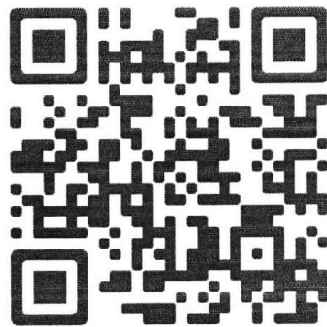




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① число A представим в виде
 $A = 1111 \cdot a$, где $a \in [1; 5]$, $a \in \mathbb{N}$;

$$A = 11 \cdot 101 \cdot a.$$

$$\text{Значит } A \cdot B \cdot C = K^2,$$

$$A : 11 \text{ и } 101 \Rightarrow (B \cdot C) : 11 \text{ и } 101,$$

$$\text{т.к. } a \in [1; 5], a \notin \{11; 101\}$$

$C \not: 101$, т.к. 101 - простое число,
а C - двузначное число. Значит

$B : 101$ и имеет в записи "7"

$$\Rightarrow \boxed{B = 707} - \text{единственное 3-знач.}$$

число $: 101$ и содержит и "7".

При этом $707 \not: 11$, значит

$C : 11$ и C - двузначное число, сод.

"1" в записи. $\Rightarrow \boxed{C = 11}$.

Но $A : 7$, т.к. $B : 7$, чтобы

$$(A \cdot B \cdot C) : 7^2 \Rightarrow a = 7; \boxed{A = 7777}$$

Ответ: $\{A; B; C\} = \{7777; 707; 11\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$② K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

Положим $K(x; y) = K(x-4; y+4)$;

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)};$$

$$\begin{cases} x+y+3=0 & \{x, y\} \in \emptyset, \text{ т.к. } x, y > 0 \\ xy = (x-4)(y+4); & 4x-4y-16=0 \\ x, y > 0 & \begin{aligned} x &= y+4; \\ y &= x-4; \\ x-y &= 4; \end{aligned} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 12xy \\ &= 4(y^2 + 8y + 16 + y^2 + y(y+4)) - 12y(y+4) \\ &= 12y^2 + 32y + 4^2y + 16 \cdot 4 - 12y^2 - 48y \\ &= 16 \cdot 4 = \underline{64} \end{aligned}$$

M не зависит от x, y при данных условиях и равно 64.

Ответ: $M = 64 \quad \forall x, y > 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(3) a) (\sin 8y - \sin 8x) \sin 8y = (\cos 8y + \cos 8x) \cos 8y$$

$$8y = u; \quad 8x = v;$$

$$2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \sin u = 2 \cos v \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\left[\cos \frac{u+v}{2} = 0; \quad \frac{u+v}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \sin \frac{u-v}{2} \sin u = \cos v \cos \frac{u-v}{2} \right]$$

$$\cos u \cos \frac{u-v}{2} - \sin u \sin \frac{u-v}{2} = 0$$

$$\cos \left(u + \frac{u-v}{2} \right) = 0 \quad \frac{3u-v}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$8(x+y) = \pi + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$8(3y-x) = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

~~$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad y_0 \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$~~

Множество решений системы имеет вид;

$$(x, y): \left((x_0; 1-x_0+2k) \mid k \in \mathbb{Z} \right); \left((x_0; \frac{1}{3}(1+x_0+2n)) \mid n \in \mathbb{Z}; x_0 \in \mathbb{R} \right)$$

$$\text{Ответ: } a) \left((x_0; 1-x_0+2k) \mid k \in \mathbb{Z} \right); \left((x_0; \frac{1}{3}(1+x_0+2n)) \mid n \in \mathbb{Z}; x_0 \in \mathbb{R} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 1) \quad & \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}; \\ & \arccos \frac{x}{7} - \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \\ & \arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0 \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\pi/2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\pi/2} \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

~~Решение задачи~~

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} \neq 0; & \frac{x}{7} \neq 1; & x \neq 7 \\ \arccos \frac{y}{4} \neq 0 & \frac{y}{4} \neq 1; & y \neq 4 \end{cases}$$

Членами этого неравенства являются все значения x, y , такие что $x \neq 7$ и $y \neq 4$

Рассмотрим $x=7$ и $y=4$ в знаменателе

$$\begin{aligned} \text{р-во: } & (\sin 4\pi - \sin 7\pi) / \sin 4\pi = \\ & = (\cos 4\pi + \cos 7\pi) \cos 4\pi. \end{aligned}$$

$$0 = (1-1) \cdot 1 = 0, \text{ поэтому, зная}$$

$x=7; y=4$ - является решением уравнения



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$H_0, D(\arccos \beta) = [-1; 1]$$

$$x \in [-7; 7]; y \in [-4; 4]$$

$$\text{Ели } x = -7; \begin{cases} y = 8 + 2k; k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{1}{3}(8 + 2n) n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$y = 4 - x_0 + 2k \text{ при } x - \text{нечетном}$$

- 5 решений, при четном $x - 4$ реш.

~~т.е. при $x \in [-7; 7]$ - 15 вариантов
для каждого x 5 значений y .
5 * 15 = 75~~

Далее расс решения будут

$$3y = 1 + x_0 + 2n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ели } x = -7; \begin{cases} 3y = -6 + 2n; n \in \mathbb{Z} \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$

$$3y \in [-12; 12]; 3y = \underbrace{1 + x_0 + 2n}_{\in [-12; 12]}, n \in \mathbb{Z}$$

~~при $x = -7$ - 13 решений~~
при $x = -7$ 13 решений, при $x \neq -7$ 12 решений



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

9 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассчитаем общее число решений:

Решения вида $(x_0; 1 - x_0 + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$

$x_0 \in [-7; 7]$ в нечетных x_0

и 7 четных, в каждом

случае x_0 - нечет - 5 решений y ,

случае x_0 - чет, - 4 реш. y

$6 \cdot 5 + 7 \cdot 4$ - решения данного вида

Решения вида $(x_0; \frac{1}{3}(1 + x_0 + 2k))$, $k \in \mathbb{Z}$
 $\in [-12; 12]$

$x_0 \in [-7; 7]; y_0 \in [-4; 4]$

$3y_0 = 1 + x_0 + 2k; k \in \mathbb{Z}$

Для любого $y_0 \in [-4; 4]$, если

x_0 четно и y_0 четно - нет решений,

x_0 нечет и y_0 нечет - нет реш.

$\frac{1}{3}(1 + x_0 + 2k) \in [-4; 4];$

$x_0 + 2k \in [-13; 11]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение~~ ~~х₀~~ ~~четно~~

При $y \in [-4; 4]$ решим $y = 4$;

четно $y = 5 \Rightarrow$
решит вида $(x_0; \frac{1+x_0+2n}{3}) \in \mathbb{Z}$;

$$13 \cdot 4 + 12 \cdot 5 = 60 + 52 = 152$$

$$\text{Всего решений: } 152 + 40 + 21 - 1 =$$
$$= \underline{212}$$

Ответ: 212



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

④ Пусть в начале было x учеников, $x \geq 4$;

Всего вариантов раздать 4 билета и

$$C_4^x = \frac{x!}{4!(x-4)!};$$

чтобы мальчики были вместе они должны получить два билета, а остальные 2 билета распределить

между $x-2$ учениками: $C_2^{x-2} =$

$$= \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}$$

$$P_1 = \frac{N_{\text{выбрана}}}{N_{\text{всего}}} = \frac{C_2^{x-2}}{C_4^x} = \frac{(x-2)! \cdot 4! \cdot (x-4)!}{(x-4)! \cdot 2! \cdot x!} =$$
$$= \frac{12}{x(x-1)}$$

Пусть в конце стало $t+4$ билета.

Тогда всего вариантов раздать их C_{t+4}^x (x кол-во учеников = const),

аналогично раздать $t+4-2$ билета

между $x-2$ учениками можно

$$C_{t+4-2}^{x-2} = C_{t+2}^{x-2} \text{ способами.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда исконая вероятность во втором случае, $P_2 = \frac{N_{\text{удовлет 2}}}{N_{\text{все 2}}} =$

$$= \frac{C_{t+2}^{x-2}}{C_{t+4}^x} = \frac{(x-2)! (t+4)! (x-t-4)!}{x! (t+2)! (x-t-4)!} = \frac{(t+4)(t+3)}{x(x-1)}$$

По условию $\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{11} = \frac{12 \cancel{(x(x-1))}}{(t+4)(t+3) \cancel{/ (x(x-1))}}$

$$= \frac{12}{(t+4)(t+3)} = \frac{1}{11}; (t+4)(t+3) = 12 \cdot 11$$

$$t^2 + 7t - 12 \cdot 10 = 0 \quad \begin{cases} (t-8)(t+15) = 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow t = 8$ годовой доход.

Тогда в конце месяца было денег

$$t + 4 = 8 + 4 = \underline{12}$$

Ответ. 12 денег



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

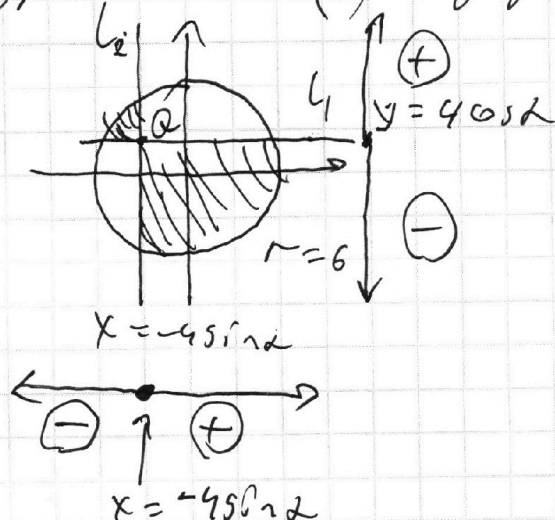
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{C} \begin{cases} (x + 4\sin 2\alpha)(y - 4\cos 2\alpha) \leq 0 & (1) \\ r \leq 6; \quad x^2 + y^2 \leq 36; & (2) \end{cases}$$

Уравнение (2) задает ок - 16 радиуса
6 центров в начале координат (x, y) .
Уравнение (1) задает две области:



Задача III
область ϕ
- решение

Заметим, что, если $\begin{cases} x = -4\sin 2\alpha; \\ y = 4\cos 2\alpha \end{cases}$
(прямые $l_1 \cap l_2 = Q$), то
 $x^2 + y^2 = 16(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = 16;$
 $r = 4$, т.е. точка Q лежит
на окружности центров в начале
координат радиуса 4.



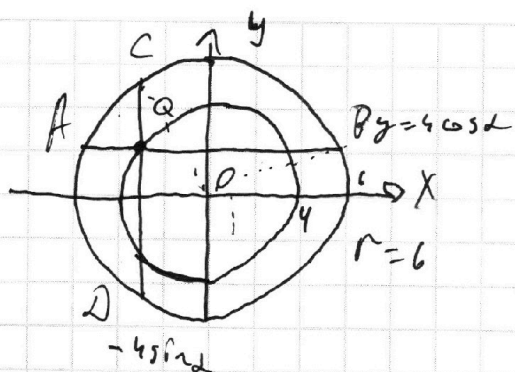
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



П.к. функция
симметрична относительно
координат,

будем считать

I четверть

Если Q имеет координаты $x=x_0$,

$$\text{То } y_Q = \sqrt{4 - x_0^2}$$

$$\text{Прямая } y = 4 \cos \alpha \text{ и } r = 6 \text{ в:}$$

$$16 \cos^2 \alpha + x^2 = 36; \quad x = \pm \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

$$AB = 2 \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} = 2 \sqrt{20 + 16 \sin^2 \alpha}$$

$$\text{Прямая } x = -4 \sin \alpha \text{ и } r = 6 \text{ в:}$$

$$16 \sin^2 \alpha + y^2 = 36; \quad y = \pm \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

$$CD = 2 \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

$$\sqrt{BD} + \sqrt{AC} = 2 \cdot \frac{6}{2} = 6, \text{ п.к. } AB \cap CD$$

- хорды окружности $\angle AQC = 60^\circ$;

Значит длина $\sqrt{BD} + \sqrt{AC}$ - фиксирована
и равна 6 (по теореме о хордах)

$$M(\alpha) = CD + AB + 6 = 6 + 2(\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + \sqrt{20 + 16 \sin^2 \alpha})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найти максимум функции

$$\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} + \sqrt{20 + 16 \sin^2 \alpha} = F(t)$$

$$16 \sin^2 \alpha = t; \quad t \in [0; 16];$$

$$F(t) \rightarrow \max$$

$$F(t) = \sqrt{36 - t} + \sqrt{20 + t}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{-1}{2\sqrt{36-t}} + \frac{1}{2\sqrt{20+t}} = 0;$$

$$\sqrt{36-t} = \sqrt{20+t}; \quad t = 8$$

$$16 \sin^2 \alpha = 8; \quad \sin^2 \alpha = 1/2$$

$$\alpha_0 = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} M(\alpha_0) &= 6\pi + 2(\sqrt{36-8} + \sqrt{20+8}) = \\ &= 6\pi + 2(\sqrt{28} + \sqrt{28}) = 6\pi + 4\sqrt{28} = \\ &= \underline{\underline{6\pi + 8\sqrt{7}}} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } 6\pi + 8\sqrt{7}$$

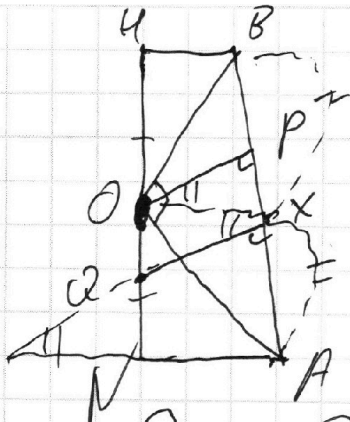
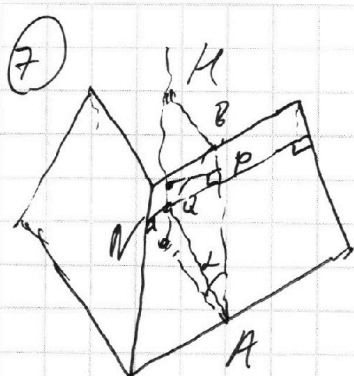


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



O - центр
вписанной
сферы

$\angle NAB$ - искомый

Q - центр Ω ; O - центр ω

Искомый угол равен $90^\circ - \angle OKQ$
(см. рис) $OP \parallel QX$; $OX \parallel NA \parallel MB$
(см. рис)
 $KBAN$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin x - \sin y = ?$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \cos x + \cos y$$

$$\sin y - \sin x = \cos\left(\frac{x}{2} - y\right) + \cos\left(x + \frac{y}{2}\right) =$$

$$= 2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{y-x}{2}\right) \cos \frac{x+y}{2} =$$

$$\sin y - \sin x = 2 \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos y + \cos x = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin(x+y)$$

$$\sin u \sin \frac{t-u}{2} = \cos \frac{t-u}{2} \cos u$$

$$\cos \frac{x+y}{2} = 0$$

$$\cos \frac{t-u}{2} \cos u + \sin u \sin \frac{t-u}{2} = 0$$

$$\cos\left(\frac{t-u}{2} - u\right) = 0$$

$$\cos \frac{t-3u}{2} = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) &= (x-x+4)(x^2 + (x-4)^2 + x(x-4)) \\
 &= 4x^2 + 4x^2 - 32x + 64 + 4x(x-4) - 12(x-4)x \\
 &= 8x^2 - 32x - 8x(x-4) + 64 = \\
 &= 8x^2 - 8x^2 + 32x - 32x + 64
 \end{aligned}$$

$$(3) (\sin u - \sin v) \sin u = (\cos u + \cos v) \cos v$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

$$2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} = \cos u + \cos v$$

$$\text{Пусть } u = \frac{\pi}{2} - u \quad v = v + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin u - \sin v$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{\frac{\pi}{2} - u + v + \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - u - \frac{\pi}{2} + v}{2}$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{(u-v)}{2} \right) \cos \frac{u+v}{2} = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$x^2 \leq 28$$

$$6 + x^2 \leq 36$$

$$\begin{aligned}
 x &= 36 - 8 \\
 &= 28 \\
 2\sqrt{2} &= \sqrt{28} \\
 2\sqrt{2} &= \sqrt{28}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1111111

101113

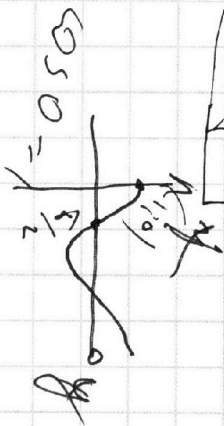
$$11 \cdot 101 \cdot a = A$$

$$b: 101; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{u-v}{2} - \frac{u+v}{2}\right) = \sin u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{u-v}{2} + \frac{u+v}{2}\right) = \sin v$$

$$7 \cdot 101 \cdot 11 \cdot a \cdot C = x^2$$

$$7 \cdot 11 \cdot a \cdot C = x^2$$



$$\begin{cases} C = 10b + 1 \\ C = 10a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in [0; 9] \\ b \in [0; 9] \end{cases}$$

$$a \cdot C : 7 \text{ и } 11$$

a - однозначное, C - двузначное;

$$\boxed{C = 11} \quad \boxed{a = 7}$$

$$(A; B; C) = (7777; 707; 11)$$

$$3) K = \frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$xy = xy - 4y + 4x - 16$$

$$\boxed{y = x - 4}$$

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ x, y > 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \left(\cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \right) \sin u = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \cos u$$

$$\begin{cases} \cos \frac{u+v}{2} = 0 & \frac{u+v}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad u+v = \pi + 2\pi k; \\ \sin \frac{u-v}{2} \sin u = \cos u \cos \frac{u-v}{2}; \end{cases}$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 0;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\cos\left(\frac{u-v}{2} + u\right) = 0;$$

$$\cos\left(\frac{3u-v}{2}\right) = 0;$$

$$\begin{cases} u+v = \pi + 2\pi k; & \pi(y+x) = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3u-v = \pi + 2\pi k; & \pi(3y-x) = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+x = 1 + 2k; & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-x = 1 + 2k; & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Есть $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ решение системы

$$\left(x_0; 1 - x_0 + 2k; k \in \mathbb{Z}\right); \left(x_0; \frac{1}{3} + \frac{x_0}{3} + \frac{2k}{3}; k \in \mathbb{Z}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В начале x классиков; $x \geq 4$

1 2 3 4 5 6 ... x

Всего вариантов $C_x^{4+1} = \frac{x!}{4!(x-4)!}$

Удобней всего $C_2^{x-2} = \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}$

$$P = \frac{x!}{24(x-2)!} = \frac{x(x-1)}{12} \rightarrow \boxed{\frac{12}{x(x-1)}}$$

Пусть теперь билетов $4+t$;

Всего вариантов C_{4+t}^x

Удобней всего C_{2+t}^{x-2} ; $P = \frac{(x-2)!}{(2+t)!(x-4-t)!}$

$$= \frac{(t+3)(t+4)}{x(x-1)} = \frac{480}{525} = \frac{16}{17.5}$$

$$\frac{(t+3)(t+4)}{12} = 11; t^2 + 7t + 12 = 12 \cdot 11$$

$$D = 49 + 4 \cdot 12 \cdot 10 = 23^2; t^2 + 7t + 12 = 12 \cdot 10 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm 23}{2} = \boxed{8} \quad \text{Принимается только } 8$$

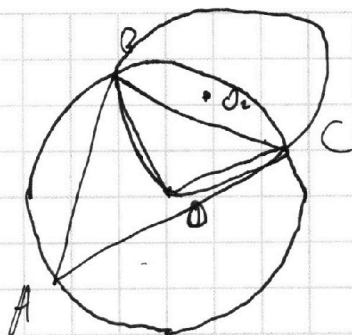


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}x &\geq 4 \sin \alpha & x^2 + y^2 &= 16 = 4^2 & 6, 7 \text{ см} &\approx 4,67 \\y &\leq 4 \cos \alpha & x &\leq -4 \sin \alpha & 2,5 \\& & y &\geq 4 \cos \alpha & 12.\end{aligned}$$

$$x = -4 \sin \alpha$$

$$y = 4 \cos \alpha$$

$$\frac{6t}{t^2+1} = 4 \sin \alpha$$

$$\frac{4(1-t^2)}{t^2+1} = 4 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}1 - \frac{4t^2}{(t^2+1)^2} &= \\&= \frac{(1-2t+t^2)(1+t^2)}{(t^2+1)^2} = (t-1)^2(1+t)^2\end{aligned}$$

$$xy - 4x \cos \alpha + 4y \sin \alpha - 16 \sin \alpha \cos \alpha \leq 0$$

$$x \neq 0; x+y \neq 0$$

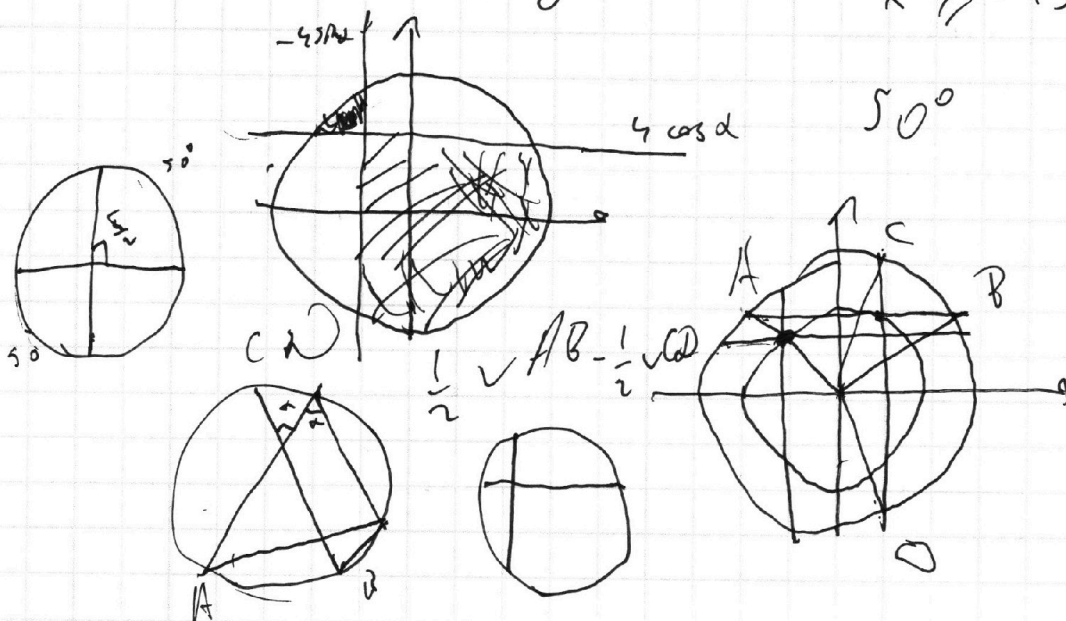
$$1 - \cos 2\alpha = 1$$

$$x = 6 \cos \omega; y = 6 \sin \omega$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= 0; \\2\alpha &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{1}; \\ \alpha &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\end{aligned}$$

$$x = -4 \sin \alpha; y = 4 \cos \alpha$$

$$x \geq -4 \sin \alpha$$





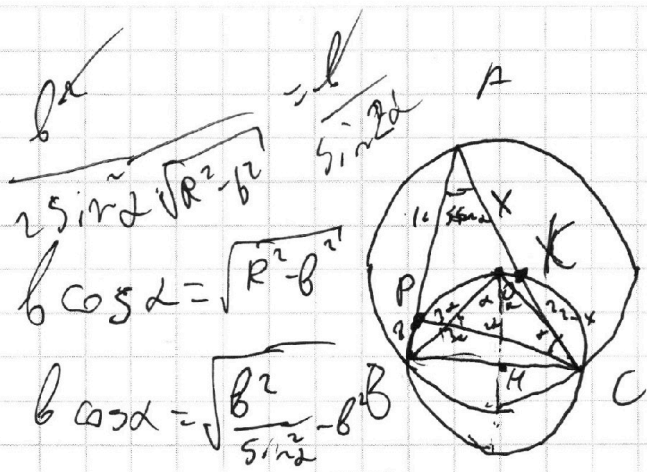
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} x(22-x) &= 16 \cdot 8 \\ 22x - x^2 &= 16 \cdot 8 \\ x^2 - 22x + 16 \cdot 8 &= 0 \\ 128 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = 484$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} = \frac{16 \cdot 24}{x \cdot 22}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$BC = 2b;$$

$$OK = \sqrt{R^2 - b^2}$$

$$S_{BKC} = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - b^2} \cdot 2b = b \sqrt{R^2 - b^2}$$

$$R_{BKC} = \frac{BC}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{R^2 b}{x b \sqrt{R^2 - b^2}} = \frac{R^2}{2 \sqrt{R^2 - b^2}} = \frac{b}{\sin \alpha}$$

$$\frac{b x}{b \sin^2 \alpha \sqrt{R^2 - b^2}} = \frac{2b}{5 \sin \alpha} \quad b \sin \alpha = b \sin \alpha$$

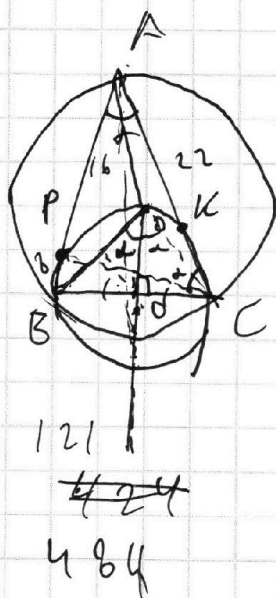


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{(ABC)} = ?$$

$$BO = R = \frac{BC}{2\sin\alpha}$$

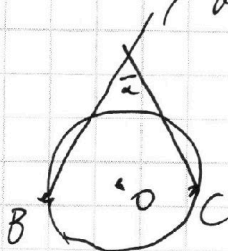
$$BC = \sqrt{22^2 + 24^2 - 2 \cdot 22 \cdot 24 \cos\alpha}$$

$$= \sqrt{1060 - 16^2 \cos\alpha}$$

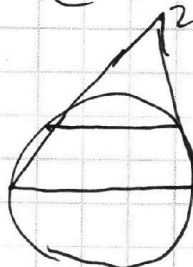
$$BO = R = \frac{\sqrt{1060 - 16^2 \cos\alpha}}{2\sin\alpha}$$

$$\begin{array}{r} + 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 480 \\ \hline 576 \\ + 576 \\ \hline 1060 \end{array}$$

$$4R^2 \sin^2 \alpha = 1060 - 16^2 \cos\alpha$$



$$\alpha = \frac{1}{2} \angle PK + \frac{1}{2} \angle BC$$



$$\frac{1}{2}(\angle BC - \frac{1}{2} \angle PK)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} 4\alpha - \frac{1}{2} \angle PK; \quad \frac{1}{2} \angle PK = \alpha$$