



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 4, а  $y$  — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 12xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 16$ ,  $BP = 8$ ,  $AC = 22$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

1 число  $A$  представим в виде

$$A = 1111 \cdot a, \text{ где } a \in [1; 9], a \in \mathbb{N};$$

$$A = 11 \cdot 101 \cdot a.$$

Значит  $A \cdot B \cdot C = k^2$ ,

$$A : 11 \text{ и } : 101 \Rightarrow (B \cdot C) : 11 \text{ и } : 101,$$

т.к.  $a \in [1; 9]$ ,  $a \nmid \{11; 101\}$

$C \nmid 101$ , т.к.  $101$  - простое число,  
 $a \in C$  - двузначное число. Значит

$B : 101$  и имеет 6 записей, "7"

$\Rightarrow \boxed{B = 707}$  - единственное 3-значное

число :  $101$  и содержит "7".

При этом  $707 \nmid 11$ , значит

$C : 11$  и  $C$  - двузначное число, т.к.

"1" 6 записей.  $\Rightarrow \boxed{C = 11}$ .

т.к.  $A : 7$ , т.к.  $B : 7$  свободно  
( $A, B, C : 7^2$ )  $\Rightarrow a = 7; \boxed{A = 7777}$

Ответ:  $\{A; B; C\} : \{7777; 707; 11\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy}$$

Поставим  $K(x; y) = K(x-4; y+4)$ :

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\begin{cases} x+y+3=0 & \text{q } x, y \in \mathbb{R}, \text{ т. к. } x, y > 0 \\ xy = (x-4)(y+4); \quad 4x - 4y - 16 = 0 \\ x, y > 0 & \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= y+4; \\ y &= x-4; \\ x-y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy \\ &= 4(y^2 + 8y + 16 + y^2 + \cancel{y(y+4)}) - 12y(y+4) \\ &= 12y^2 + 32y + 4^2 + 16 \cdot 4 - 12y^2 - 48y \\ &= 16 \cdot 4 = \underline{\underline{64}} \end{aligned}$$

$M$  - не зависит от  $x, y$  при данных условиях и равен 64.

Ответ:  $M = 64 \quad \forall x, y > 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(3) \text{ a) } (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\pi y = \frac{\pi}{2}, \pi x = \frac{\pi}{2}$$

$$2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \sin u = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\left\{ \cos \frac{u+v}{2} = 0; \frac{u+v}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \sin \frac{u-v}{2} \sin u = \cos u \cos \frac{u-v}{2} \right)$$

$$\cos u \cos \frac{u-v}{2} - \sin u \sin \frac{u-v}{2} = 0$$

$$\cos \left( u + \frac{u-v}{2} \right) = 0 \quad \frac{3u-v}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\pi(x+y) = \pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \pi(3y-x) = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right)$$

~~Без x оставшиеся решения~~

Можно получить следующее решение

системы имеет вид:

$$(x,y) \in \left( x_0; 1-x_0+2k \right) \cap \left( x_0; \frac{1}{3}(1+x_0+2n) \right) \quad n \in \mathbb{Z}, x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Одн.: a)} \left( \begin{array}{l} x_0; 1-x_0+2k \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{array} \right) \cap \left( x_0; \frac{1}{3}(1+x_0+2n) \right) \quad n \in \mathbb{Z}$$

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{f)} \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}; \\
 & \arccos \frac{x}{7} - \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \\
 & \underbrace{\arccos \frac{x}{7}}_{\neq 0} + \underbrace{\arccos \frac{y}{4}}_{\neq 0} > 0 \quad \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

~~Нельзя~~

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} \neq 0; \frac{x}{7} \neq 1; x \neq 7 \\ \arccos \frac{y}{4} \neq 0; \frac{y}{4} \neq 1; y \neq 4 \end{cases}$$

Тем самым каждое неравенство  
является true для всех  $x, y$ , кроме  
изо  $x=7$  и  $y=4$

Поскольку  $x=7$  и  $y=4$  в уравнении  
 $\rho = 6$ :  $(\sin 4\pi - \sin 7\pi) \sin 4\pi =$

$$= (\cos 4\pi + \cos 7\pi) \cos 4\pi.$$

$0 = (1+1) \cdot 1 = 0$ , получилось, что

$x=7, y=4$  - одна из решений уравн.

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Но, } D(\arccos \varphi) = [-1; 1]$$

$$x \in [-7; 7]; y \in [-4; 4]$$

$$\text{Если } x = -7; \begin{cases} y = 8 + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{1}{3}(6 + 2n), n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$y = 4 - x_0 + 2k \text{ при } x - \text{четное}$$

-5 решений, при четном  $x$  - 4 реш.

~~П.д. При  $x \in [-7; 7]$  - 15 вариантов~~  
~~для каждого из 5 значений  $y$ .~~

~~5 \* 15 = 75~~

Далее наше решение было

$$3y = 1 + x_0 + 2n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{При } x = -7; \begin{cases} 3y = -6 + 2n; n \in \mathbb{Z} \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$

$$3y \in [-12; 12]; 3y = 1 + x_0 + 2n, n \in \mathbb{Z} \in [-12; 12]$$

~~Конечно же это верно~~  
так как  $y$  13 решений при шагу 12 решениях

L

L

L

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
9 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Носчитаем общее число решений:

Решения буга  $(x_0; 1-x_0+2k)$ , где

$x_0 \in [7; 907]$  в целочисленных  $x_0$

и 7 решения, в каждом

если  $x_0$  - четн. - 5 решений  $y$ ,

если  $x_0$  - неч., - 4 реш.  $y$

$6 \cdot 5 + 7 \cdot 4$  - решения задачи буга

Решения буга  $(x_0; \frac{1}{3}(1+x_0+2k))$  для

$\in [12; 12]$

$x_0 \in [7; 7]; y_0 \in [-4; 4]$

$3y_0 = 1+x_0+2k; k \in \mathbb{Z}$

Две модели  $y_0 \in [4; 4]$ , если

$x_0$  четно и  $y_0$  четно - есть реш.,

$x_0$  неч и  $y_0$  неч - есть реш.

$$\frac{1}{3}(1+x_0+2k) \in [-4; 4];$$

$$x_0+2k \in [-13; 11]$$

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение №5~~

Для  $y \in [-4; 4]$  нечетная  $y^5$ ,

четные  $y^5 \geq 0$

решений вида  $(x_0; \frac{1+x_0+2n}{3})$  нет;

$$13 \cdot 4 + 12 \cdot 5 = 60 + 52 = 152$$

Всего решений:  $152 + 40 + 2(-1) =$

$$= 212$$

Ответ: 212

L

L



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(9) Пусть в кинотеатре  $x$  учеников,  $x \geq 4$ ;

Всего в кинотеатре раздают 4 билета на

$$C_4^x = \frac{x!}{4!(x-4)!};$$

чтобы малыши могли вместе они  
делились получившие две билеты, а остав-  
шиеся 2 билета распределили

между  $x-2$  ученикам:  $C_2^{x-2} =$   
 $\frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}$

$$P_1 = \frac{\text{Ways}}{\text{Ways}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{x(x-1)}$$

$$\frac{C_2^{x-2}}{C_4^x} = \frac{(x-2)! 4! (x-4)!}{(x-4)! 2! x!} =$$

Пусть в конце стало  $t+4$  билета.

Всего в кинотеатре раздают все

$C_{t+4}^x$  (какие-то ученики  $= \text{const}$ ),

одновременно раздают  $t+4-2$  билета

между  $x-2$  ученикам можно

$$C_{t+4-2}^{x-2} = C_{t+2}^{x-2}$$

способами.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Проверка исходной вероятности 60

Второй случай,  $P_2 = \frac{N_{удовл\ 2}}{N_{всего\ 2}} =$

$$= \frac{C_{t+2}^{x-2}}{C_{t+4}^x} = \frac{(x-2)! (t+4)! (x-t-4)!}{x! (t+2)! (x-t-4)!} = \frac{(t+4)(t+3)}{x(x-1)}$$

$$\text{По условию } \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{11} = \frac{12/(x(x-1))}{(t+4)(t+3)/(x(x-1))}$$

$$= \frac{12}{(t+4)(t+3)} = \frac{1}{11}; (t+4)(t+3) = 12 \cdot 11$$

$$t^2 + 7t - 12 \cdot 10 = 0 \quad |(t-8)(t+15)=0 \\ t > 0$$

$\Rightarrow t = 8$  годовшин бисеров.

Проверка в конце месяца было бисеров

$$t+4 = 8+4 = 12$$

Ответ: 12 бисеров

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

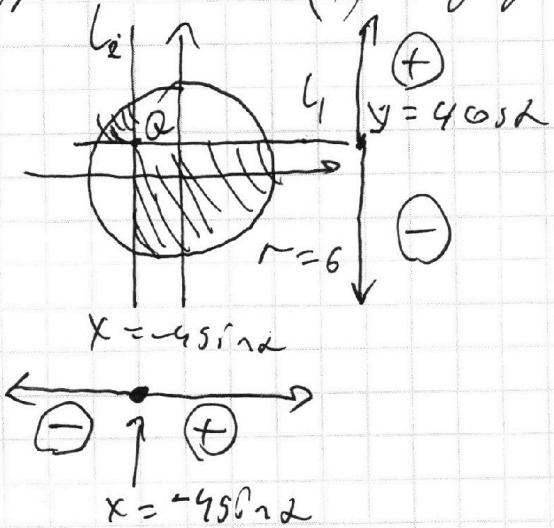
СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{C) } \begin{cases} g(x+ys, \pi) (y - 4 \cos \alpha) \leq 0 & (1) \\ r \leq 6 ; \quad x^2 + y^2 \leq 36 ; & (2) \end{cases}$$

Уравнение (2) задает окружность радиуса 6 центром в начале координат  $(x, y)$ .

Уравнение (1) задает две области:



Две части  
области  $\neq$   
- исключено

Заметим, что, если  $x = -4 \sin \alpha$ ,

(прине  $l_1, l_2$  и  $l_2 = 0$ ) то

$$x^2 + y^2 = 16(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 16;$$

$[n=4]$ , т. е. точка Q лежит

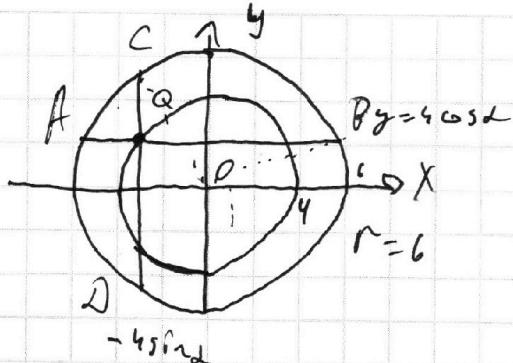
на окружности центров в начале координат радиуса 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дв.к. фигура  
исследование обн. коэф.  
координат,  
будет состоять  
из четырех

Если Q имеет коорд.  $X=x_0$ ,

$$\text{то } y_Q = \sqrt{4 - x_0^2}$$

Таким  $y = 4 \cos \alpha$  и  $r = 6$  б.:

$$16 \cos^2 \alpha + x^2 = 36; \quad x = \pm \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

$$AB = 2 \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} = 2 \sqrt{20 + 16 \sin^2 \alpha}$$

Таким  $x = -4 \sin \alpha$  и  $r = 6$  б.:

$$16 \sin^2 \alpha + y^2 = 36; \quad y = \pm \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

$$CD = 2 \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

$$\sqrt{BD} + \sqrt{AC} = 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \delta, \text{ т.к. } AB \perp CD$$

- когда окружность  $\angle AQC = \delta/2$ ,

значит сумма  $\sqrt{BD} + \sqrt{AC}$  - постоянная и равна  $6\delta$  ( $\approx$  теорема о  $\cap$  пересеч)

$$M(\alpha) = CD + AB + \sqrt{20 + 16 \sin^2 \alpha} + \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} = 6\delta + 2 \sqrt{536 - 16 \sin^2 \alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найти максимальное значение

$$\sqrt{36 - 16 \sin^2 x} + \sqrt{20 + 16 \sin^2 x} := F(x)$$

$$16 \sin^2 x = t; \quad t \in [0; 16];$$

$$F(t) \rightarrow \max$$

$$F(t) = \sqrt{36-t} + \sqrt{20+t}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{-1}{2\sqrt{36-t}} + \frac{1}{2\sqrt{20+t}} = 0;$$

$$\sqrt{36-t} = \sqrt{20+t}; \quad t = 8$$

$$16 \sin^2 x = 8; \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = \pm \frac{\pi}{4} + K\pi, \quad K \in \mathbb{Z}$$

$$M(x_0) = 6\pi + 2 \left( \sqrt{36-8} + \sqrt{20+8} \right) = \\ = 6\pi + 2 \left( \sqrt{28} + \sqrt{28} \right) = 6\pi + 4\sqrt{28} = \\ = 6\pi + 8\sqrt{7}$$

$$\text{Ответ: } 6\pi + 8\sqrt{7}$$



I-

I-

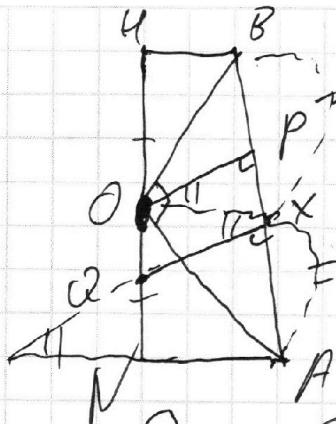
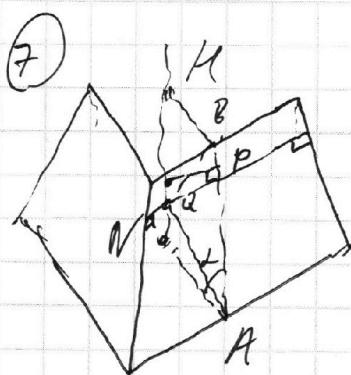


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



О - центр  
биссект  
стрем  
 $\angle NAB$  - нач

Q - центр  $\Sigma$ ; O - центр  $\Omega$

Используя угол равен  $90^\circ - \angle OXQ$   
(см. рис)  $OP \parallel QX$ ;  $OX \parallel NA \parallel MB$

(прямая  
перпендикуляр  
 $MBAN$ )

L

L



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(x - \sin y) = ?$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \cos x + \cos y$$

~~$\sin y - \sin x =$~~   $\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$

$$= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y-x}{2}\right) \cos \frac{x+y}{2} =$$

$$\sin y - \sin x = 2 \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos y + \cos x = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin(y)$$

$$\left( \sin u \sin \frac{t-u}{2} = \cos \frac{t-u}{2} \cos u \right)$$

$$\cos \frac{x+y}{2} = 0$$

$$\cos \frac{t-u}{2} \cos u + \sin u \sin \frac{t-u}{2} = 0$$

$$\cos\left(\frac{t-u}{2} - tu\right) = 0$$

$$\cos \frac{t-u}{2} \approx 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) &= (x-x+4)(x^2 + (x-4)^2 + x(x-4)) \\
 &= 4x^2 + 4x^2 - 32x + 64 + 4x(x-4) - 12(x-4)x \\
 &= 8x^2 - 32x - 8x(x-4) + 64 = \\
 &= 8x^2 - 8x^2 + 32x - 32x + \underline{\underline{64}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) (\sin u - \sin V) \sin u &= (\cos u + \cos V) \cos u \\
 \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
 \cancel{\cos(x+y)} \cos x \cos y &= \cos(x+y) + \cos(x-y) \\
 \cancel{\sin u - \sin V} \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} &= \cos u + \cos v
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin u &= \frac{\pi}{2} - u \quad v = v + \frac{\pi}{2} \\
 \sin u - \sin v &= 2 \cos \frac{\frac{\pi}{2} - u + v + \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - u - v}{2} \\
 \sin u - \sin v &= 2 \cos \left( \frac{\pi}{2} - (u-v)/2 \right) \cos \frac{u+v}{2} = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \\
 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} &= 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \\
 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{4} &= 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = \\
 x^2 \leq 28 &= x = \sqrt{26 - \frac{28}{2}} = \sqrt{26 - 14} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\
 b + x^2 \leq 36 &= \frac{2\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{28}{2}} = 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
\_ из \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

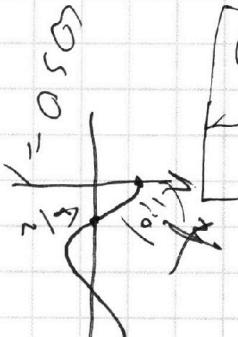
~~1111111111~~

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{u-v}{2} + \frac{u+v}{2}\right) =$$

$$= 0 \cdot \sin \frac{u-v-u+v}{2} = 0$$

$$7 \cdot 101 \cdot 11 \cdot a \cdot C = x^2$$

$$7 \cdot 11 \cdot a \cdot C = x^2$$



$$\begin{cases} C = 10B + 1 \\ C = 10A + B \\ C = 11 \end{cases}$$

$$11 \cdot 101 \cdot a = A$$

$$B : \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{u-v}{2} - \frac{u+v}{2}\right) =$$

$$= \sin \frac{u-v-u+v}{2} = -\sin v$$

$$= -\sin v$$

&lt;math display="



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \left( \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \right) \sin u = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \cos u$$

$$\begin{cases} \cos \frac{u+v}{2} = 0 & \frac{u+v}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \\ \sin \frac{u-v}{2} \sin u = \cos u \cos \frac{u-v}{2}; \end{cases}$$

$$2 \sin u \sin \frac{u-v}{2} = \cos(u-v) - \cos(u+v)$$

$$\sin u \sin \beta = \cos u \cos \beta$$

$$\cos u \cos \beta - \sin u \sin \beta = 0;$$

$$\underline{\cos(u+\beta)=0}$$

$$\cos \left( \frac{u-v}{2} + u \right) = 0;$$

$$\cos \left( \frac{3u-v}{2} \right) = 0;$$

$$\begin{cases} u+v = \pi + 2\pi k; \\ y+x = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3u-v = \pi + 2\pi k; \\ 3y-x = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+x = 1 + 2k; \\ 3y-x = 1 + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y = 2 + 4k; \\ 2x = -2k \end{cases}$$

Если  $x_0 \in \mathbb{R}$  решение системы,

$$(x_0; 1 - x_0 + 2k; k \in \mathbb{Z}) ; (x_0; \frac{1}{3} + \frac{x_0}{3} + \frac{2k}{3}; k \in \mathbb{Z})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

В начале  $x$  1 классиков;  $x \geq 4$

$$\begin{aligned} &\text{1 2 3 4 5 6} \text{ в } \begin{matrix} x \\ x! \\ \hline 4!(x-4)! \end{matrix} \\ &\text{Всего баллов } C_{4+1}^x = \frac{x!}{4!(x-4)!} \\ &\text{Удовлетворяет } C_2^{x-2} = \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!} \end{aligned}$$

$$\cancel{P = \frac{x!}{2!(x-2)!}} = \frac{x(x-1)}{12} \rightarrow \boxed{\frac{12}{x(x-1)}}$$

Нужно перевести баллы  $t+6$ ;

$$\begin{aligned} &\text{Всего баллов } C_{t+6}^x \\ &\text{Удовлетворяет } C_{2+6}^{x-2}; P = \frac{(x-2)!}{(t+6)!(x-t-2)!} \\ &\quad \frac{x!}{(t+6)!(x-t-6)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(t+3)(t+4)}{x(x-1)} \quad \frac{480}{525} \quad \begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 460 \\ \hline 525 \end{array} \\ &\quad \cancel{\frac{(t+3)(t+4)}{12}} = 11; t+7+t+12 = 12 \cdot 11 \end{aligned}$$

$$D = 49 + 4 \cdot 12 \cdot 10 = 23^2, t^2 + 7t + 12 \cdot 10 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm 23}{2} = \boxed{8}$$

Правильный ответ  
12

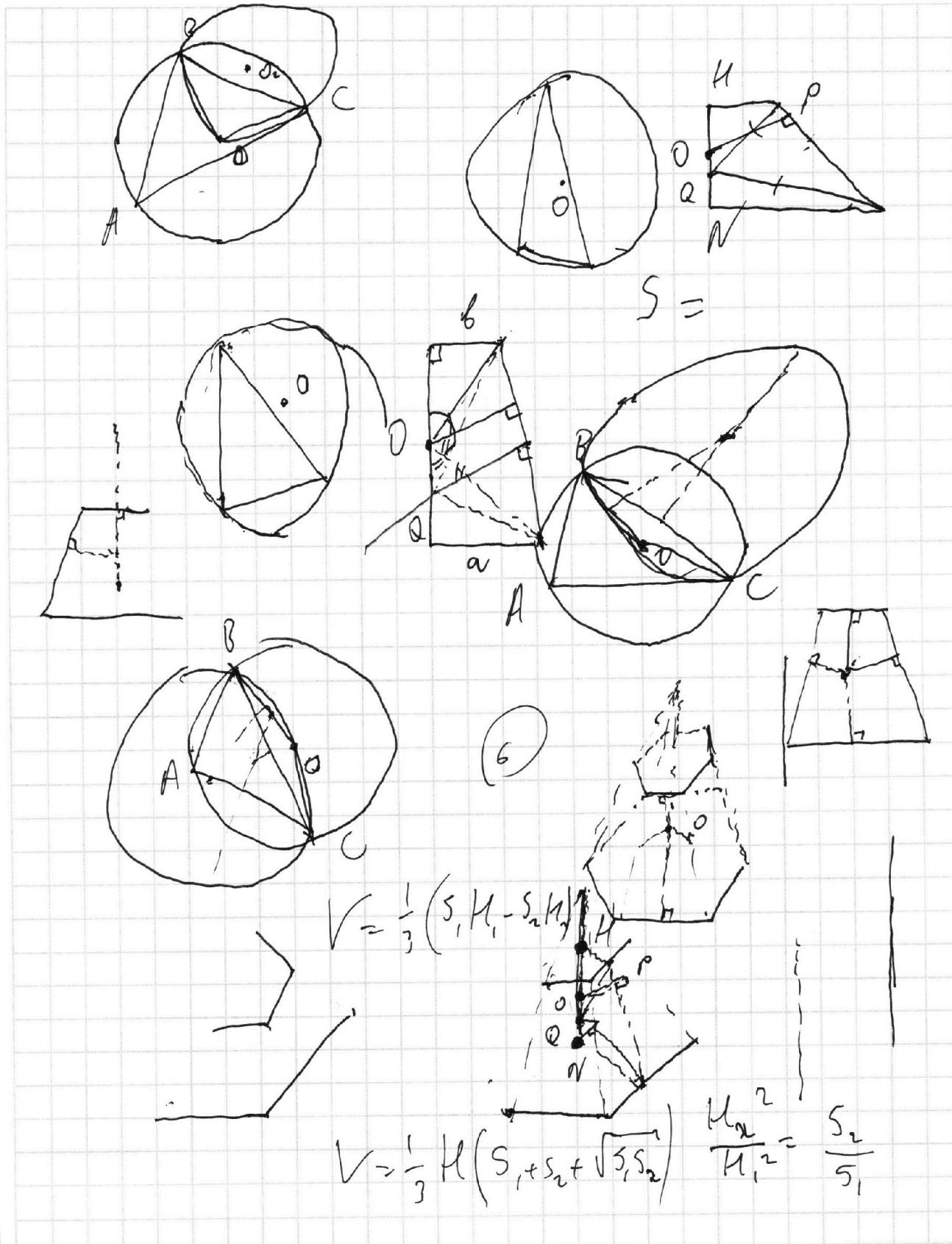


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x \geq 4s \sin \omega$$

$$y \leq 4 \cos \omega$$

$$x = -4s \sin \omega$$

$$y = 4 \cos \omega$$

$$x^2 + y^2 = 16 = 4^2$$

$$x \leq -4s \sin \omega$$

$$y \geq 4 \cos \omega$$

$$6,7 \text{ см} \approx 4s$$

$$2,5$$

$$12.$$

$$\frac{8t}{t^2+1} = 4s \sin \omega$$

$$1 - \frac{4t^2}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(1-2t+t^2)(1+2t+t^2)}{(t^2+1)^2} = (t-1)^2 / (1+t^2)$$

$$\frac{4t-4t^2}{t^2+1} = 4 \cos \omega$$

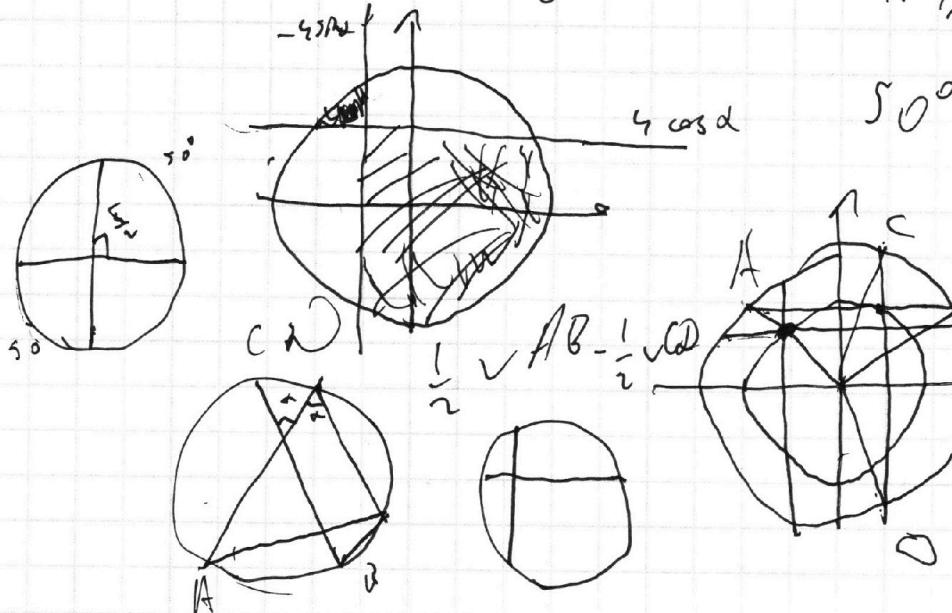
$$xy - 4x \cos \omega + 4y \sin \omega - 16 \sin \omega \cos \omega \leq 0$$

$$xy = 0 \quad x+y=0$$

$$1 - \cos 2\omega = 1$$

$$x = 6 \cos \omega; \quad y = 6 \sin \omega \quad \begin{aligned} & \cos 2\omega = 0; \\ & 2\omega = \frac{\pi}{2} + n\pi; \end{aligned}$$

$$x = -4s \sin \omega; \quad y = 4 \cos \omega \quad \begin{aligned} & \omega = \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \\ & x = -4s \sin \omega \end{aligned}$$



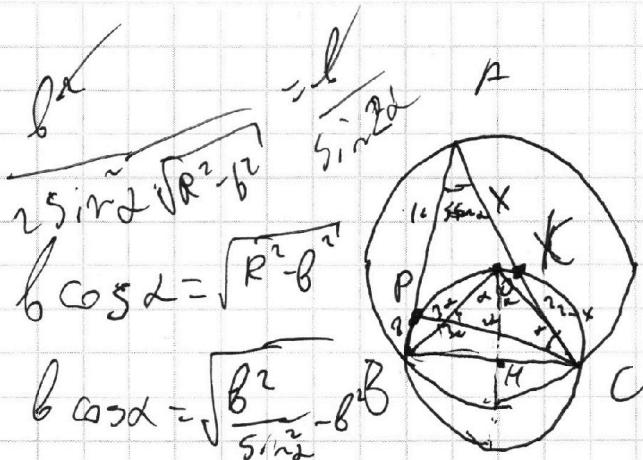


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x(22-x) = 16 \cdot 8$$

$$22x - x^2 = 16 \cdot 8$$

$$x^2 - 22x + 16 \cdot 8 = 0$$

$$128 = 0$$

$$\Delta = 484 -$$

$$6 \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} / 6 \cdot 24 = x \cdot 22$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \quad x = \frac{16 \cdot 24}{2 \cdot 11} = \frac{8 \cdot 24}{11} = \\ BC = 26; \quad = \frac{64}{11} \cdot 3 = \frac{192}{11}$$

$$OK = \sqrt{R^2 - b^2}$$

$$R = \frac{b}{2 \sin \alpha}$$

$$S_{BKC} = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - b^2} \cdot 2b = b \sqrt{R^2 - b^2}$$

$$R_{BKC} = \frac{BC}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\cancel{b} R^2 \cancel{b}}{\cancel{b} \cancel{b} \sqrt{R^2 - b^2}} = \frac{R^2}{2 \sqrt{R^2 - b^2}} = \frac{b}{\sin \alpha}$$

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{\sin \alpha} \quad b \sin \alpha = \sqrt{R^2 - b^2}$$

$$b \sin \alpha = \sqrt{R^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{R^2 - b^2}$$

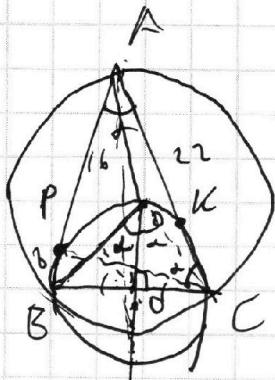


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 121 \\ \times 24 \\ \hline 484 \\ + 24 \\ \hline 296 \\ + 480 \\ \hline 1060 \end{array}$$

$$S_{\text{triangle}} = ?$$

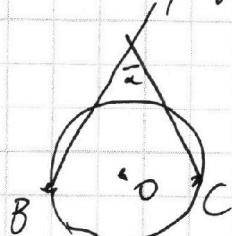
$$BO = R = \frac{BC}{2 \sin \alpha}$$

$$BC = \sqrt{22^2 + 24^2 - 2 \cdot 22 \cdot 24 \cos \alpha}$$

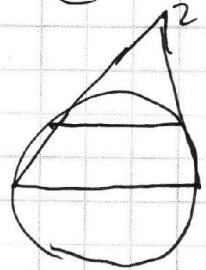
$$= \sqrt{1060 - 16^2 \cos \alpha}$$

$$BO = R = \frac{\sqrt{1060 - 16^2 \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$$

$$4R^2 \sin^2 \alpha = 1060 - 16^2 \cos \alpha$$



$$\alpha = \frac{1}{2} \angle PK + \frac{1}{2} \angle BC$$



$$\frac{1}{2} (\angle BC - \frac{1}{2} \angle PK)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \angle BC - \frac{1}{2} \angle PK; \frac{1}{2} \angle PK = \angle$$