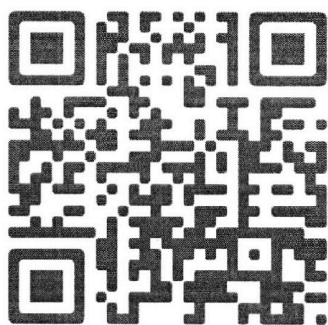




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2, \\ yz = 3x + x^2, \\ zx = 3y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 40 000 девяток. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 10$, $AB = 6$, $BE = 5$.
4. [4 балла] В телеингре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть шесть коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$ являются пятым и шестым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$ являются третьим и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|x - \frac{15}{2} + \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| + \left|x - \frac{15}{2} - \frac{y}{6\sqrt{3}}\right| \leq 3$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь фигуры, которую замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DBC$, если известно, что $\angle DCB = 20^\circ$.



1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \text{ где } x, y, z \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ перемножим все три равенства:

$$xy \cdot yz \cdot zx = (3z + z^2)(3x + x^2)(3y + y^2)$$

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(z+3)(x+3)(y+3) \quad \left| : xyz \right. \quad \begin{matrix} xyz \neq 0. \end{matrix}$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = (xy + 3x + 3y + 9)(z+3)$$

$$xyz = xyz + 3xy + 3xz + 9x + 3yz + 9y + 9z + 27$$

$$3(xy + yz + xz) + 9(x+y+z) + 27 = 0$$

необходимо найти:

$$A = (x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 9 \cdot 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 6(x+y+z) + 27, \text{ при этом}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^2 = xy - 3z \\ x^2 = yz - 3x \\ y^2 = zx - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

- подставим в A.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} A &= xy + yz + zx - 3(x + y + z) + 6(x + y + z) + 27 = \\ &= xy + yz + zx + \cancel{3(xy + yz + zx)} + 3(x + y + z) + 27 \end{aligned}$$

Мы знаем, что:

$$3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) + 27 = 0 \quad (:3)$$

$$(xy + yz + zx) + 3(x + y + z) + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0 + 18 = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(x+z)} (x+3)^2 + (y+3)^2 + (\cancel{z}+3)^2 = 18,$$

если ~~быть~~ ~~такая~~ система имеет хотя бы 1 решение в нулевых числах.

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем сколько 9 в числе n^3 .

Будем считать их с конца числа.

Сначала идёт 40.000 „9“ подряд,
затем 2 на 40.001 месте, ~~в~~ много
„0“ и „7“ на 80.001 месте, после
этой „7“ все „9“ до 120.000 места,
получается, что их после „7“:

$$120.000 - 80.001 \Rightarrow \text{так} = 120.000 - 80.000$$

$$- 1 = 40.000 - 1 = 39.999 \Rightarrow \text{Всего}$$

„9“ в числе n^3 :

$$40.000 + 39.999 = 40.000 + 40.000 - 1 =$$
$$= 80.000 - 1 = 79.999$$

Ответ: 79.999



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

Найти: AF

$$AC = 10; AB = 6; BE = 5$$

1) Из условия:

$A, E, D, B \in \omega$,

где AB - диаметр $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ. \text{ П. к. } \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ, \text{ т. к. смежные.}$$

2) Пусть $\angle EAB = \alpha \Rightarrow \angle CDF = \alpha$, т. к.

$AEDB$ - впис. и B, D, C - на 1 прямой.

$\angle CDE$ - внешний для $AEDB \Rightarrow$ в прямоугольном $\triangle CDA$, $\angle CDA = 90^\circ$: DF - высота $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BCF = 90 - \alpha \text{ в } \triangle CDF; \angle CAD =$$

$$= 90 - (90 - \alpha) \text{ в } \triangle CDA \Rightarrow \angle CAD = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3) \triangle AEB \sim \triangle AFD \sim \triangle DFC \sim \triangle ADC$$

по двум углам: α и $90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{из } \triangle AFD \sim \triangle DFC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4) \text{ из } \triangle DFC \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{FC}{CD} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD^2 = AC \cdot FC$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Из } \triangle AFD \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AD^2 = AF \cdot AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} AD^2 = AF \cdot AC \\ CD^2 = FC \cdot AC \end{array} : \Rightarrow \frac{AD^2}{CD^2} = \frac{AF}{FC} = \left(\frac{AD}{CD} \right)^2$$

$$\text{Из } \triangle AEB \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{FC} = \left(\frac{AE}{BE} \right)^2 = \frac{AE^2}{BE^2}$$

$$5) \triangle AEB - \text{прямоугольный, с } \angle BEA = 90^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по теореме Пифагора:

$$AE^2 + BE^2 = AB^2 \Rightarrow AE^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 =$$

$$= 11 \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{11}{5^2} = \frac{11}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{AF = \frac{11}{25} FC} \quad CF = \frac{25}{11} AF$$

$$6) AF + FC = AC = 10 \Rightarrow AF + \frac{25}{11} AF = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{11 + 25}{11} AF = 10 \Rightarrow \frac{36}{11} AF = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF = \frac{10}{\frac{36}{11}} = \frac{10 \cdot 11}{36} = \frac{55}{18}$$

$$\text{Ответ: } \frac{55}{18}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Пусть коробок n .

Посчитаем вероятность выиграть, когда игрок открывает 5 коробок.

Вероятность выигрыша = кол-во различных благоприятных выигрышных выборов коробок, т.е. в 5 из количества 3 с шариком : на кол-во всевозможных выборов коробок - таких C_n^5
Из n выбрать 5 разных коробок.

Кол-во благоприятных выборов коробок, это когда игрок выбирает конкретные 3 коробки, в которых мячики и еще $5 - 3 = 2$ другие различные коробки уже из $n - 3$, т.е. 3 уже выбран $\Rightarrow C_{n-3}^2 \Rightarrow$ Вероятность выигрыша, из n для игрока, открывающего 5 коробок:

$$\frac{C_{n-3}^2}{C_n^5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь посчитаем вероятность выигрыша
когда игрок открывает 6 карточек.

Вероятность выигрыша считается
аналогичным образом.

Кол-во всевозможных выборов
карточек - C_n^6

Кол-во благоприятных выборов
карточек, это когда игрок выдвигает
конкретные 3 карточки, в которых
механи и ещё $6 - 3 = 3$ другие

различные карточки уже из $n - 3$, т.к.

3 уже выбрали $\Rightarrow C_{n-3}^3 \Rightarrow$ Вероят-
ность выигрыша, для игрока, открыв-
шая 6 карточек; $\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6}$; Необходимо

найти во сколько раз увеличилась
вероятность выигрыша $\Rightarrow$ необходимо



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

найти значение величины:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

$$\frac{C_{n-3}^3}{C_n^6} \cdot \frac{C_{n-3}^2}{C_n^5} = \frac{C_{n-3}^3 \cdot C_n^5}{C_n^6 \cdot C_{n-3}^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{(n-3)!}{(n-6)! \cdot 3!} \cdot \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} \right)}{\left(\frac{n!}{(n-6)! \cdot 6!} \cdot \frac{(n-3)!}{(n-5)! \cdot 2!} \right)} =$$

$$= \frac{\cancel{(n-3)!} \cdot n!}{(n-6)! (n-5)! \cdot 5! \cdot 3!} \cdot \frac{(n-6)! \cdot \cancel{(n-5)!} \cdot 2! \cdot 6!}{n! (n-3)!} =$$

$$= \frac{2! \cdot 6!}{5! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 6}{6} = 2$$

Ответ: в 2 раза



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 5

Запишем эту непостоянную
арифметическую прогрессию. С
первым членом b и разностью
прогрессии d :

$$b, \quad b+d, \quad b+2d, \quad \dots$$

$$b_n = b + d(n-1)$$

$$y \quad x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0 \quad 2 \text{ корня}$$

$$b + 4d \text{ и } b + 5d \Rightarrow \text{по теореме Виета:}$$

$$2b + 9d = a^2 - a$$

$$(b + 4d)(b + 5d) = a - 5.$$

$$y \quad 4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$2 \text{ корня} \quad b + 2d \text{ и } b + 7d \Rightarrow \text{по теореме Виета}$$

$$2b + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$(b + 2d)(b + 7d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - a = 2b + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4} \quad | \cdot 4$$

$$4a^2 - 4a = a^3 - a^2 \quad | -4a^2 + 4a$$

$$a^3 - a^2 - 4a^2 + 4a = 0$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$a(a^2 - 5a + 4) = 0$$

$$\text{т.к. } a^2 - 5a + 4 = (a-1)(a-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(a-1)(a-4) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } a = 1$$

$$\text{или } a = 4.$$

$$\text{т.к. } a = 0 \Rightarrow 2b + d \cdot 9 = 0$$

$$(b + 4d)(b + 5d) = a - 5$$

$$b^2 + 9bd + 20d^2 = a - 5$$

$$-(b + 2d)(b + 8d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}$$

$$b^2 + 9bd + 14d^2 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6d^2 = a - 5 - \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4} \quad | \cdot 4$$

$$24d^2 = 4a - 20 - 2a^4 - 2a^2 + a^6 + 4$$

$$24d^2 = a^6 - 2a^4 - 2a^2 + 4a - 16 \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 6

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Пусть $a = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 24d^2 = 0 - 0 - 0 + 0 - 16 = -16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = -\frac{16}{24} < 0 \Rightarrow d^2 < 0 \Rightarrow !!!,$$

таким образом d - не целое. $\Rightarrow a \neq 0$.

2) Пусть $a = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 24d^2 = 1 - 2 - 2 + 4 - 16 = -15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24d^2 = -15 \Rightarrow d^2 = -\frac{15}{24} < 0 \Rightarrow d^2 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow !!!$, таким образом d - не целое. $\Rightarrow a \neq 1$.

$$a \neq 1 \text{ и } a \neq 0 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3) 24d^2 = 4^6 - 2 \cdot 4^4 - 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 16 =$$
$$= 4^2 (4^4 - 2 \cdot 4^2 - 2) = 16 (256 - 32 - 2) =$$

$$= 16 \cdot 222 \Rightarrow 24d^2 = 16 \cdot 222 \quad | :8$$

$$3d^2 = 2 \cdot 222 \quad | :3 \Rightarrow d^2 = 2 \cdot 74 = 148 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 2 \cdot 2 \cdot 37$$

$$a = 4 \Rightarrow 2b + 9d = 16 - 4 = 12$$

$$16 + 4b^2 + 9bd + 20d^2 = 4 - 5 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4b^2 + 9bd + 20d^2 = -1 \quad | \cdot 2 \cdot 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☒ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$4a^2 + 2b \cdot 9d + 36d + 18d + 80d^2 + 4 = 0$$~~

~~$$(2b)^2 + 2b \cdot 18d + 80d^2 + 4 = 0$$~~

Пусть $d = 2\sqrt{37}$

$$2b + 9d = 16 - 4 = 12$$

$$2b + 18\sqrt{37} = 12 \quad | :2$$

$$b + 9\sqrt{37} = 6 \Rightarrow b = 6 - 9\sqrt{37}$$

$$(6 - 9\sqrt{37})^2 + 9 \cdot 2\sqrt{37} \cdot (6 - 9\sqrt{37}) + 20 \cdot 4 \cdot 37 = -1$$

$$36 - 108\sqrt{37} + 81 \cdot 37 + 18\sqrt{37} \cdot 6 =$$

$$- 36 - 18\sqrt{37} \cdot 9 \cdot \sqrt{37} + 80 \cdot 37 = -1$$

$$1 + 36 + 81 \cdot 37 + 80 \cdot 37 - 37 \cdot 18 \cdot 9 + \sqrt{37}(-108 + 18 \cdot 6 - 18 \cdot 9) = 0$$

$$37(1 + 81 + 80 - 162) + \sqrt{37} \cdot 0 = 0$$

$$37 \cdot 0 + \sqrt{37} \cdot 0 = 0 \quad \checkmark \text{ и}$$

$$24d^2 = 16 \cdot 222 \Rightarrow \text{при } a=4 \text{ сущ. } b \text{ и } d,$$

что все условия выполняются, т.е.

сущ. арифм. прогресс. и сбалансиров.

корни. при $a=4$; $b=6-9\sqrt{37}$; $d=2\sqrt{37}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Мы доказали, что при $a = 4$, есть
такие корни, и доказали, что
других a быть не может $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Ответ: $a = 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

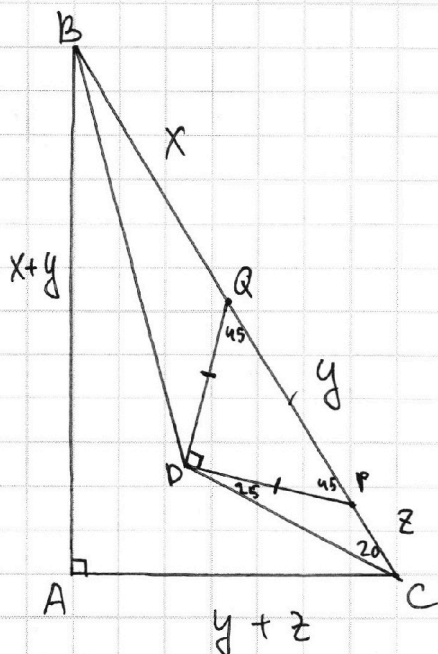
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



✓ 7

1) Введём обозначение:

$$BQ = x; \quad QP = y; \quad PC = z$$

($Q \in BP$ - отрезку т. к.

имеем $BP + CQ \leq BC$ и

$$BA + CA \leq BC \Rightarrow !!!$$

пер - в Δ) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow BP = BA = x + y;$$

$$CQ = CA = y + z \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 2) По теореме Пифагора:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (x+y)^2 + (y+z)^2 =$$

$$= (x+y+z)^2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 2xz$$

3) ΔQPD - прямоугол. и равнобед. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle PQD = \angle QPD = 45^\circ \Rightarrow BQ = BP \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BQ^2 + DP^2 = QP^2 \Rightarrow 2BQ^2 = y^2 \text{ и}$$

$$y^2 = 2xz \Rightarrow 2BQ^2 = 2xz \Rightarrow BQ^2 = xz \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow DQ = \sqrt{xz};$$

4) По теореме косинусов для $\triangle DQC$:

$$DC^2 = DQ^2 + QC^2 - 2 DQ \cdot QC \cdot \cos 45^\circ$$

$$DC^2 = xz + y^2 + z^2 + 2yz - 2\sqrt{xz} \cdot (y+z) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$DC^2 = xz + y^2 + z^2 + 2yz - \sqrt{2xz} \cdot (y+z)$$

$$DC^2 = xz + y^2 + z^2 + 2yz - y(y+z)$$

$$DC^2 = xz + y^2 + z^2 + 2yz - y^2 - yz$$

$$DC^2 = xz + z^2 + yz = z(x+y+z) =$$

$$= CP \cdot CB \Rightarrow CD^2 = CP \cdot CB \Rightarrow \text{по теореме}$$

точки C для дмс. дкр. $\triangle PBD \Rightarrow$

$$\Rightarrow CD^2 = CP \cdot CB \Rightarrow CD - \text{касат. к}$$

дмс. дкр. $\triangle PDB \Rightarrow \angle PDC = \angle PBD$

5) $\angle DPQ = 45^\circ$ - внешний для $\triangle DPC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle DPQ = \angle PDC + \angle PCB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle PDC = 45 - 20 = 25^\circ \Rightarrow \angle PBD = 25^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle DBC = 25^\circ \Rightarrow \text{Ответ: } 25^\circ$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☐☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓✓

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C_{n-3}^2 = \frac{(n-3)!}{(n-3-2)! \cdot 2!} = \frac{(n-3)!}{(n-5)! \cdot 2} = \frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$C_n^5 = \frac{n!}{(n-5)! \cdot 5!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$$

$$C_{n-3}^3 = \frac{(n-3)!}{(n-3-3)! \cdot 3!} = \frac{(n-3)!}{(n-6)! \cdot 6} = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}$$

✓

$$C_n^6 = \frac{n!}{(n-6)! \cdot 6!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{720}$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

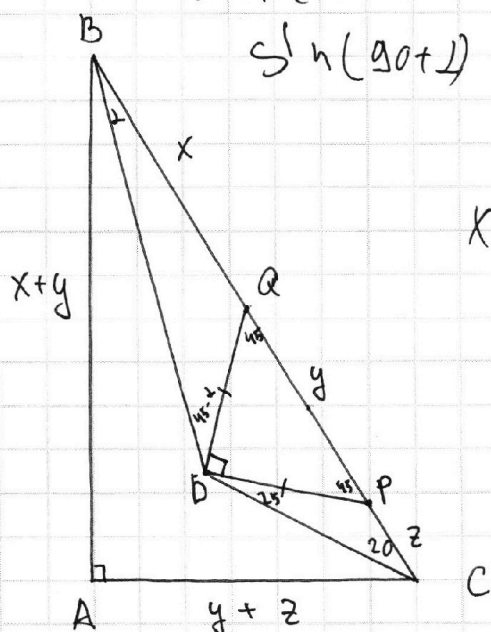


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin(90-2) = \cos 2$$

$$\sin(90+2) = \cos 2$$

$$\cos(90-2) = \sin 2$$

$$\cos(90+2) = -\sin 2$$

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 = (x+y+z)^2$$

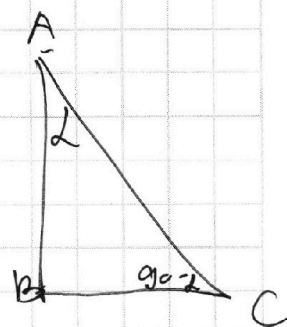
$$x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$y^2 = 2zx$$

$$2DQ^2 = y^2$$

$$DQ^2 = zx$$



$$\cos(180-2)$$

$$\frac{BC}{AC}$$

$$DQ = DP = \sqrt{zx}$$

$$BC^2 = PD^2 + z^2 - 2z \cdot DP \cdot \cos(180-45) =$$

$$= BC^2 = xz + z^2 - 2z \cdot \sqrt{xz} \cdot \cos(90-45)$$

$$\cos(180-45) = \cos(90+90-45) = -\sin(90-45) = -\sin 45$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~y^2~~

$$bC^2 = xz + y^2 + z^2 + 2yz - 2\sqrt{xz}(y+z) \cdot \cos 45$$

$$bC^2 = xz + y^2 + z^2 + 2yz - \sqrt{2xz}(y+z)$$

$$bC^2 = xz + \cancel{y^2} + z^2 + 2yz - \cancel{y^2} - yz =$$

$$= xz + z^2 + yz = z(x+z+y)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

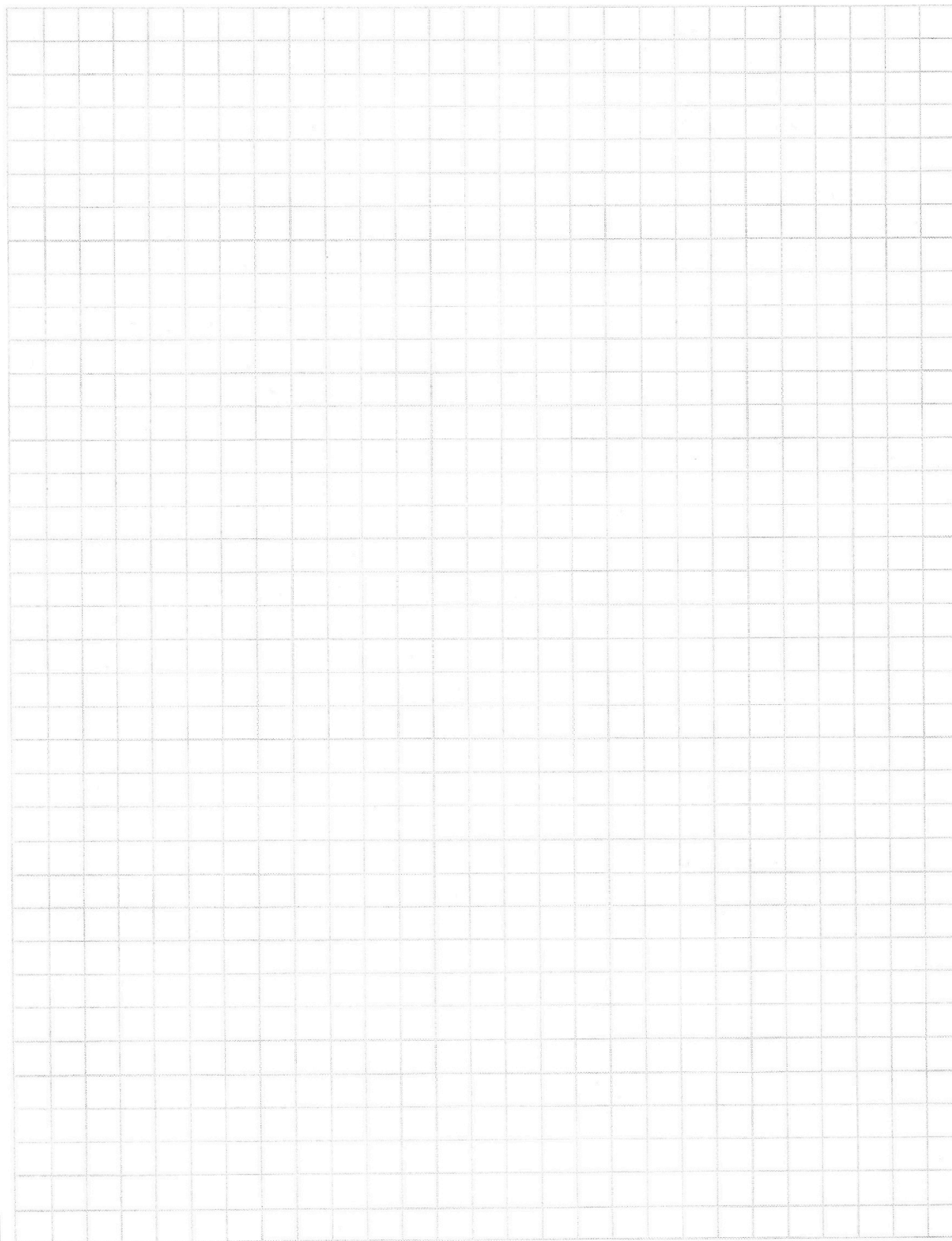
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b^2 + 9bd + 20d^2 = a - 5$$

$$b^2 + 9bd + 14d^2 = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}$$

$$6d^2 = a - 5 - \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}$$

$$24d^2 = 4a - 20 - 2a^4 - 2a^2 + a^6 + 4$$

$$24d^2 = a^6 - 2a^4 - 2a^2 + 4a - 16$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 192 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 34 \\ \hline 222 \overline{) 3} \\ - 21 \\ \hline 12 \times 2 \\ - 22 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 74 \overline{) 12} \\ 27 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

25

$$b \rightarrow b+d \rightarrow b+2d, b+3d \dots$$

$$b_n = b + (n-1)d$$

$$x^2 - (a^2 - a)x + a - 5 = 0$$

$$b+4d \quad \text{и} \quad b+5d$$

$$4x^2 - (a^3 - a^2)x + 2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4 = 0$$

$$b+2d \quad \text{и} \quad b+7d$$

$$b+4d + b+5d = a^2 - a$$

$$(b+4d)(b+5d) = a-5$$

$$2b + 9d = a^2 - a$$

$$(b+4d)(b+5d) = a-5$$

$$2b + 9d = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$(b+2d)(b+7d) = \frac{2a^4 + 2a^2 - a^6 - 4}{4}$$

$$a^2 - a = \frac{a^3 - a^2}{4}$$

$$4a^2 - 4a = a^3 - a^2$$
$$4a(a-1) = a^2(a-1)$$

$$a(a-1)(a-4) \neq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1
1 2 1
1
 $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = \sqrt{2} \cdot 1$
2

~3

~~AF (AF - AE)~~

$AD^2 = AF \cdot AC$

$\frac{CD}{10} = \frac{CF}{CD}$

$AF^2 + FD^2 = AF \cdot AC$

$25 + 36 = 61$

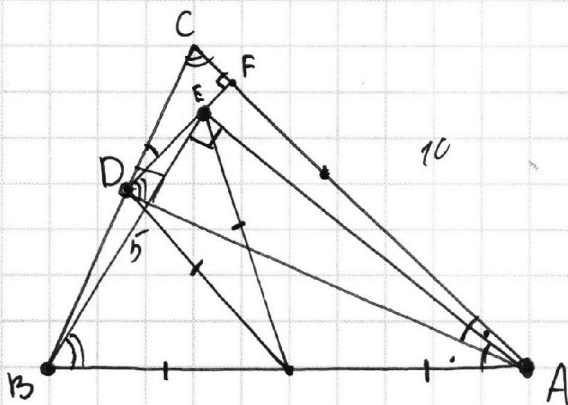
$AF(AC - AF) = FD^2 \sqrt{61}$

$DE \cdot AB + BD \cdot EA = AD \cdot BE$

$AC = 10$

$AB = 6$

$AF = \frac{FD^2}{CF}$
 $\left(\frac{BE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{CD}{AB}\right)^2 = \frac{CF}{AF}$
 $BE = 5$
 $CD^2 = CF \cdot 10$



$\frac{AD}{AC} = AF?$

$AD^2 = AF \cdot 10$

sin $\begin{matrix} 0 & 30 & 45 & 60 & 90 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{matrix}$

cos $\begin{matrix} 0 & 30 & 45 & 60 & 90 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix}$

$\frac{5}{6} = \frac{CF}{CD} = \frac{FD}{AD}$

$= \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$

$AF = \frac{AE \cdot AD}{6}$

$AF = \frac{AE}{AB} \cdot AD$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 3z + z^2 \\ yz = 3x + x^2 \\ zx = 3y + y^2 \end{cases} \quad x, y, z \neq 0$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = ?$$

$$z(z+3) = xy \quad z^2 + 3z + 3z + 9$$

$$z+3 = \frac{xy}{z} \quad xy + 3z + 9$$

$$\frac{xy}{z^2} + \frac{y^2 z^2}{x^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} = ? \quad xy + 3(z+3)$$

$$\frac{x^4 y^4 + y^4 z^4 + x^4 z^4}{x^2 y^2 z^2} \quad 9 \cdot 10 + 9 \quad | \wedge 3$$

$$z = \frac{3y + y^2}{x} \quad (9 \cdot 100^2 + x 100^{2-1} + y \cdot 100^{2-2})^3$$

$$yz = \frac{3y^2 + y^3}{x} = 3x + x^2$$

$$3y^2 + y^3 = 3x^2 + x^3 \quad (x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x-y)(xy)$$

$$x^3 - y^3 + 3x^2 - 3y^2 = 0 \quad (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 y^2 z^2 = xyz(x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = (x+3)(y+3)(z+3)$$

$$xyz = \cancel{xyz} (xy + 3x + 3y + 9)(z+3)$$

$$\cancel{xyz} = \cancel{xyz} + 3xy + 9x + 3xz + 3yz + 9y + 9z + 27$$

$$3xy + 3xz + 3yz + 9x + 9y + 9z + 27 = 0$$

$$xy + yz + xz + 3(x + y + z) + 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6(x + y + z) + 27$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ - 18 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$3(x + y + z) = \cancel{9} - 9 - xy - yz - xz$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 18 - 2xy - 2yz - 2xz + 27$$

$$(x-1)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz + 9$$

$$yz - 3x + xy - 3z + xz - 3y - 2xy - 2yz - 2xz + 9 - 3(x + y + z) - (xy + yz + zx) + 9$$

