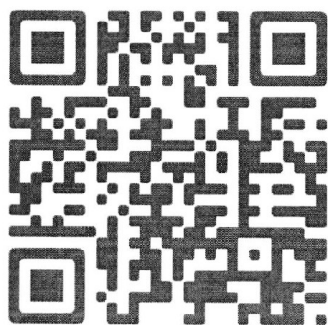
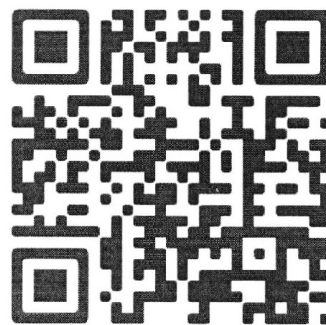




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} xy = 32 + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \quad x, y, z \neq 0$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = ?$$

$$xy - yz = 32 + z^2 - 3x - x^2$$

$$(x-2)y = (2-x)(3+z+x)$$

$$(2-x)(3+z+x+y) = 0$$

$$\begin{cases} 2-x=0 \\ 3+z+x+y=0 \end{cases}$$

Допустим $z=x$, тогда:

$$yx = 3x + x^2$$

$$x \neq 0, \text{ значит } y = 3+x$$

$$x^2 = 3(3+x) + (3+x)^2$$

$$x^2 = 9 + 3x + 9 + 6x + x^2$$

$$9x = -18$$

$$x = -2$$

$$z = -2$$

$$y = 1$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 1^2 + 4^2 + 1^2 = 18$$

Рассмотрим $x+y+z = -3$

Перемножим 3 уравнения:

$$x^2 y^2 z^2 = z(3+z) \cdot x(3+x) \cdot y(3+y)$$

$$xyz = (3+z)(3+x)(3+y)$$

$$xyz = 27 + 9x + 9y + 9z + xyz + 3xz + 3xy + 3zy$$

$$27 + 9x + 9y + 9z + xyz + 3xz + 3xy + 3zy = 0$$

$$9x + 9y + 9z = -27$$

$$3(x+y+z) = -9$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27 =$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy - 3z + yz - 3x + zx - 3y \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{81}{3} - 3(x+y+z)$$

значит:

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = -3 \cdot (-3) + 6 \cdot -3 + 27 = 18$$

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

Представим $\underbrace{99\dots9}_{40000}$ как $\underbrace{100\dots0}_{40000} - 1$.

Тогда:

$$(100\dots0 - 1)^3 = 100\dots0^3 - 3 \cdot 10\dots0^2 + 3 \cdot 10\dots0 - 1$$

$$100\dots0 = \underbrace{100\dots0}_{40000} - \text{это } 10^{40000}$$

$$10^{120000} - 3 \cdot 10^{80000} + 3 \cdot 10^{40000} - 1 = 10^{80000} (10^4 - 3) + 3 \cdot 10^{40000} - 1$$

В числе $10^{40000} - 3$ всего 39999 девяток, ведь оно равно

$$\underbrace{99\dots9}_{39999}$$

Т.к. 10^{80000} значительно больше $3 \cdot 10^{40000}$, то $3 \cdot 10^{40000}$ не влияет на ~~пер~~вые девятки никак.

$$3 \cdot 10^{40000} - 1 = \underbrace{2999\dots9}_{40000}$$

Значит всего девяток: $39999 + 40000 = 49999$

Ответ: 49999

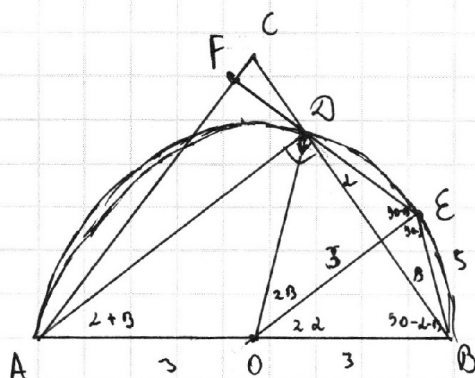


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$$AC = 10$$

$$AB = 6$$

$$BE = 5$$

Решение

Проведем OD , AD и OE . $\angle DOB = 2\angle DAB = 2\alpha + 2\alpha$

Пусть $\angle EOB = 2\alpha$, $\angle DOE = 2\alpha$, тогда $\angle EDB = \alpha$, $\angle EBD = \beta$.

Заметим, что $\angle ADB = 90^\circ$ т.к. AD опирается на диаметр.

Найдем угол 2α по т. косинусов:

$$5^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 2\alpha$$

$$25 = 18 - 18 \cos 2\alpha$$

$$18 \cos 2\alpha = -7$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{7}{18}$$

$$\begin{cases} DB^2 + AD^2 = 36 \\ DB^2 = DE^2 + 25 - 2 \cdot DE \cdot 5 \cdot \cos(180 - 2\alpha) \\ DE^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} DB^2 + AD^2 = 36 \\ DB^2 = DE^2 + 25 - 2 \cdot DE \cdot 5 \cdot \cos(180 - 2\alpha) \\ DE^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$DE^2 = DO^2 + OE^2 - 2 \cos 90^\circ \cdot DO \cdot OE \quad \text{— из них мы можем}$$

определить $\cos 2\alpha$, ведь $\cos(90 - \alpha) \neq \cos(2\alpha)$ связаны OE , DO известно.

Отсюда найдем AD и с помощью подобия $\triangle ACD \sim \triangle ADF$ найдем AF .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть коробок всего n . Всего вариантов расставления трех шаров равно $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$. Пусть это число k . В случаях когда шар открывает 6 и 5 коробок k не изменяется.

Случай еб, когда он открыл 5 коробок и там оказались 3 мяча: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6}$ (варианты расстановок 3 мячей в 5 коробок)

когда 6 коробок:

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6}$$

Значит вероятность открыть 5 и 6 коробок и обнаружить 3 мяча соответственно равны:

для 5-ти: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6k}$

для 6-ти: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6k}$

Во втором случае шанс увеличился в $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 2$ раза

Ответ: 2 раза



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 5

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

Пусть члены арифметической прогрессии равны $a_1, a_2, \dots, k_1, k_2, \dots$

Тогда заметим, что

$$k_5 + k_6 = k_3 + k_8 \quad (\text{т.к. в обеих частях будет разность прогрессии } d) \quad \text{умноженная на } 9 \quad (4+5=2+4)$$

Значит сумма корней уравнений равна.

В первом случае:

$$k_5 + k_6 = a^2 - a$$

$$k_3 + k_8 = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a^2 - a - \left(\frac{a^3 - a^2}{4}\right) = a\left(a - 1 - \frac{a^2 - a}{4}\right) = a\left(a - 1 - \frac{a-1}{4}\right) = a(a-1)\left(1 - \frac{a}{4}\right) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \\ \frac{a}{4} = 1 \end{cases}$$

Подставим a :

$$1) a = 0 \quad \begin{aligned} x^2 - 5 &= 0 & x &= \pm\sqrt{5} \\ 4x^2 - 4 &= 0 & x &= \pm 1 \end{aligned}$$

$-\sqrt{5}, \sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}$ - не арифм. прогрессия, ведь $d = 2\sqrt{5}$ - неверно

$$2) a = 1 \quad \begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 & x &= \pm 2 \\ 4x^2 - 1 &= 0 & x &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$ - не арифм. прогрессия, ведь $d = 2.2$

$$3) a = 4 \quad \begin{aligned} x^2 - 12x - 1 &= 0 & D &= 12^2 + 4 = 148 \\ x^2 - 12x + 889 &= 0 & D &= 3700 \end{aligned}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{37}}{1} \quad \text{также не а}$$

$6 - 5\sqrt{37}, 6 - \sqrt{37}, 6 + \sqrt{37}, 6 + 5\sqrt{37}$
↑
арифметическая прогрессия,
ведь $10\sqrt{37} = 5d$
 $d = 2\sqrt{37}$

Ответ: $a = 4$



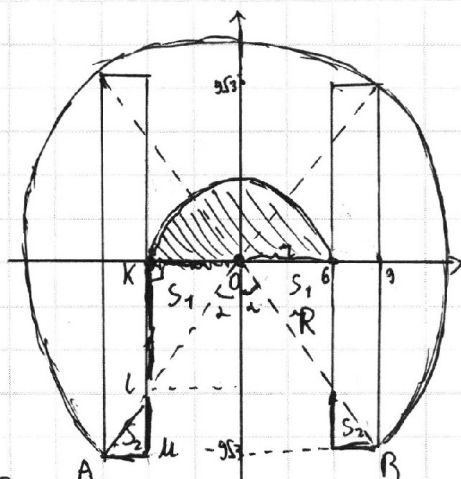
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

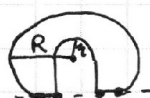
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим поворот нашего прямоугольника на угол $\tilde{\alpha}$ относительно начала координат:



Заметим, что при повороте прямоугольник замещает фигуру такого вида:



Здесь из большой окружности отрезана нижняя часть прямоугольником, разрезан и вырезана полуокружность с прямоугольником

Давайте посчитаем площадь окружности без вырезанного сегмента.

Найдем угол AOB. $\sin \alpha = \frac{a}{R}$, $\cos \alpha = \frac{b}{R}$, $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{9\sqrt{3}}{9} = \sqrt{3}$

$\alpha = 30^\circ$. Значит $2\alpha = 60^\circ$. Площадь окружности без сегмента:

$$\frac{300}{360} \cdot \tilde{\pi} R^2. \quad R = \sqrt{9^2 + 9\sqrt{3}^2} = \sqrt{4 \cdot 9^2} = 2 \cdot 9 = 18. \text{ Теперь найдем } S_2 \text{ и } S_1$$

на рисунке помечены треугольники с площадями S_2 и S_1) $S_1 \rightarrow S_2$

Пусть эти треугольники Δ_1 и Δ_2 соответственно. $\Delta_1 \sim \Delta_2$ по 2-м углам - прямым и имеют общую сторону. Коэффициент подобия: $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{6}{9\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$.

$$\text{Значит } \frac{KL}{LM} = \frac{2}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}. \quad S_1 = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2}, \quad S_2 = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Общая площадь замещения: } S_R - 2S_1 + 2S_2 = \frac{5}{6} \tilde{\pi} \cdot 18^2 - 36\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = \\ = \frac{5}{6} \tilde{\pi} \cdot 18^2 - 27\sqrt{3} = 240\tilde{\pi} - 27\sqrt{3} = 27(10\tilde{\pi} - \sqrt{3})$$

Ответ: $27(10\tilde{\pi} - \sqrt{3})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

$$\text{Пусть: } x - \frac{15}{2} = a$$

$$\frac{y}{6\sqrt{3}} = b$$

Тогда:

$$|a+b| + |a-b| \leq 3$$

$$\begin{cases} |2a| \leq 3 \\ |2b| \leq 3 \end{cases}$$

- получаем если раскроем скобки ~~(и уберем лишнее)~~, где

Тогда:

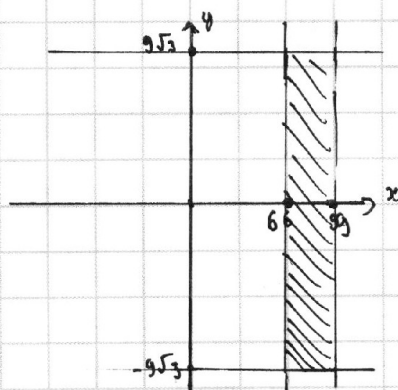
$$|2x - 15| \leq 3$$

$$\cancel{|2x - 15| \leq 3} \quad \left| \frac{y}{3\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

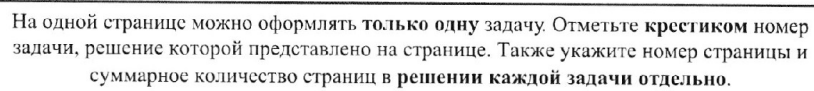
Отсюда:

$$\begin{cases} 9 \geq x \geq 6 \\ |y| \leq 9\sqrt{3} \end{cases}$$

Изобразим это на графике:

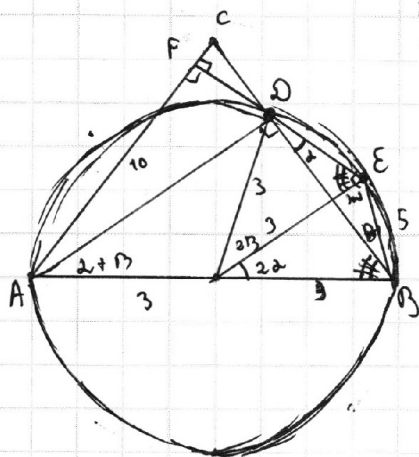


Выделенный прямоугольник - это область, внутри и на границе которой ~~хотя~~ выполняются условия. То есть она нам подходит

[illegible]

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AC \approx 10$

$$AB = 6$$

$$BE = 5$$

ACD и AFD-подобные
Найти CD или AD



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

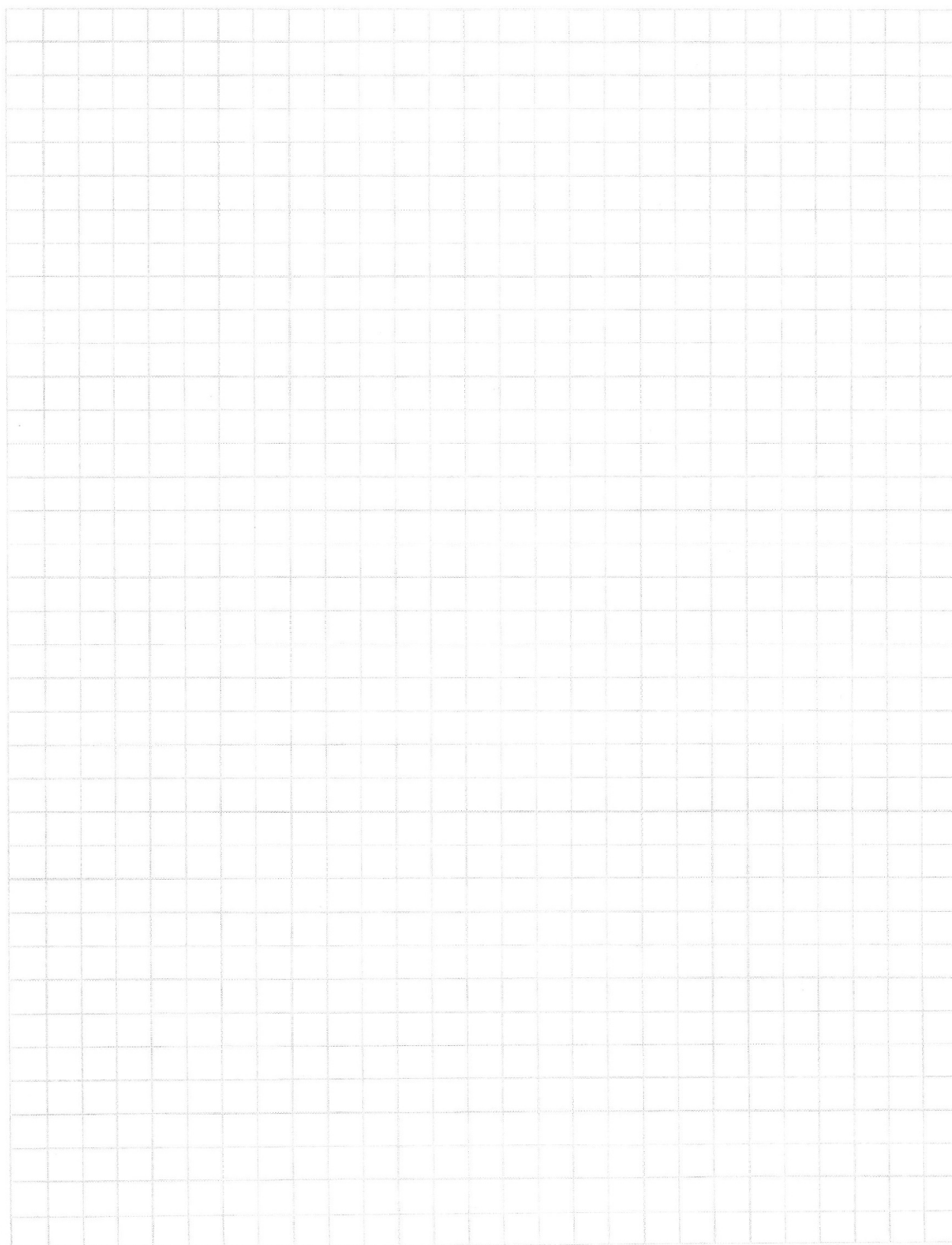
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$x + y + z = -3$$

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y + 6z + 27 = \\ (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 &= xy + 3z + yz + 3x + zx + 3y + 3z + 27 = \\ &= xy + yz + 2zx + 3x + 3y + 3z + 27 = \\ &= xy + yz + 2zx + 18 \end{aligned}$$

$$xy + yz + 2zx + 9 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 - 9 = 0$$

$$2(x+y)(2x)$$

$$\begin{aligned} 3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \\ 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4xy + 4yz + 4zx$$

$$9 + x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}(x+y+z)^2 + 18$$

$$x^2 - x + 1$$

$$x^2 - 3x + 2$$

$$9 + 3x + 3y + xz = \frac{-b}{a}$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$k_5 + k_6 = a^2 - a$$

$$k_3 + k_8 = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$a(a-1) = \frac{a^2}{4}(a-1)$$

$$a = 1 \checkmark$$

$$a \pm \frac{a^2}{4} = 7 \Rightarrow a = 4 \checkmark$$

$$\frac{144}{2} \pm \sqrt{148}$$

$$6 \pm \frac{\sqrt{148}}{2}$$

$$6 \pm \sqrt{37}$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$144$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 889 \\ \hline 3556 \\ 3700 \end{array}$$

$$\frac{12 \pm 10\sqrt{37}}{2} = 6 \pm 5\sqrt{37}$$

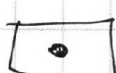
$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 3}{6}$$

$$4 \checkmark$$

$$n$$

$$N_4$$

$$\frac{3}{n}$$



$$5n$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} & (z-x)(z+x) + 3(z-x) = (x-z)y \\ & & (z-x)(z+x+3) = (z-x)(-y) \\ & & z = x & z+x+3 = -y \\ & (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 & (x-y)(-z) = (x-y)(x+y+3) \\ & (z+y+x)^2 = z^2 + 2yz + 2zx + 2xy + y^2 + x^2 + z^2 + 2xy + x^2 & 9 - xy > 0 \\ & & z = x \\ & z+y+x+3=0 & \begin{cases} z=x \\ z+x+3=-y \\ x=y \end{cases} \\ & z+y+x = -3 & x=y=z \\ & -\frac{3y}{12} + 3 & (z+x+3)^2 = z^2 + 2zx + 3z + \\ & x^2 = 3x + x^2 & x^2 + 6zx + 9 + y^2 + 6yx + 9 + z^2 + 6z + 9 = \\ & x=0 \quad x \neq 0 & = (z+y+x+6)^2 \\ & z+y+3 = -x & 2x = -3z - 3x - 9 + \\ & yx = 3x + x^2 & x - x - 2 - 3 + 3 = -2 \quad 6x + 9 + 6y + 9 + 6z + 9 = \\ & y = 3 + x & = 18 \\ & x^2 = 3y + y^2 & 2y^2 + 2z^2 + 2x^2 + 2yz + 2xz + 2xy = \\ & x^2 = 3x + x^2 + 6x + 9 & 9 + y^2 + z^2 + x^2 \\ & x^2 = 12 & 2 = (3+x)^2 - 4x^2 - 4x = 9 + 6x + x^2 - 4x^2 - 4x = \\ & 12 + 4x = 0 & = 9 - 6x - 3x^2 = 18 - 2xz - 2xy - 2zx \\ & x = -\frac{3}{2} & -3x^2 - 6x - 9 + 18 \\ & 2x^2y^2 & z^2 + xz + x^2 + 3z + 3x = 0 \\ & & z(x+y) + xy \\ & & = 3z + 3x + 3y + x^2 + y^2 \\ & 2xy & xy = 3x + x^2 \\ & 6z + z^2 + 6x + x^2 + 6y + y^2 + x^2 + y^2 + z^2 = & x^2 + 3x - xy = 0 \\ & = 2xy + 2xz + 2zx & x(x+3-y) = 0 \\ & & x+3+y = -2 \\ & & 2y = -2 \\ & & 2y = -2 = -x \\ & & -2x^2 = 3x + x^2 \\ & & x(2x+3) = 0 \\ & & x = -\frac{3}{2} \\ & x^2 + y^2 + z^2 = 27 & x^2 + 3x + \frac{x^2}{2} = 0 \\ & (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 9 + x^2 + z^2 + y^2 & 2x(x+3+\frac{x}{2}) = 0 \\ & 6x + 9 + 6y + 9 + 6z + 9 = 9 & \frac{3}{2}x + 3 = 0 \\ & 6x + 6y + 6z = -18 & x = -2 \quad \checkmark \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left| x - \frac{15}{2} + \frac{4}{6\sqrt{3}} \right| + \left| x - \frac{15}{2} - \frac{4}{6\sqrt{3}} \right| \leq 3$$

№6

4
16
64

$a > 0$

$$|a+b| + |a-b| \leq 3$$

$$x^2 - 12x + 1 = 0$$

$$4x^2 - 4(4^2 - 4)x + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 - 4^6 - 4 = 0$$

$$x^2 - 12x + 128 + 8 - 1024 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} a+b+a-b \leq 3 & |2a| \leq 3 & |2x-15| \leq 3 \end{cases}$$

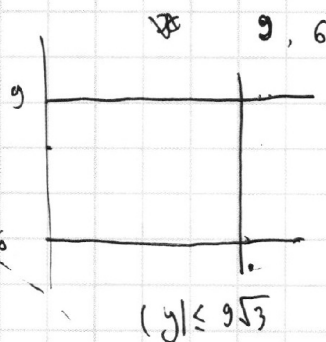
$$\begin{cases} a+b-a-b \leq 3 & |2b| \leq 3 & \left| \frac{4}{3\sqrt{3}} \right| \leq 3 \end{cases}$$

$4^5 = 1$

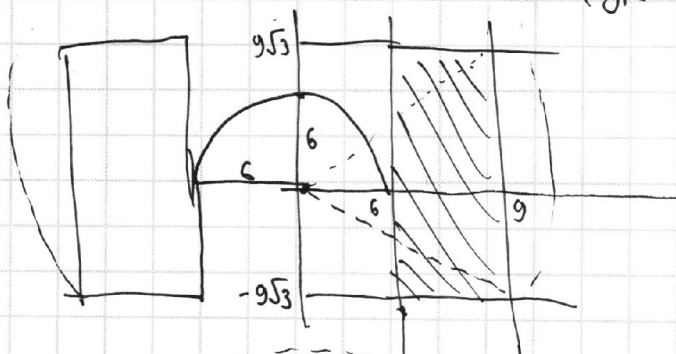
$$x^2 - 12x$$

$$\begin{array}{r} \cdot 136 \\ -1025 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6 + \sqrt{3}4 \\ 6 + 5\sqrt{3}4 \\ 6 - \sqrt{3}4 \end{array}$$



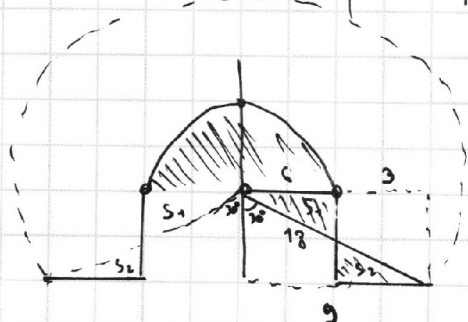
$$\begin{array}{r} -1025 \\ 136 \\ \hline 889 \end{array}$$



9

$$81 + 81 \cdot 3 = 9^2 \cdot 2^2$$

18



$$\begin{array}{r} 5 \cdot 3 \cdot 18 \\ \times 15 \\ \hline 120 \\ 15 \\ \hline 270 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n = 40000 \text{ кубов}$$

$$n^3$$

$$\begin{array}{r} 91 \\ \times 91 \\ \hline 819 \\ 910 \\ \hline 8281 \\ \times 8281 \\ \hline 18281 \\ 74529 \\ \hline 753511 \end{array}$$

$$2-x-y-z$$

$$2(2+3) = 2(5)$$

$$-2x-2y=xy$$

$$(x+z)(y+z)$$

$$(x+z)(y+z) + (x+y)(z+y) + (y+z)(z+x)$$

$$(a-b)^3 =$$

$$(a-b)^2(a-b)$$

$$(a^2-2ab+b^2)(a-b)$$

$$a^3-2a^2b+b^2a-a^2b+2ab^2$$

$$a^3-3a^2b-3b^2a+b^3$$

$$40000$$

$$40001$$

$$(100 \dots 0 - 1)^3 =$$

$$= 10 \dots 0^3 - 3 \cdot 100 \dots 0^2 + 3 \cdot 10 \dots 0 - 1$$

$$(999 \dots 7)000 \dots 0$$

$$\frac{|a-b|}{|a+b|} \cdot \frac{b-a}{2a}$$

$$b-a$$

$$aa$$

$$\begin{cases} 2a < 3 \\ 2b < 3 \end{cases}$$

$$x+y+z=3$$

$$\begin{cases} xy+z=2 \\ yz=3x+x^2 \\ 2x=3y+y^2 \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=9$$

$$2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz=$$

$$xy+yz+2x-3z-3x-3y=$$

$$= xy+yz+2x+9+9=18+xy+yz+2x$$

$$9+x^2+y^2+z^2$$

$$x^2+y^2+z^2=9+xy+yz+2x$$

$$18$$

$$18+4xy+4yz+4zx$$

$$y-3=y+x+z+y$$

$$(x+z)y=3(x+z)+z^2+x^2$$

$$(x+z)(x+z)=z^2+x^2$$

$$(x+z)(x+z+2y)=z^2+x^2$$

$$x^2+z^2+2xz+2y(x+z)=z^2+x^2$$

$$2xz+2y(x+z)=0$$

$$xz+y(y-3)=0$$

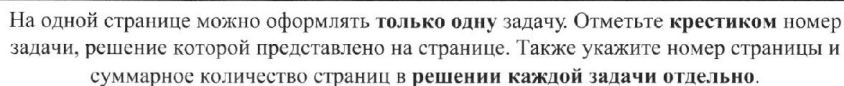
$$xz+y^2-3y=0$$

$$x+z=y-3$$

$$9 \geq 4xz$$

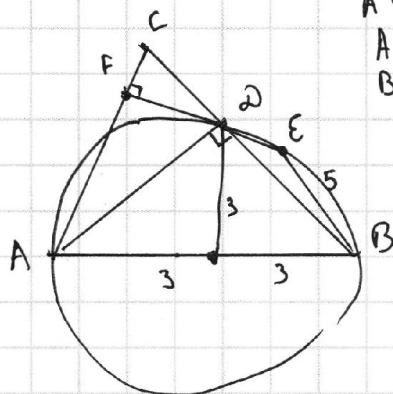
$$9 \geq 4yz$$

$$9 \geq 4yx$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$3 \cdot 10^2$

300

299

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases}$$

$$x + y + z = -3$$

$$(x-2)y = (x-2)(-x-2-3)$$

$$2 = -y - x - 3$$

$$y = -x - 2 - 3$$

$$3 = -x - 2 - y$$

$$xy = (-3-y-x) \cdot 3 + (-y-x-3)^2$$

$$xy = -9 - 3y - 3x +$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$((y+x)+z)^2 =$$

$$= y^2 + 2xy + x^2 + 6y + 6x + 9$$

$$xy = y^2 + x^2 + 2xy + 3x + 3y$$

$$y^2 + x^2 + xy + 3x + 3y = 0$$

$$x(x+y+3) + y(y+3) = 0$$

$$x^2 y^2 z^2 = (3+2+2^2) \quad xyz = (3+2)(3+y)(3+x)$$

$$x^2y^2 = (3+2)(3+y)(3+x)$$

$$xy^2 = 2x + 9z + 9x + 9y + 3xy + 3y^2 + 3zx + xy^2$$

$$9 + 3(z + x + y) + xy + yz + 2x = 0$$

$$g + g + xy + yz + zx = 0$$