



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 4, а  $y$  — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 12xy$ .
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 16$ ,  $BP = 8$ ,  $AC = 22$ .
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\text{Число } A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = \\ = 1111a = 11 \cdot 101a$$

( $a$  - цифра  $\overline{aaaa}$  - десят. единица числа  $a$ )

$A \cdot B \cdot C$  - квадрат кат. числа  $\Rightarrow$  все простые множители входят в чётной степени.

101 - простое.

$$A = 11 \cdot 101 \cdot a \Rightarrow A : 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101,$$

т. к.  $A \cdot B \cdot C$  - квадр., то  $A \cdot B \cdot C : 101^2$

$$(11 \cdot 101 \cdot a) \cdot B \cdot C : 101^2$$

$$11 \cdot a \cdot B \cdot C : 101$$

$C \leq 99$ ,  $a \leq 9 \Rightarrow$  на 101 делится только

B. На 101 делится след. трёхзнач. числа:

101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909.

Только в одном из них есть 7  $\Rightarrow B = 707$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot a \Rightarrow A : 11 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11^2 \quad 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 707 \cdot C : 11^2$$

$$101^2 \cdot 7 \cdot a \cdot C : 11, a \leq 9 \Rightarrow C : 11$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow C$  это одно из чисел  $11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$ . 1 есть только в один  $\Rightarrow C = 11$

$$707 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 11a ;'7 \Rightarrow 707 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 11a ;'7^2,$$
$$(707 ;'7)$$

$$\Rightarrow 101^2 \cdot 11^2 \cdot a ;'7 \Rightarrow a ;'7 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow A = 7777$$

$$B = 707$$

$$C = 11$$

$$7777 \cdot 707 \cdot 11 = 7 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot 11 =$$

$$= (7 \cdot 11 \cdot 101)^2$$

Ответ:  $A = 7777$ ,  $B = 707$ ,  $C = 11$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N 2

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{y+x+3}{xy}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{(y+4)(x-4)+3}{(y+4)(x-4)} = \frac{y+x+3}{(y+4)(x-4)}$$

Возможно 2 случая: 1)  $y+x+3=0$

$$2) xy = (y+4)(x-4)$$

$$1) y > 0 \quad x > 0 \Rightarrow x+y > 0 \Rightarrow x+y+3 > 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x+y+3 \neq 0$ .  $\Rightarrow$  такого не может быть.

$$2) xy = (y+4)(x-4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16 \Rightarrow x - y = 4 \Rightarrow x = 4 + y$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (4+y)^3 - y^3 - 12(4+y) \cdot y =$$

$$= 64 + 48y + 12y^2 + y^3 - y^3 - 48y - 12y^2 = 64.$$

Ответ:  $M = 64$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

a) Введём замену  $\alpha = \pi X$ ,  $\beta = \pi Y$ .

$$(\sin \beta - \sin \alpha) \cdot \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cdot \cos \beta.$$

$$\sin^2 \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos^2 \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

$$\sin^2 \beta - \cos^2 \beta = \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

$$-\cos 2\beta = \cos(\beta - \alpha).$$

~~Это~~

2β и β - α ~~Это~~

какое-то из пар тоже:

$$\cancel{1, 2}; \quad 1, 4; 1, 3; 2, 3; 2, 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\beta + \beta - \alpha = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Либо } 2\beta - \beta + \alpha = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\left[ \begin{array}{l} 3\beta - \alpha = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \beta + \alpha = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

Обратная замена:

$$\left[ \begin{array}{l} 3\pi Y - \pi X = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 3Y - X = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \pi Y + \pi X = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ Y + X = 1 + 2m, m \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3y - x = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ y + x = 1 + 2m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Для целых:

$$\begin{cases} x = 3y - 2n - 1, n \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{когда такого } n \text{ не существует?} \\ & \text{тогда } 3y - x - \text{чётн.,} \\ & \text{а во всех ост. сл. сущ.} \rightarrow \\ & \Rightarrow y \text{ и } x \text{ разн. чётности} \\ & \text{А-но для } m: \end{cases}$$

Ответ: для всех будет 2 серии решений.

1) Для любого  $y$ :  $x = 3y - 2n - 1, n \in \mathbb{Z}$

2) Для любого  $y$ :  $x = 1 + 2m - y, m \in \mathbb{Z}$

5)

$$\arccos \frac{x}{7} \geq 0$$

$$\arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}.$$

$$\arccos \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{если левая часть}$$

неравенства отрэг., то исходное неравенство возвращается во всех случаях кроме равенства.

$$\arcsin \frac{y}{4} = +\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow y = 4$$

$$\arccos \frac{x}{7} = 0 \Rightarrow \frac{x}{7} = 1 \Rightarrow x = 7 \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \text{не удовлетвор.} \\ \text{нерав-бы} \end{array} \right.$$

$$-1 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \quad -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \Rightarrow -7 \leq x \leq 7 \quad \text{и} \quad -4 \leq y \leq 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$-7 \leq x \leq 7$        $-4 \leq y \leq 4$       и они разной четности:

$$8 \cdot 5 + 7 \cdot 4 = 68 \text{ реш.}$$

1       $\nwarrow$  четн. y  
неч. x

$$68 - 1 = 67 \text{ решен. } (y=4, x=7 \text{ не подх.})$$

Ответ: а) ~~67~~ где подх. б)

$$(3y - 2n - 1; y) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(1 + 2m - y; y) \quad m \in \mathbb{Z}$$

в) 67 решений



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$k$ -кол-во билетов в №4  
конце месяца  
Рассчитаем вероятность:

$k$ -кол-во  
 $m$ -кол-во билетов  
 $n$ -кол-во одинак.

X

1) Количество исходов:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

2) Количество благоприятных исходов:

У Пети и Васи есть билетов  $\Rightarrow$  нужно  
раздать  $k-2$  билета между оставш.  $n-2$   
чел.

$$C_{n-2}^{m-2} = \frac{(n-2)!}{(m-2)!(n-2-(m-2))!} = \frac{(n-2)!}{(m-2)!(n-m)!}$$

Вероятность:

$$\frac{(n-2)! \cdot m! \cdot (n-m)!}{(m-2)!(n-m)! \cdot n!} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}$$

$$\text{При } m=4 \quad \frac{4(4-1)}{n(n-1)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$\text{При } m=k \quad \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{K(K-1)}{n(n-1)} = \frac{11 \cdot 12}{n(n-1)} \Rightarrow K^2 - K - 11 \cdot 12 = 0$$

$$(K-12)(K+11) = 0$$

$K_1 = 11 < 0 \Rightarrow$  не подходит

$K_2 = 12$

Ответ: 12



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

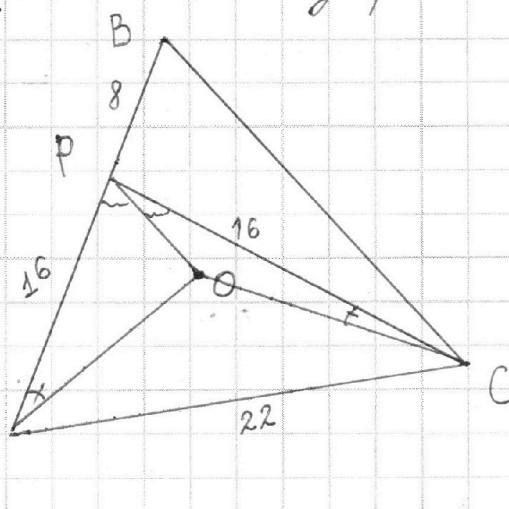
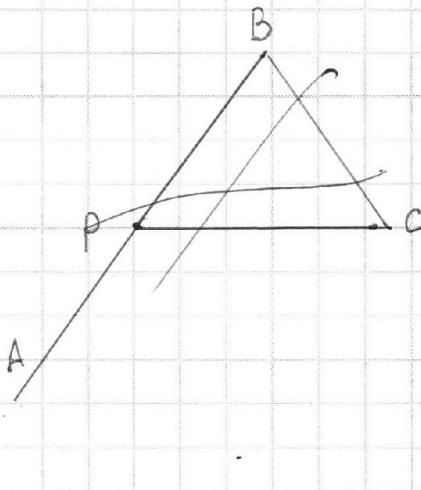
СТРАНИЦА

1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$\triangle ABC$ -остроугольный  $\Rightarrow O$ -внутри  $\triangle ABC$



Ещё т.  $O$  лежит внутри

$\triangle APC$ :

$BPOC$ -вписан в окр.  $\omega_2$   $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle OCB + \angle BPO = 180^\circ$$

$$\angle APO + \angle BPO = 180^\circ \text{ (смежные)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle OCB = \angle APO$$

$\angle OCB = \angle OBC$  (н.к.  $\triangle OBC$ -р/с ( $OB$  и  $OC$ -рад.  $\omega_2$ ))  $\Rightarrow \angle APO = \angle OBC$

$\angle OBC = \angle CPO$  (как вписанное в окр.  $\omega_2$ )  $\Rightarrow$  и опир. на одну дугу

$\Rightarrow$

$$\angle APO = \angle CPO$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle PCO = \angle OBP \text{ (m.k. BCOP-внuc.)}$$

$$\begin{aligned} \angle OBP &= \angle OBA = \angle OAB \text{ (m.k. } \triangle OAB \text{-p/б: } OA = \\ &= OB \text{ (как радиусы } \omega_1). \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \angle PCO = \angle OAB$$

$$\angle APO = \angle CPO$$

$$\angle PAO = \angle PCO$$

$$\angle APO + \angle PAO + \angle AOP = \angle CPO + \angle PCO + \angle COP = 180^\circ \quad \left. \right)$$

$$\Rightarrow \angle AOP = \angle COP$$

$$\angle APO = \angle CPO$$

OP - общая сторона  $\triangle AOP$  и  $\triangle COP$   $\left. \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle AOP = \triangle COP \Rightarrow AP = CP = 16.$$

По таиг. приз.  $\triangle APC$  по форме Герона:

$$S_{APC} = \frac{16+16+22}{2} = 27 \quad (S_{APC})$$

$$S_{ABC} = \sqrt{27 \cdot (27-22) \cdot (27-16)(27-16)} = 33\sqrt{15}$$

$$S_{APC} = \frac{1}{2} AP \cdot AC \cdot \sin(\angle PAC)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{AP}{AB} = \frac{16}{16+8} = \frac{2}{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{3}{2} \cdot 33 \sqrt{15} = \frac{99}{2} \sqrt{15}$$

Ответ:  $\frac{99}{2} \sqrt{15}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.













СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$x^2 + y^2 \leq 36$  - это <sup>круг</sup> с центром в  $O$  и радиусом 6.

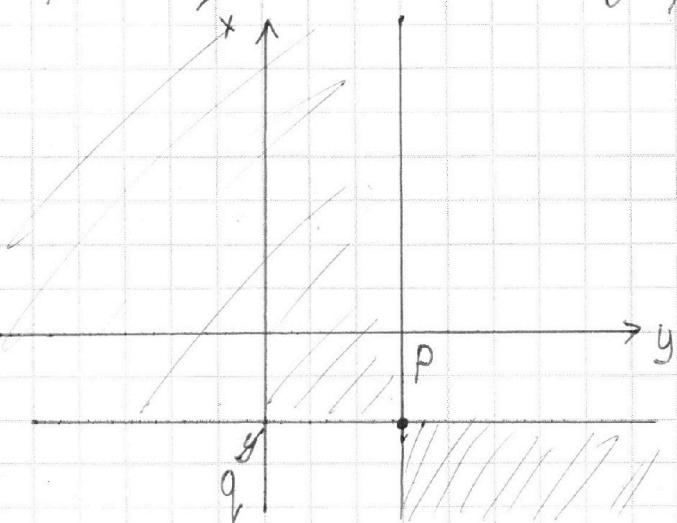
$$-4 \sin \alpha = p, \quad -4 \leq p \leq 4$$

$$p^2 + q^2 = 16 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 16$$

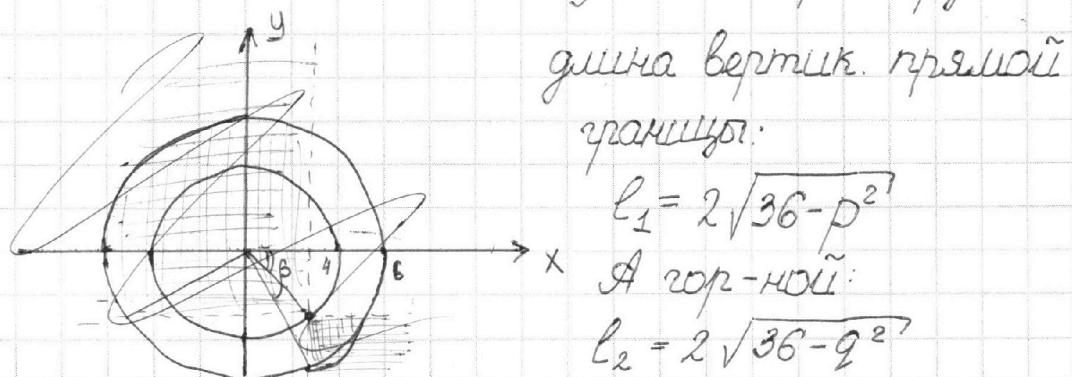
$$q = 4 \cos \alpha, \quad -4 \leq q \leq 4$$

точка  $p, q$  леж. на окр. радиус 4

$$(x-p)(y-q) \leq 0 \text{ имеет след. реш.}$$



Решение системы: 4 в 2-й четверти круга



длина вертик. прямой  
участок:

$$l_1 = 2\sqrt{36 - p^2}$$

А гор-нол:

$$l_2 = 2\sqrt{36 - q^2}$$



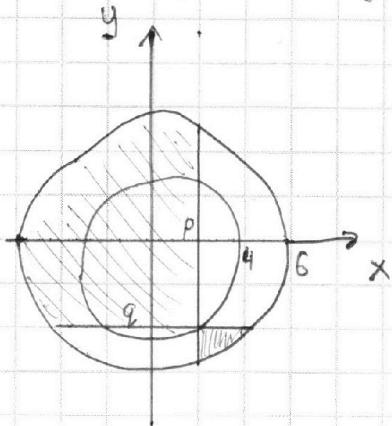
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Сумма длин дуг не зависит от точки



$$\Rightarrow 2\sqrt{36-p^2} + 2\sqrt{36-(16-p^2)} =$$

= max

$$\sqrt{36-p^2} + \sqrt{20+p^2} - \text{max}$$

Макс. расм.  $36-p^2=20+p^2$

$$2p^2=16$$

$$p=2\sqrt{2} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$q=2\sqrt{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Max



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
3 из \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Для первой серии решений уравнения:

$$x = 3y - 2n - 1, n \in \mathbb{Z}$$

$$-7 \leq 3y - 2n - 1 \leq 7$$

$$-6 + 2n \leq 3y \leq 8 + 2n$$

При  $y = -4$   $x = 3 \cdot (-4) - 2n - 1 = -13 - 2n$

$$-7 \leq -13 - 2n \leq 7$$

$$6 \leq -2n \leq 20$$

$$3 \leq -n \leq 10$$

$$-3 \geq n \geq -10 \Rightarrow 8 \text{ решений.}$$

При  $y = -3$   $x = 3 \cdot (-3) - 2n - 1 = -10 - 2n$

$$-7 \leq -10 - 2n \leq 7$$

$$3 \leq -2n \leq 17$$

$$-1,5 \geq n \geq -8,5 \Rightarrow 7 \text{ решений}$$

При  $y = -2$   $x = 3 \cdot (-2) - 2n - 1 = -7 - 2n$

$$-7 \leq -7 - 2n \leq 7$$

$$0 \leq -2n \leq 14$$

$$0 \geq n \geq -7 \Rightarrow 8 \text{ решений}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2y = m + n + 1 \Rightarrow y = \frac{m+n+1}{2}$$

$$x = 1 + 2m - \frac{m+n+1}{2} = \frac{2+4m-m-n-1}{2} = \frac{2+3m-n-1}{2}$$

Если  $y$ -четный, то по паре чисел и

$$\text{Если } x = 3y - 2n - 1$$

9. 15

$$-4 \leq \frac{m+n+1}{2} \leq 4$$

$$-7 \leq \frac{3m-n-1}{2} \leq 7$$

$$-11 \leq \frac{4m}{2} \leq 11 \Rightarrow -11 \leq 2m \leq 11$$

$$-5,5 \leq m \leq 5,5$$

$$m = -5$$

$$m = 5$$

Когда

$$x = 3y - 2n - 1$$

$2n+1 = 3y-x$ , когда не сущ.

$n$ , когда  $3y-x$ -четн.

Все пары  $y$  и  $x$  имеют разн.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

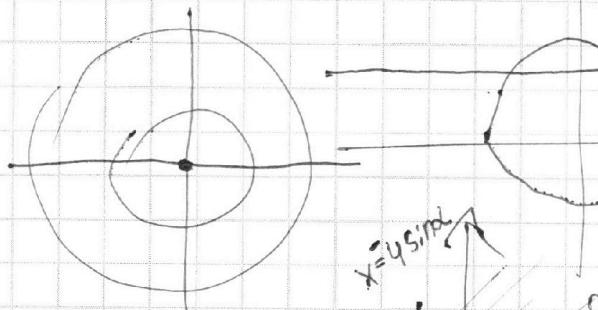
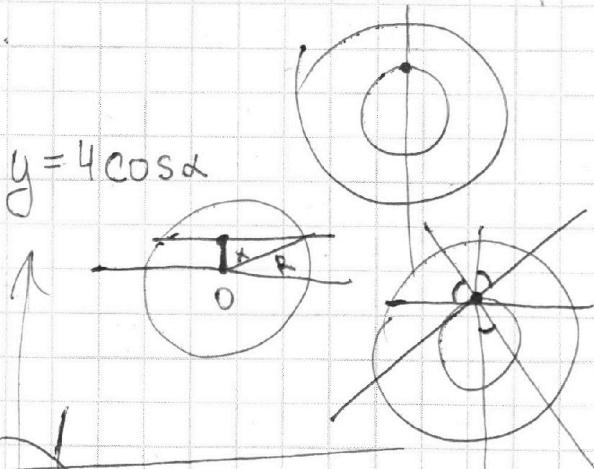
$$(x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0.$$

$$x^2 + y^2 \leq 36$$

$$x + 4 \sin \alpha > 0$$

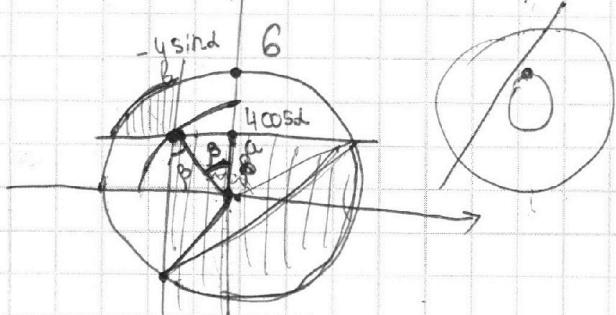
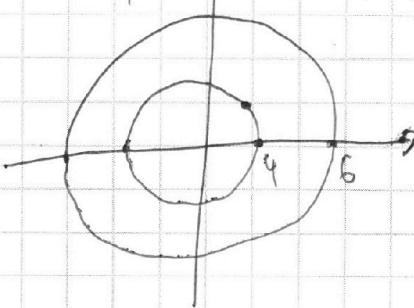
$$y - 4 \cos \alpha < 0$$

$$y = 4 \cos \alpha$$



$y = 4 \sin \alpha$

$\cos \alpha$  урвб  
 $\alpha = \text{сущ. прям.}$



$$\frac{16}{2 \cdot 36 - a^2} + 2$$

ed

fb

I

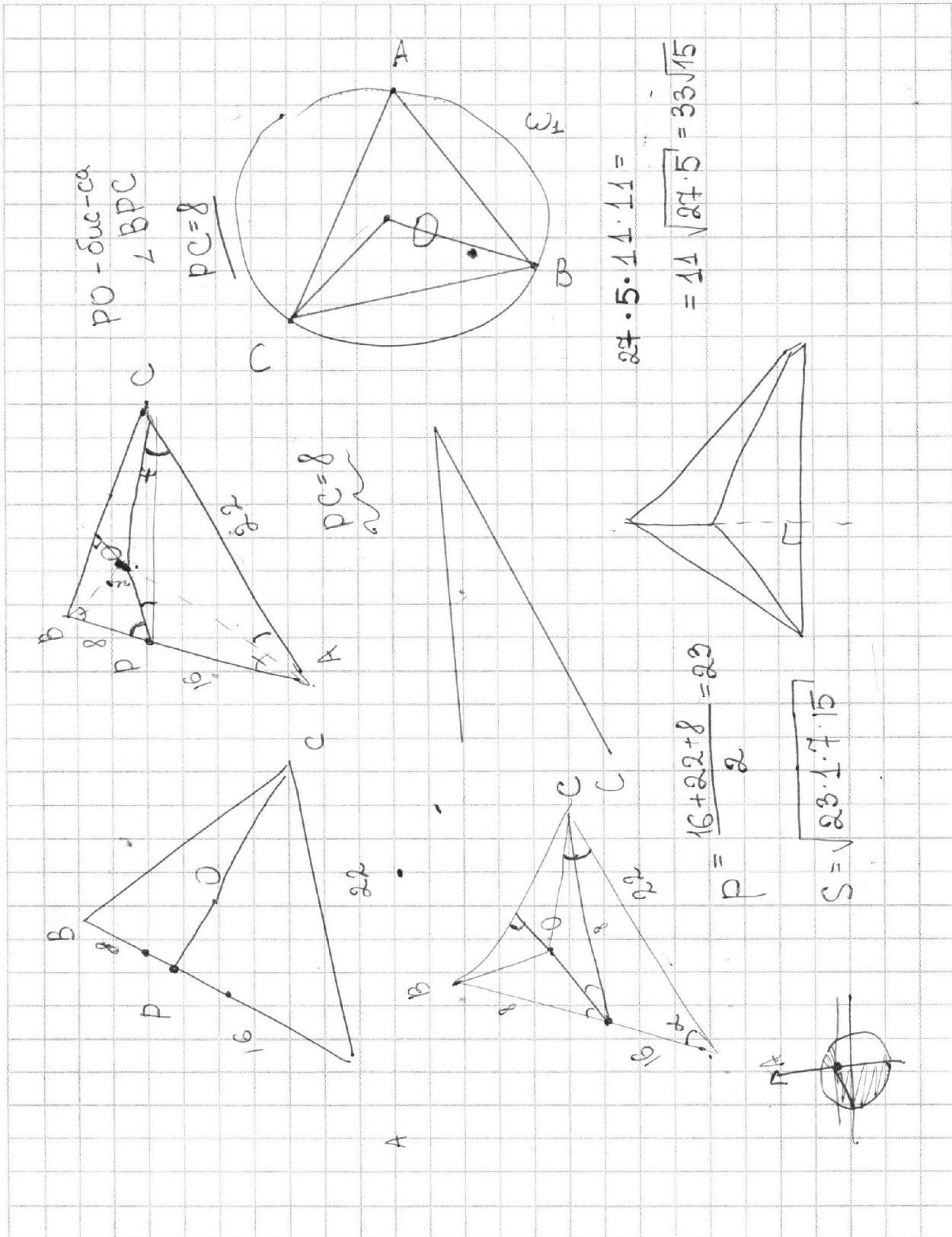


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



I

I

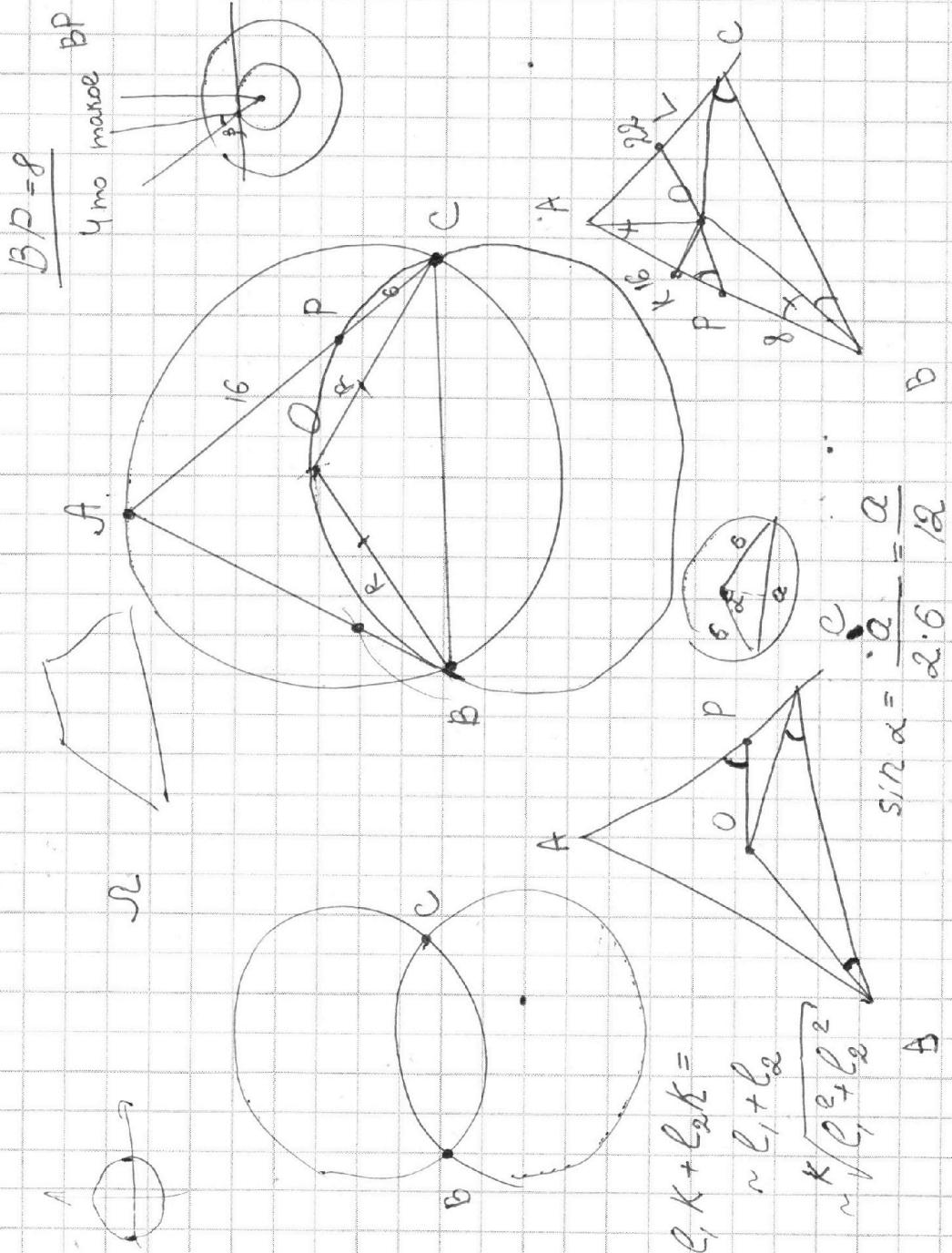


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
5 из   

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$y + x = 1 + 2m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = 1 + 2m - y, m \in \mathbb{Z}$$

$$y = -4 : \quad x = 1 + 2m + 4$$

$$-7 \leq 5 + 2m \leq 7$$

$$-12 \leq 2m \leq 2$$

$$-6 \leq m \leq 1 \Rightarrow 8 \text{ решений}$$

$$y = -3 : \quad -5, 5 \leq m \leq 2, 5 \Rightarrow 7 \text{ реш.}$$

$$y = -2 : \quad -4 \leq m \leq -3 \leq m \leq 4 \Rightarrow 8 \text{ реш.}$$

$$y = -1 : \quad -1, 5 \leq m \leq 5, 5 \Rightarrow 7 \text{ реш.}$$

$$y = 0 : \quad 0 \leq m \leq 7 \Rightarrow 8 \text{ реш.}$$

$$y = 1 : \quad 1, 5 \leq m \leq 8, 5 \Rightarrow 7 \text{ реш.}$$

$$y = 2 : \quad 3 \leq m \leq 10 \Rightarrow 8 \text{ реш.}$$

$$y = 3 : \quad 4, 5 \leq m \leq 11, 5 \Rightarrow 7 \text{ реш.}$$

$$y = 4 : \quad 6 \leq m \leq 13 \Rightarrow 8 \text{ реш.}, \text{ но среди}$$

$$\text{них } x = 7 \quad y = 4 \Rightarrow \text{малого } 7$$

$$8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 7 = 67$$

Какие-то соображения:

$$3y - 2n - 1 = 1 + 2m - y \Rightarrow 4y = 2m + 2n + 12$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
4 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{При } y = -1 \quad x = 3 \cdot (-1) - 2n - 1 = -4 - 2n$$

$$-7 \leq -4 - 2n \leq 7$$

$$-3 \leq -2n \leq 11$$

$$1,5 \geq n \geq -5,5 \Rightarrow 7 \text{ решений}$$

~~$$\text{При } y = 0 \quad x = -2n - 1$$~~

~~$$-7 \leq -2n - 1 \leq 7$$~~

~~$$-6 \leq -2n \leq 8$$~~

~~$$3 \geq n \geq -4 \Rightarrow 8 \text{ решен.}$$~~

$\Delta = 1$

$$k^2 - k - 11 \cdot 12 = 0$$

$$\frac{(k-2)!}{(k-2)!} \cdot \frac{(k-1)!}{(k-1)!} \cdot \frac{(k+1)!}{(k+1)!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot (4-1)!}{n(n-1)}$$

$$\text{A-ко: при } y = +1 \quad 4,5 \geq n \geq -2,5 \Rightarrow 7 \text{ реш.}$$

~~$$\text{при } y = 2 \quad 6 \geq n \geq -1 \Rightarrow 8 \text{ реш.}$$~~

~~$$\text{при } y = 3 \quad 7,5 \geq n \geq 0,5 \Rightarrow 7 \text{ реш.}$$~~

~~$$\text{при } y = 4 \quad 9 \geq n \geq 2 \Rightarrow 8 \text{ реш., но}$$~~

~~$$\text{среди них } y = 4 \quad x = 7 \quad (y = 4, x = 7)$$~~

~~$$\text{среди них } x = 7 \quad y = 4 \Rightarrow \text{точка } 7 \text{ реш.}$$~~

Итого:

$$8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 8 + 7 + 7 = 32 + 35 =$$

$$= 67$$

Две I серии решений



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$n = \text{один}$

$$\frac{n!}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\frac{(n-2)!}{(n-2)!/(n-k)!} = n^k$$

Рисунок к формуле  
 $C_n^k$

$$C_n^k$$

$$8-5-8-$$

$$1) (n-k+1) \cdot k$$

$$n+1 \cdot k$$

$$2) n \cdot$$

или

$$x - 4$$

$$x = x$$

$$x = x$$

$$x = x$$

$$T \cdot (T-T) = 0 \cdot (0-0)$$

$$T = x \quad 0 = y$$

$$T = x \quad 0 = y$$

$$T \cdot (T-T) = 0 \cdot (0-0)$$

$$(K-2)! \cdot (n-K)! =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot (n-4)! \cdot \frac{k \cdot (k-1)}{(n-k+1)(n-k+2)} = \frac{12 \cdot 11}{(n-2)(n-3)} \cdot (K-2)! = 2^0$$

$$(K-2)! \cdot (n-K)! = 2^2 \cdot (n-4)!$$

\*ошиб

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
из



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1111a

$$\begin{array}{r} -1111 \\ \underline{-11} \\ 011 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ \underline{101} \end{array}$$

$$\arccos \frac{x}{\sqrt{2}} - \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin z \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{\sqrt{2}} - \arcsin \frac{y}{\sqrt{2}} > -\frac{\pi}{2}$$

$$x+y = 2n$$

Все синусы кроме синуса падают:

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = -\sqrt{2}\pi k - \sqrt{2}$$

$$y = -\sqrt{2}\pi k - \sqrt{2}$$

$$-\arcsin z \geq -\frac{\pi}{2}$$

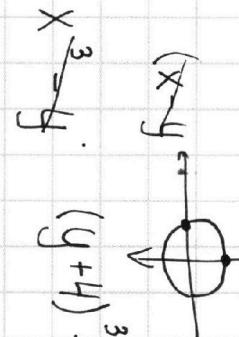
$$y = -2\pi + 8\pi k$$

$$C: 11 \Rightarrow C=11$$

$$\text{Число } 09 \text{ оо } B = 707$$

$$a = 7, b = 2n - x, n \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = 2n, n \in \mathbb{Z}$$



$$f(x) = x^3 - 3x^2y$$

$$(y+h)^3 - y^3 - 12yh = 27h^2$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(1 + \cos 3\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$T = \frac{1}{2}x$$

$$xy = xc + 4x - 4y - 16 \Rightarrow xc + 2x - 4y = 16$$

$$x+y = 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{(h+b)(h-2x)}{h+b+x} = \frac{(h+b)(h-2x)}{h+b+3}$$

$$\frac{(h+b)(h-2x)}{h+b+x} = \frac{(h+b)(h-2x)}{h+b+3}$$



$$k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta = 1$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \beta = (\cos \beta + \cos \alpha) \cos \beta$$