



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.и. A — число, составленное из ^н одинаковых цифр, то оно имеет вид $A = \overline{aaaa} = 1111a$, где $1 \leq a \leq 9$. Тогда, пусть B имеет вид: $B = \overline{bcd}$, C имеет вид: $C = \overline{xy}$. Тогда произведение $A \cdot B \cdot C = 1111a \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{xy} = n^2$. П.и. $A \cdot B \cdot C : 1111 = 11 \cdot 101$, ~~то~~ но $A \cdot B \cdot C$ делится на 1111^2 , т.е. $a \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{xy} : 1111 = 11 \cdot 101$. Заметим, что $a \neq 11$, $a \neq 101$, т.к. $1 \leq a \leq 9$, $\overline{xy} \neq 101$, т.к. $10 \leq \overline{xy} \leq 99$. Тогда $\overline{bcd} : 101$, иначе $a \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{xy} \neq 101$. П.и. одна из цифр B равна 7 и число $B : 101$, то $B = 707$, при этом $m = 7$. Единственное подходящее значение B , это $B = 707$. Тогда $A \cdot B \cdot C$ примет вид: $101^2 \cdot 11 \cdot 7 \cdot a \cdot \overline{xy} = n^2$. Получаем, что $11 \cdot 7 \cdot a \cdot \overline{xy}$ — квадрат натурального числа. Заметим, что $a \neq 11$, т.к. $1 \leq a \leq 9$, заметим $\overline{xy} : 11$. П.и. одна из цифр числа $\overline{xy}$ равна 1, то ед. двузначное число $C : 11$ и содержащее единицу среди цифр, это $C = 11$. Тогда $11^2 \cdot a \cdot 7$ — квадрат, а следовательно $a \cdot 7$ — квадрат. Тогда $a : 7$ и единственное значение a , что $a \cdot 7$ — квадрат, это $a = 7$. Тогда $A = 7777$, $B = 707$, $C = 11$. Тогда как подходит тройка чисел: $(7777; 707; 11)$

Ответ: $(7777; 707; 11)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = K. \text{ Из условия берю: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \quad | : (x+y+3), \quad x+y+3 > 0$$

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy - 4y + 4x - 16$$

$$4x - 4y = 16$$

$$x - y = 4. \text{ Подставим } x - y = 4 \text{ в } M:$$

$$\text{Тогда } M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy =$$

$$= (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 12xy = 4(16 + 3xy) - 12xy = 64$$

Тогда M принимает только значение равное 64.

Answer: 64.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = \cos \pi y (\cos \pi y + \cos \pi x)$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$-(\sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi y \cos \pi x) = \cos^2 \pi y$$

$$-(\cos(\pi x - \pi y)) = \cos^2 \pi y$$

$$-\cos(\pi x - \pi y) = \cos^2 \pi y$$

$$\cos^2 \pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$2 \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cos \frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi y + \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{3\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \begin{cases} y + x = 1 + 2n \\ 3y - x = 1 + 2m \end{cases}$$

$$n, m \in \mathbb{Z}$$

Тогда нам получаем все пары $(x; y)$ такие, что $x + y = 2n + 1, n \in \mathbb{Z},$
 $3y - x = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}.$

Ответ: все пары $(x; y)$ где верно: $x + y = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}, 3y - x = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}.$

$$d). \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4} > 0$$

$$\arccos \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4} + \arccos \frac{y}{4} - \arcsin \frac{y}{4} > 0$$

$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$$

~~Заметим, что $\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} \geq 0$, где $\frac{x}{7} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ и $\frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, m, k \in \mathbb{Z}, m, k.$~~

~~$\arccos \frac{x}{7} \in [0; \pi], \arcsin \frac{y}{4} \in [0; \pi].$ Из ОДЗ следует, что~~

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \begin{cases} -7 \leq x \leq 7 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases} \begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0 \\ \arccos \frac{y}{4} = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{7} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{y}{4} = 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

~~Т.е., нам не подходят пары $(0; 0)$, остальные пары удовлетворяют ограничениям и кер-бу. Возможны значения для x : 15, для y : 3. Тогда все пар будет всего $(x; y)$, где $x = 15$ и кер-бу: $15 - 3 - 1 = 134$~~
~~Ответ: 134.~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$$

П.к. x, y - целые, но кер-во верно всех допустимых по ОДЗ
ограничениям случаев, кроме $x=7, y=4$. ~~Заметим, что всегда~~
~~мы не можем найти целые x, y , т.к.~~ Заметим, что $\arccos$
люб y или x - целые число, иначе пара (x, y) , являющаяся
решением кер-ва не будет являться решением ур-ия. Тогда, посчи-
таем кол-во пар, удовлетворяющих кер-ву и ур-ию. П.к.

$-1 \leq \frac{x}{7} \leq 1$ из ограничения арккосинуса, то для x - 15 целых
значений. Для y получим 9 целых значений. Для каждого x , который
в нас подходит 5 значений y . Для значений x , которых 7, нам
подходит 4 значений y . Итого нам подходит: $8 \cdot 5 + 7 \cdot 4 = 67$.

П.к. пара $x=7, y=4$ не удовлетворяет кер-ву, то всего пар 67.

Ответ: 67.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в конце месяца на ~~двух~~^{концерт} было выделено k дней.
Тогда вероятность в начале месяца, что Тёма и Вася пойдут на концерт ~~рав~~ вместе равна: $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$, где n - число одноклассников, C_{n-2}^2 - число ~~случаев~~ исходов, в которых Тёма и Вася пойдут вместе на концерт, C_n^4 - число всевозможных исходов. Тогда в конце месяца, вероятность если поехать на концерт равна: $\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$ где C_{n-2}^{k-2} - число исходов, в которых Тёма и Вася вместе пойдут на концерт, C_n^k - число всевозможных исходов. Тогда из условия имеем уравнение:

$$\begin{aligned} 11 \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} &= \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} \Leftrightarrow \frac{11 \frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-2)!}}{\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{11(n-2)! \cdot (n-4)! \cdot 4!}{n! \cdot (n-4)! \cdot 2!} &= \frac{(n-2)! \cdot (n-k)! \cdot k!}{(n-k)! \cdot (k-2)! \cdot n!} \quad \left| \cdot \frac{n!}{(n-2)!} \right. \\ \frac{11 \cdot 24}{2} &= k(k-1) \\ 132 &= k^2 - k \end{aligned}$$

$$k^2 - k - 131 = 0$$

$$D = 1 + 518 = 523 = 23^2$$

$$\begin{cases} k = \frac{1+23}{2} \\ k = \frac{1-23}{2} \end{cases}$$

$k = \frac{1-23}{2}$ - не подходит, т.к. $k > 4$

Получаем, что в конце месяца на концерт было выделено 12 дней

Ответ: 12 дней.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

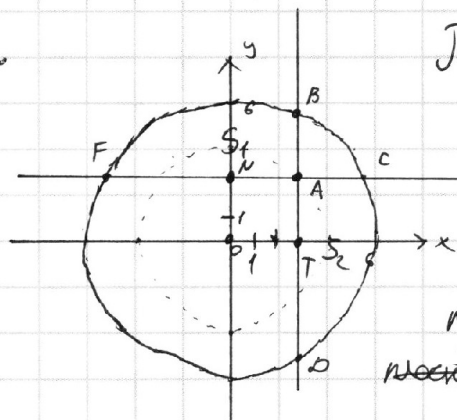
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2+y^2 \leq 36 & (2) \end{cases}$$

Уравнение (1) задает две полукруга, образованные дугой

прямых $x = -4\sin\alpha$, $y = 4\cos\alpha$, причем точка пересечения этих прямых лежит на окружности с центром в точке $(0;0)$ и радиуса 4, т.к. $(-4\sin\alpha)^2 + (4\cos\alpha)^2 = 16(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 16 = 4^2$.

Уравнение (2) задает круг с центром в точке $(0;0)$ радиуса 6.



Тогда меньшая дуга ~~дуги~~ ~~каждой полукруга~~, заданная уравнением (1) будет сближаться

Менее α , точка пересечения прямых $x = -4\sin\alpha$, $y = 4\cos\alpha$, задающих полукруга, будет двигаться

по периметру окружности с центром в $(0;0)$ радиуса 4. Рассмотрим

какую фигуру, удовлетворяющую условиям. Она состоит из двух фигур образованных S_1 и S_2 соответственно, т.е. фигур FBA и CAD .

Вне зависимости от выбора точки $A(-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$, сумма дуг $\angle FBA + \angle CAD = 180^\circ$, т.к. $\angle CAD = 90^\circ$. Тогда периметр каждой фигуры, состоящий из дуг окружности: $LC = 6\pi$. Посчитаем периметр другой

каждой фигуры, т.е. отрезков FA, BA, CA, AD , т.е. сумму длин отрезков FC и BD . Заметим, что $\angle BFC = \angle BDC$, т.к. $\angle BFC = \angle BDC$ (опираются на BE)

Найдем их сумму. Из $\triangle ONC$, где $OC = 6$, $NO = |4\cos\alpha|$, по теор. Пифагора имеем $NC = \sqrt{OC^2 - NO^2} = \sqrt{36 - 16\cos^2\alpha} = 4\sqrt{3 - \cos^2\alpha}$. Тогда $FC = NC = 8\sqrt{3 - \cos^2\alpha}$ в силу равенства $FC = NC$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из $\triangle OBT$, в котором $OT = |4 \sin \alpha|$, $OB = 6$, имеем по теореме Пифагора:

$$BT = \sqrt{OB^2 - OT^2} = \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} = 4 \sqrt{9 - \sin^2 \alpha}. \text{ Тогда } BD = 2BT = 8 \sqrt{9 - \sin^2 \alpha}$$

Тогда периметр фигуры задается функцией: $P(\alpha) = 6\pi + 8(\sqrt{9 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{9 - \cos^2 \alpha})$

$$= 6\pi + 8(\sqrt{8 + \cos^2 \alpha} + \sqrt{8 + \sin^2 \alpha})$$

Возьмем её производную: $P'(\alpha) = 8 \left(\frac{1}{2\sqrt{8 + \cos^2 \alpha}} \cdot (-\sin 2\alpha) + \frac{1}{2\sqrt{8 + \sin^2 \alpha}} \cdot \sin 2\alpha \right) = 4 \sin 2\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{8 + \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{8 + \sin^2 \alpha}} \right) =$

$$= 4 \sin 2\alpha \left(\frac{\sqrt{8 + \cos^2 \alpha} - \sqrt{8 + \sin^2 \alpha}}{\sqrt{8 + \cos^2 \alpha} \sqrt{8 + \sin^2 \alpha}} \right). \text{ Решим ур-ие } P'(\alpha) = 0$$

$$4 \sin 2\alpha \left(\frac{\sqrt{8 + \cos^2 \alpha} - \sqrt{8 + \sin^2 \alpha}}{\sqrt{8 + \cos^2 \alpha} \sqrt{8 + \sin^2 \alpha}} \right) = 0 \quad \left| \cdot \sqrt{8 + \cos^2 \alpha} \sqrt{8 + \sin^2 \alpha} > 0 \right.$$

$$4 \sin 2\alpha (\sqrt{8 + \cos^2 \alpha} - \sqrt{8 + \sin^2 \alpha}) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \\ \sqrt{8 + \cos^2 \alpha} = \sqrt{8 + \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi n}{2} \\ \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi n}{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим знаки производной:

Значит точки $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ —

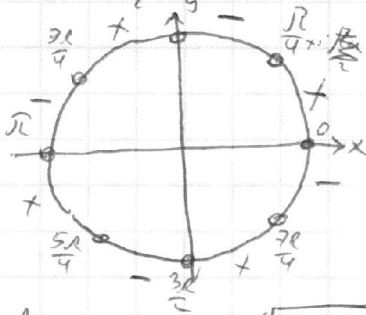
экстремальные точки функции,

то периметр при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

принимает наибольшее значение, равное: $6\pi + 8(\sqrt{8 + \frac{1}{2}} + \sqrt{8 + \frac{1}{2}}) =$

$$= 6\pi + 8(\sqrt{\frac{17}{2}} \cdot 2) = 6\pi + \frac{16\sqrt{17}}{\sqrt{2}} = 6\pi + 8\sqrt{34} = M.$$

Ответ: $M = 6\pi + 8\sqrt{34}$, при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1111 \cdot B \cdot C = u^2$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$ABC \geq 1111$$

$$ABC : 11$$

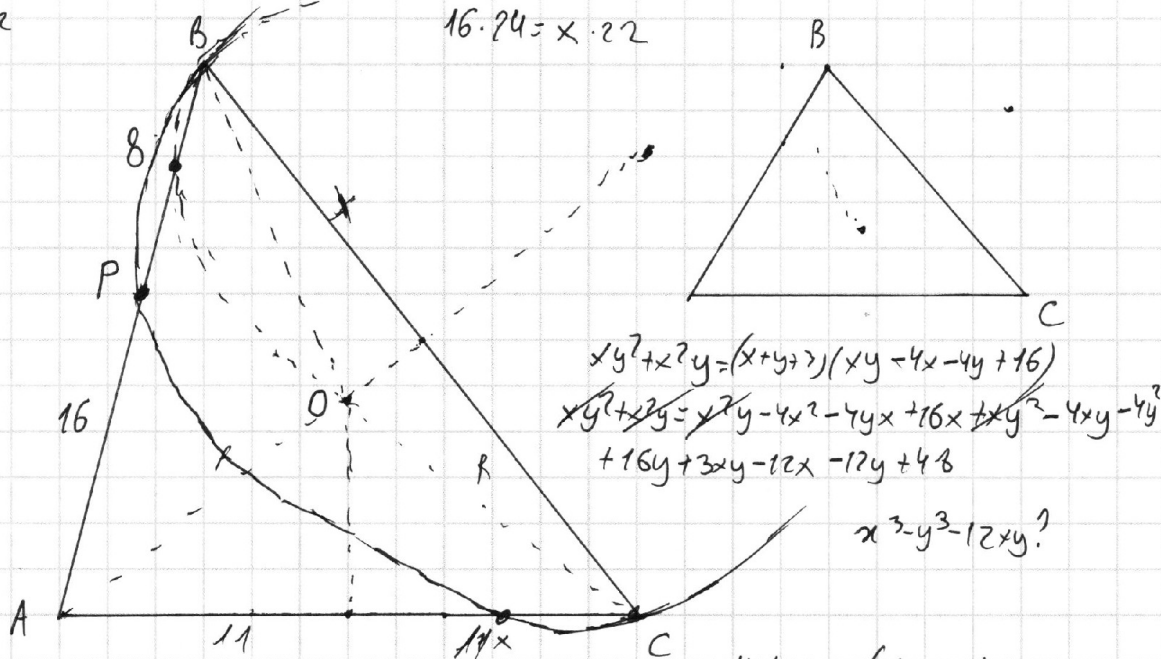
$$abcd \cdot xy : 11 : 101$$

$$101, 101, xy \cdot 101, a. B : 101,$$

$$B = 707, C : 11, \neq 11,$$

$$AC = 22$$

$$16 \cdot 24 = x \cdot 22$$



$$xy^2 + x^2y = (x+y+3)(xy-4x-4y+16)$$

$$xy^2 + x^2y = xy^2 - 4x^2 - 4yx + 16x + xy^2 - 4xy - 4y^2 + 16y + 3xy - 12x - 12y + 48$$

$$x^3 - y^3 - 12xy^2$$

$$xy(y+x) = (x+y+3)(x-4)(y-4)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)} \quad \frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x}{(x-4)(y+4)}$$

$$] a \quad \begin{cases} x+y \\ x-y \end{cases} \quad -4x^2 - 4yx - 4xy - 4y^2 + 16x + 16y + 3xy - 12x - 12y + 48 = 0$$

$$-4x^2 - 4y^2 - 5yx + 4x + 4y + 48 = 0$$

$$-4(x^2 + y^2 + 2yx) + 3yx + 4x + 4y + 48 = 0$$

$$-4D^2 + 36 + 4D + 48 = 0 \quad D^2 - D - \frac{36}{4} - 12 = 0$$

$$4D^2 - 4D - 36 - 48 = 0 \quad D = 1 + \sqrt{\frac{36}{4} + 12} = 1 + 36 + 48 = 36 + 48$$