \pi y - \pi + 2\pi k$

1) $2\pi y = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi k$

$2y = 1 - x + y + 2k$

$y = 1 - x + 2k$, где k целое

$\left(x;\ \frac{1-x+2k}{3}\right)$

2) $2\pi y = \cancel{\pi}$

$2y = x + y - 1 + 2k$

$y = x - 1 + 2k$

$(x;\ x - 1 + 2k)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(A, B, C) $A = \overline{aaaa}$

$B = \_7\_$ или $7\_\_$ или $\_\_7$

$A \cdot B \cdot C = x^2$ $x=5$ $y=1$ $C = 1\_$ или $\_1$

$5 \cdot 1$ $1 \cdot 5$ 10 6

11,5 7,5 5555 | 11 | 505 101 × 11 / 101 101 1111

$A = 11 \cdot \overline{a0a} = 11 \cdot a \cdot 101$

простое

101 | 7, 7, 1, 31

$A = 101 \cdot 11 \cdot a$ $(x-4)^3 = \cancel{x^2+8x}(x^2-8x+16)(x-4) =$

$B \vdots 101$ $\boxed{B=707}$ $= x^3-4x^2-8x^2+32x+16x-64 =$

$= x^3-12x^2+48x-64$ упорра

$ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 7 \cdot 101 \cdot C = 101^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot a \cdot C \vdots 11$

$C = 11$ 1 44 4 176

$a \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot 11^2$ $x, y > 0$ 7777 707 7

$a = 7$ $\frac{y+\cancel{4}+x-\cancel{4}+3}{(x-4)(y+4)}$

$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$ $\boxed{y = x-4}$

$y > 0$ $x > 4$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\neq 0$ $x(x-4) = x^2-4x$

$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$ $11 \cdot 16 - 44 \cdot 4 + 64 = 176 - 176 + 64$

$(x-4)(y+4) = \cancel{xy} + 4x - 4y - 16 = \cancel{xy}$ $12x^2-48x+64 =$

$\boxed{x-y-4=0}$ $= 12x^2 - 48x + 64$

$(x = y+4)$ $x^3-y^3 = \cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 12x^2 - 48x + 64 - x^2 + 4x =$ $x > 4$

$= 12x^2 - 48x + 64 - x^2 + 4x$

$(f(4); +\infty)$ $= 11x^2 - 44x + 64$,

$(64; +\infty)$ min в точке $x = 2 \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

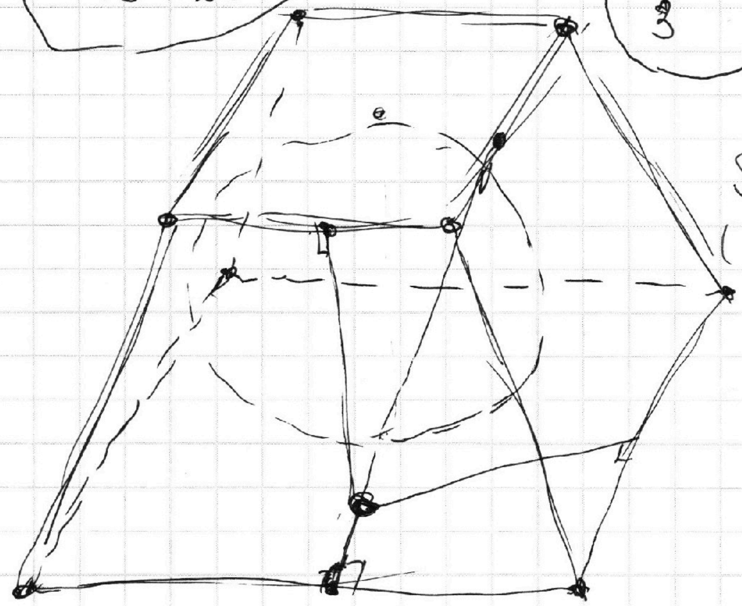
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

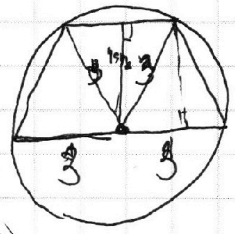
СТРАНИЦА __ ИЗ __

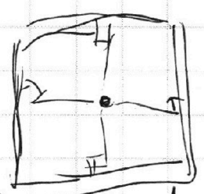
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$2\sqrt{9-16\sin^2\alpha}$

$2\sqrt{9-16\cos^2\alpha}$

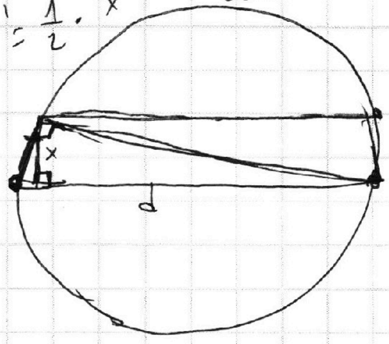






$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

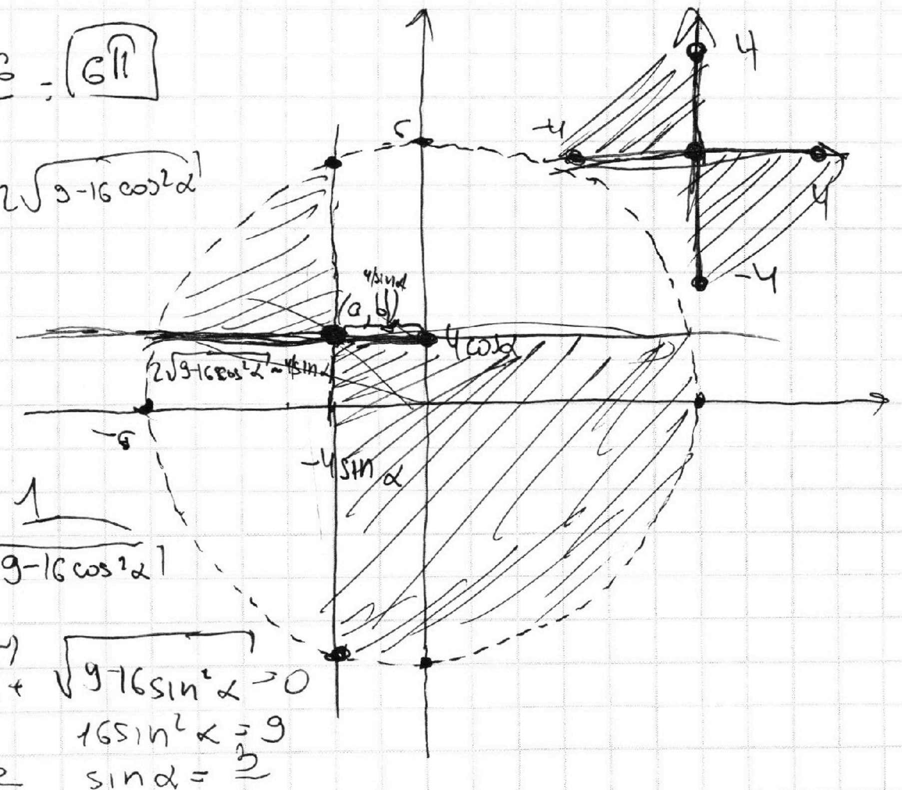
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$



$(x+4)(y-4) \le 0$

$2\pi R = \frac{2\pi \cdot 6}{2} = \boxed{6\pi}$

$f = 2\sqrt{9-16\sin^2\alpha} + 2\sqrt{9-16\cos^2\alpha}$



$f' = \frac{1}{\sqrt{9-16\sin^2\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{9-16\cos^2\alpha}}$

$\sqrt{9-16\cos^2\alpha} + \sqrt{9-16\sin^2\alpha} = 0$

$16\cos^2\alpha = 9 \qquad 16\sin^2\alpha = 9$

$\cos^2\alpha = \frac{3}{4} \qquad \sin\alpha = \frac{3}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) $y = 1 - x + 2k$ $k=-6$ $k=-5$ $k=-4$ $k=-3$ $k=-2$

$\boxed{7, 4}$ — нельзя.

$x = -7$:

$y = 1 + 7 + 2k = 8 + 2k$

$\boxed{x=-7 \quad y = -4, -2, 0, 2, \cancel{4}}$

~~$x = 7$ $y = -6 + 2k$ $y = -4, -2, 0, 2, 4$~~

$x = -6$

$y = 7 + 2k$

x - нечет y - чет

$x = -6$

$y = 3, 1, -1, -3$

$-7 \ -5 \ -3 \ -1 \ 1 \ 3 \ 5 \ 7$

$8 \cdot 5 = 40$

$x = -5$

x чет: y: $-3 \ -1 \ 1 \ 3$

x нечет y $-4 \ -2 \ 0 \ 2 \ 4$

---

2) $y = \dfrac{x + 1 - 2k}{3}$

$x = 7$ $y = -4, -2, 0, 2, \cancel{4}$ нельзя

4 в

$x = 7$

$y = \dfrac{8 - 2k}{3}$

$y = 4$

$y = 2$

$y = 6$

$y = -2$

$y = -4$

x: $-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5$! пот в

$7 \cdot 5 = 35$ в

$x = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$ — пот в

$7 \cdot 4 = 28$

~~$28 + 35 + 4 = 32 + 35 = 67$~~

67 в.

$x = 6$ $y = \dfrac{7 - 2k}{3}$

$2k = \cancel{3}\ \boxed{7 - 3y}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!