МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n!+(n+1)!+(n+2)!$ делится на 361?

2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N, большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N.

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|\sqrt{x^2-2x-3}+6\right| \geqslant \left|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1\right|+|7-2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1;50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19\cdot 2^x+2025=y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy, задаваемых уравнением $x^2+y^2=a^2$, наибольшее значение выражения x^2-6x+a равно 8.

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB=\angle ANC=80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN\cdot MA=2BM\cdot NC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

$n! + (n+1)! + (n+2)! \ \vdots \ 361.$

$n! + n!(n+1) + n!(n+1)(n+2) =$

$= n!(1 + n + 1 + n^2 + 3n + 2) =$

$= n!(n^2 + 4n + 4) = n!(n+2)^2$

$361 = 19^2.$

Возможны следующие случаи:

~~$n! \vdots 19^2$~~ $n! \vdots 19^2$ или $n^2+4n+4 \vdots 19^2$ или $n! \vdots 19$ и $n^2+4n+4 \vdots 19$.

1) Если $n! \vdots 19^2$. Заметим, что 19 - простое число, поэтому если $n! \vdots 19^2$, то в произведение чисел от 1 до n два раза встречается число $\vdots 19$. Наименьшие два числа $\vdots 19$ это 19 и 38 $\Rightarrow$ $\Rightarrow n = 38$, т.е чтобы $n! \vdots 19^2$, $n \geq 38$. Нам нужно минимальное, поэтому в этом случае $n = 38$.

Если $n^2+4n+4 \vdots 19^2$, т.к. это ~~парабола~~ график функции n^2+4n+4 - парабола, то чем меньше будет значение n^2+4n+4, тем

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

меньше будет.

Если $n^2+4n+4 \vdots 19^2$, то

$(n^2+4n+4) = (n+2)^2$, т.е:

$(n+2)^2 \vdots 19^2$

$\Rightarrow$ если $(n+2) \vdots 19$, то $(n+2)^2 \vdots 19$, но если $(n+2) \not\vdots 19$, то и $(n+2)^2 \not\vdots 19$.

$\Rightarrow n+2 = 19 \cdot k \Rightarrow n = 19k-2$. Мы ищем минимальное натуральное значение, поэтому $k=1$, $n=17$.

Если $n! \vdots 19$ и $(n^2+4n+4) \vdots 19 \Rightarrow$ аналогично 1-ому случаю из того что $n! \vdots 19 \Rightarrow n \geq 19$, но у нас есть меньший корень $n=17$. Значит минимальное $n=17$.

Ответ: 17.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

Пусть наши последовательность натуральных чисел это $a_1, a_1+1, \dots, a_1+4$. Тогда из условия:

$$a_1^2+(a_1+1)^2+(a_1+2)^2+(a_1+3)^2+(a_1+4)^2-10=N^3, N>6.$$

$$a_1^2+a_1^2+2a_1+1+a_1^2+4a_1+4+a_1^2+6a_1+9+a_1^2+8a_1+16-10=N^3$$

$$5a_1^2+a_1(2+4+6+8)+1+4+9+16-10=N^3$$

$$5a_1^2+20a_1+20=N^3$$

$$5(a_1^2+4a_1+4)=5(a_1+2)^2=N^3.$$

Пусть $a_1+2=x$. Тогда:

$5 \nmid x^2=N^3$. Т.к. $N^3>6$, то $N^3 \vdots 5$

т.к. 5 - простое и $N^3 \vdots 5 \Rightarrow N^3 \vdots 5^3$. Но это значит, что и $5x^2 \vdots 5^3 \Rightarrow x^2 \vdots 5^2$. Путь перебор, найдём минимальное N.

$x=5^2 \Rightarrow 5^3=N^3 \Rightarrow N=5<6$ - не подх.

$x=2\cdot 5^2 \Rightarrow 2\cdot 5^3 \neq N^3$

Значит $x \vdots 5$. Пусть $x=5^k\cdot t$, где $t \nmid 5$. Тогда:

$5\cdot(5^k\cdot t)^2=N^3 \Rightarrow 5^{2k+1}\cdot t^2=N^3$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Но 5^{2k+1} и t - взаимопростые. Значит $\Rightarrow 2k+1 : 3$, т.к. 5 и t - взаимопростые.

$\Rightarrow k=1$, на минимальное $k=1$. Теперь подберём t. оно должно быть таким, чтобы t^2 - был точным кубом. Минимально t, которое подходит $t=1$, но при $t=1$, $k=1$, $N=5$, что невозможно. Значит увеличить нужно либо k, либо t.

Если оставить $t=1$, то следующее подх. k это 4. Тогда $N = 5^3 = 125$.

Если оставить $k=1$, то тогда следующее t^2, которое точный куб это $2^3 = t$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow N = 2^2 \cdot 5^{\text{ч}} = 20$. Очевидно, что $20 < 125$, а при увеличение t либо k, N возрастает, значит минимальное $N=20 \Rightarrow x=40$, $a_1 = 38$.

Ответ: $N=20$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$|\sqrt{x^2-2x+3}+6| \geq |\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1|+|7-2x|$.

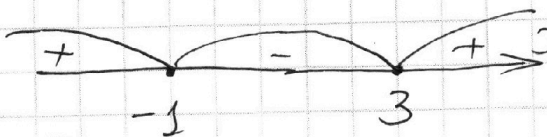
Очевидно, что $\sqrt{x^2-2x-3}+6>0$. Уберём этот модуль

$\sqrt{x^2-2x-3}+6 \geq |\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1|+|7-2x|$.

ОДЗ:

$x^2-2x-3 \geq 0$.

$(x-3)(x+1) \geq 0$



$x \in (-\infty;-1] \cup [3;+\infty)$.

Разберёмся теперь со значениями $\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1$. Это значение корня ≥ 0.

$\Rightarrow$ при $2x-1>0 \Leftrightarrow x \geq 0{,}5$ $\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \geq 0$.

Теперь определим когда выражение ≤ 0.

$\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \leq 0$

$\sqrt{x^2-2x-3} \leq 1-2x$.

Тогда если возводить в квадрат, мы потеряем знак в $1-2x$. Поэтому уравняем модули этих чисел

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{x^2-2x-3} \le |1-2x|$ $|^2$

$x^2-2x-3 \le (1-2x)^2$

$x^2-2x-3 \le 4x^2-4x+1.$

$3x^2-2x+4 \ge 0$

$D = 2^2-4\cdot3\cdot4 < 0$, и $3>0 \Rightarrow$

при всех x неравенство верно. Т.е. модуль $|1-2x|$ всегда больше, чем $\sqrt{x^2-2x-3}$. Это значит, что при $x \le 0{,}5$ значение всегда $\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \le 0$.

Тогда включим ОДЗ, получим, что при

$x \ge 3$, $\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \ge 0$

$x \le -1$, $\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 < 0$.

Теперь определим когда $7-2x \ge 0$ и $7-2x \le 0$. При $x \le 3{,}5$; $7-2x \ge 0$, при $x \ge 3{,}5$ $7-2x \le 0$. Включим ОДЗ:

если $x \in (-\infty; -1] \cup [3; 3{,}5]$, то $7-2x \ge 0$,

иначе если $x \in [3{,}5; +\infty)$, то $7-2x \le 0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3.

Раскроем модули:

Если $x \in (-\infty; -1]$, то

$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq -\sqrt{x^2-2x-3} - 2x + 1 + 7 - 2x$

$2\sqrt{x^2-2x-3} \geq -4x + 2$

$\sqrt{x^2-2x-3} \geq -2x + 1$

$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 \geq 0$

Мы это уже решали и $x \geq 3$ - не подх.

Если $x \in [3; 3,5]$, то

$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 + 7 - 2x$

$0 \geq 0$

$\Rightarrow$ подойдут все $x \in [3; 3,5]$.

Если $x \in [3,5; +\infty)$.

$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 + 2x - 7$

$6 \geq 4x - 8$

$14 \geq 4x$

$x \leq \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$

$\Rightarrow x = 3,5$ - подх.

Таким образом объединено все промежутки

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

получу, что $x \in [3; 3,5]$.

Ответ: $x \in [3; 3,5]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

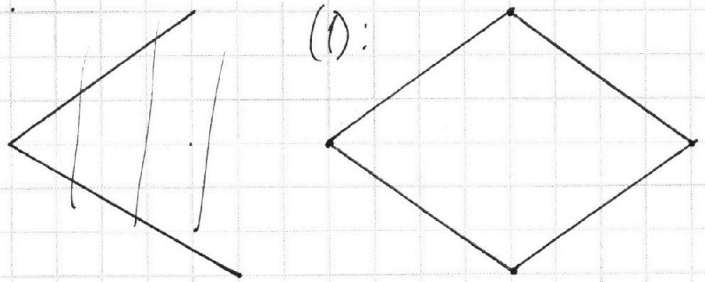
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

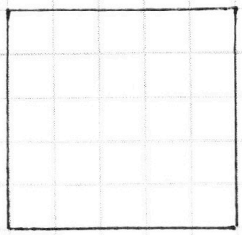
№4.

Рассмотрим все ромбы с длиной стороны 5:

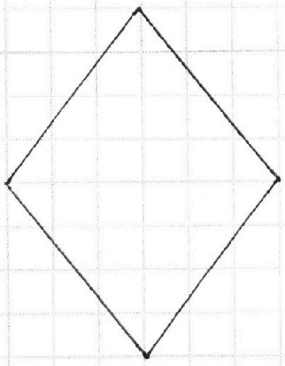


(1):

(2):



(3):



Всего получилось 3 вида. Посчитаем количество способов расставить каждый из видов ромбов и сложим эти варианты.

Начнём с 1-ого вида. Будем считать по количеству по крайней левой точке. Максимальное значение по x по Oy этой точки, назовём её A. $50-3=47$, а минимальное 4. По Ox ~~xx~~ минимум 1, максимум $50-6=44$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Посчитаю сколько точек в прямоугольном поле 43 на 43: В каждом горизонтальных рядов всего алей с точками 44, в каждой по 44 точки, т.е. всего точек 44^2. Это количество способов.

Посчитаем для ромба 2 для его крайней левой точки кол-во возможных положений. Он такой же как и случай (1), и сду так же нужно прямоугольное поле 43 на 43. всего 44^2 вариантов.

Теперь посчитаю квадрат. Здесь я буду брать положение его верхней крайней левой точки: Минимум по Ox - 1, максимум по Ox будет: $50-5=45$. По Oy минимум $1+5=6$, максимум 50. Здесь можно повторить те же самые рассуждения, которые я проводил для первых двух видов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

только квадрат уже 44 на 44 и вариантов тогда уже 45^2. В итоге спрятано в сумме получаю $2 \cdot 44^2 + 45^2 = 2 \cdot 44^2 + (44+1)^2 =$

$= 2 \cdot 44^2 + 44^2 + 90 + 1 = 3 \cdot 44^2 + 91 = 5899.$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times\ 44 \\ \hline 176 \\ 1760 \\ \hline 1936 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1936 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 5808 \end{array}$$

Ответ: 5899

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$

$2025 = 45^2$

$19 \cdot 2^x = y^2 - 2025$

$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$.

Рассмотрим случаи. Если y - чётно, то тогда $(y-45)$ и $(y+45)$ - нечётны, т.е $2^x = 1$, чтобы левая часть была также нечётно $\Rightarrow x = 0$.

$19 = (y-45)(y+45)$.

$y^2 - 2025 = 19$

$y = 2034$, но это не квадрат целого числа, т.к. $2034 : 2$, но $2034 \not\vdots 4$.

$\Rightarrow y$ - нечётное. Рассмотрим делимость скобок на 4. Если $y-45 : 4$, то

$y \underset{4}{\equiv} 45 \underset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow y = 4t + 1$

но тогда $y+45 = 4t + 46 \underset{4}{\equiv} 2$, Если $y+45 : 4$, то

$y \underset{4}{\equiv} -45 \underset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow y = 4q + 3$, но тогда $y - 45 = 4q - 42 \underset{4}{\equiv} 2$. Таким образом если одна из скобок кратна 4, то степени 2^k, где

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$k \geq 2$, то вторая скобка кратна только 2.

Но при этом в любом случае обе скобки :2.

$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$.

19 и 2^x - взаимнопростые.

$\Rightarrow$ рассмотрим случаи

(1) $\begin{cases} (y-45) = 19 \cdot 2 \\ (y+45) = 2^{x-1} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y-45 = -19 \cdot 2 \\ y+45 = -2^{x-1} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (y-45) = 2^{x-1} \\ y+45 = 19 \cdot 2 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} y-45 = -2^{x-1} \\ y+45 = -19 \cdot 2 \end{cases}$

(1): $y = 38+45 = 83$.

$y+45 = 83+45 = 128 = 2^7 = 2^{x-1} \Rightarrow x = 8$

$x = 8$, $y = 83$

(2): $y = 45-38 = 7$

$y+45 = 7+45 = 52 = -2^{x-1}$ - x - не целое

(3): $y = 38-45 = -7$

$y-45 = -7-45 = -52 = 2^{x-1}$ - x не целое

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(4):

$y = -38 - 45 = -83$

$-83 - 45 = -128 = -2^{x-1} \Rightarrow x = 8$

$x = 8,\ y = -83$

Ответ: $(8; -83)$, $(8; 83)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

x^2-6x+a - парабола, ветви которой направлены вверх. Значит т.к. x - ограничен, то максимумы будут в концах ветвей параболы. Вот это значит, что наибольшее значение x^2-6x+a достигается либо при максимальном x, либо при минимальном x. По условию:

$x^2+y^2=a^2$ - график этого многочлена окружность с радиусом $|a|$ с центром в $(0;0)$. Это значит, что максимальное и минимальное значение x это a и $-a$ соотв. Подставим в x^2-6x+a.

$x^2-6a+a=a^2-5a$, $x=a$

$x^2+6a+a=a^2+7a$, $x=-a$.

Тогда при $a>0$ максимум будет a^2+7a, при $a<0$ максимум это a^2-5a.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

Решим уравнение:

$a^2+7a=8$, $a>0$.

$a^2+7a-8=0$

$(a+8)(a-1)=0$

$a=-8$ или $a=1 \Rightarrow a=1$

$a^2-5a=8$

$a^2-5a-8=0$, $a<0$

$D=25+4\cdot 8=25+32=57$

$a_1=\frac{5+\sqrt{57}}{2}>0$, $a_2=\frac{5-\sqrt{57}}{2}$ - подходит

Т.е. a либо 1, либо $a=\frac{5-\sqrt{57}}{2}$

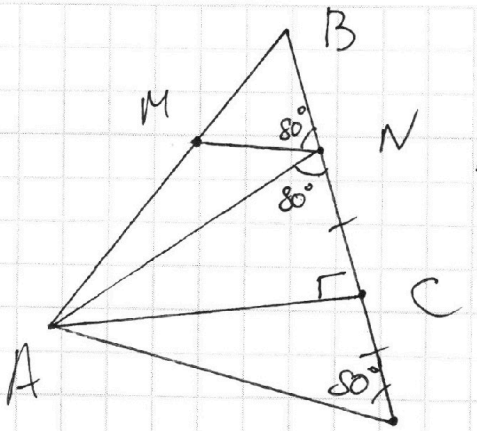
Ответ: 1 или $\frac{5-\sqrt{57}}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BM}{MA} \cdot \frac{BN}{BM} = \frac{2NC}{MA}$

Удвоим сторону NC до т. D. получим, что $2NC = CD$. Тогда перепишем наше отношение:

$\frac{BN}{BM} = \frac{ND}{MA} \neq \frac{ND}{MA} + \frac{BN}{2AC}$

Т.к. уголы $\frac{BN}{BM} = \frac{ND}{MA}$, то и $\frac{ND+BN}{BM+MA} = \frac{BN}{BM} =$

$= \frac{ND}{NA}$. Но $\frac{ND+BN}{BM+MA} = \frac{BD}{BA}$. Т.е

$\frac{BN}{BM} = \frac{BD}{BA} \Rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle MND$.

$\Rightarrow \angle ADC = 80^\circ \Rightarrow \triangle AND$ - р/б, но AC - медиана

$\Rightarrow$ она ещё и высота $\Rightarrow \angle ACN = 90^\circ$.

Ответ: 90°.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2 =$

$8^2 \cdot 5^2 \cdot 5 =$

$= 2^6 \cdot 5^3$

2034 | 2
1017 | 9
113

2034 | 4
508

1017 | 9
11 | 113
5
27

5

$\left(\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right) + \left(\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right) =$

$= \left(\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right)$

$\left(\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right)\left(\frac{-5-\sqrt{57}}{2}\right) =$

$= \frac{57-25}{2} = \frac{32}{4} = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

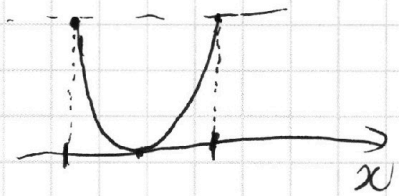
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x^2+y^2=a$

x^2-6x+a



$x=-a$, $x=+a$

a^2+7a a^2-5a

$a>0$

a^2+7a

$a^2-5a<a<0$

$a^2+7a > a^2-5a$

$7a > -5a$

$a^2+7a=8$

$a^2+7a-8=0$

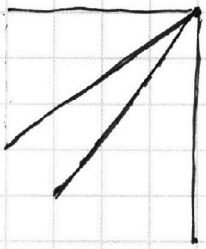
$(a+8)(a-1)=0$

$a=-8$ ✗ $a=1$

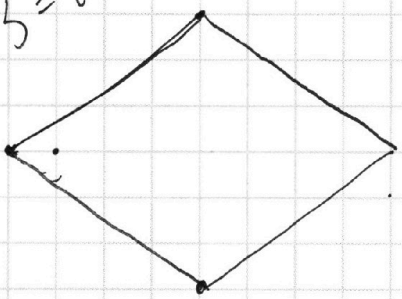
$a^2-5a=-8$

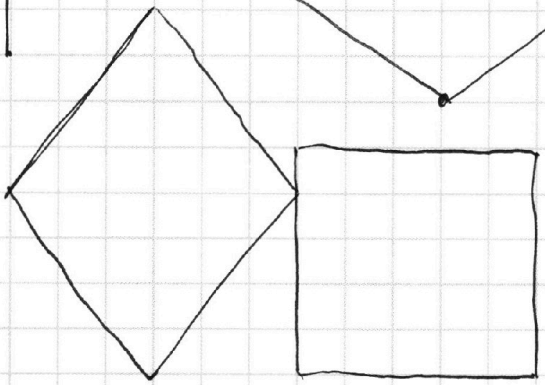
$a^2-5a+8=0$

$D=25-4\cdot 8$



$x=8\cdot 5=40$





8^2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5a_1^2+20a_1+20=N^3$

$5(a_1^2+4a_1+4)=N^3$ $N=10$

4_H $:5$ $:5$ 200 1000

$a_1+4a_1+4=200$

$a_1+4a_1-196=0$

$D=16+4\cdot 196=$

$=16(1+49)$

$14^2=2^2\cdot 7^2$

$5(a_1+2)^2=N^3$ $a_1+4a_1+4=(a_1+2)^2$

$\frac{N^3}{5}=oc^2$ $N^3=5oc^2$

10^3 $5\ 10^2$

15^3

$5\cdot 15^2=3^2\cdot 5^3$

$5\cdot 20^2=4^2\cdot 5^3$

$5\cdot 25^2=5\cdot 5^4=5^5$

$5\cdot 125^2=5\cdot 5^6$

$5\cdot (5^4)^2=5^9$

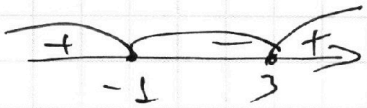
$N=125$;

$|\sqrt{x^2-2x-3}+6|\geq|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1|+|7-2x|$

$\sqrt{x^2-2x-3}+6\geq|\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1|+|7-2x|$

ОДЗ: $x^2-2x-3\geq 0$

$(x-3)(x+1)\geq 0$



$x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

$n! + n! \cdot (n+1) + n!(n+1)(n+2) =$

$= n!(1 + n + 1 + (n+1)(n+2)) : 361$

$n = 38.$

$361 \mid 17$ 34 21 2

$361 \mid 19$ 19 $2 \neq 1$ 1

$361 \mid 19$ 19 171 171 19

$80 + 81$

19^2

19

171

190

361

$1 + n + 1 + n^2 + 3n + 2 : 361$

$n^2 + 4n + 2^2 : 361 \quad (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4.$

$(n+2)^2 : 361 = 19^2$

$n + 2 : 19 \quad n = 17.$

№2

$a_1, a_1 + 1, \ldots, a_1 + 4.$ $N > 6.$

$a_1^2 + (a_1+1)^2 + \ldots + (a_1+4)^2 - 10 = N^3$

$+1 \quad +2 \quad +3 \quad +4$

$S = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 =$

$2a_1 \quad 4a_1 \quad 6a_1 \quad 8a_1$

$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16$

$a_1^2 + a_1^2 + 2a_1 + 1 + a_1^2 + 4a_1 + 4 + \ldots + a_1^2 + 8a_1 + 16 =$

$= 5a_1^2 + 20a_1 + 30 - 10 = N^3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y - 45 = 38 \\ y + 45 = 2^{x-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 45 = 38 \\ y - 45 = 2^{x-1} \end{cases}$$

$y = 38 - 45 = -$

$y = 83$

$83 + 45 = 128$

$2^7 = 128$

$x = 8$

$y - 45 = -19$

$y + 45 = 2^x$

$2^1\ 2$
$2^2\ 4$
$2^3\ 8$
$2^4\ 16$
$2^5\ 32$
$2^6\ 64$
$2^7\ 128$
$2^8\ 256$
$2^9\ 512$
$2^{10}\ 1024$

$$|\sqrt{x^2-2x-3} + c| \geq |\sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1| + |7 - 2x|.$$

$x \in$

$\sqrt{x^2-2x-3} + (2x-1) \geq 0$ — всегда ≥ 0 — $x \in [3; +\infty)$

$\sqrt{x^2-2x-3} \geq 1 - 2x$ — $x \geq 0{,}5$

$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1$ — $x \in [3; +\infty) > 0$

$3x^2 - 2x + 4 \leq 0$ — $x \in (-\infty; -1] \leq 0$

$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 4 < 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$

$y+45 \vdots 4$

$y \underset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow y = 4k+3$

1) $y-45 = 2^k \quad y+45 = 19 \cdot 2^{x-k}$

$y+45 = 2^k \quad y+45 = 19 \cdot 2^{x-k}$

$4k+3-45 =$

$= 4k-42 \underset{4}{\equiv} 2$

1) $y = 2^k \pm 45$

Если y - чёт

$x = 0$

$2^k + 90 = 19 \cdot 2^{x-k}$

$2^k = 19 \cdot 2^{x-k} - 90$

$19 = (y-45)(y+45)$

~~$k \le x-k$~~ $x-k \le k$

$y-45 = 19$

$y+45 = 1$

$0 \underset{2^k}{\equiv} -90 \quad k = 1$

$y^2 - 45^2 = 19$

$2 + 90 =$

$y^2 = 19 + 45^2$

$45 \quad 46^2 - 45^2 =$

$= 1 \cdot 45 = 45$

y - чёт:

y - нечёт:

$\begin{cases} y-45 = 19 \\ y+45 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y+45 = 19 \\ y-45 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y-45 = -19 \\ y+45 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y+45 = -19 \\ y-45 = -1 \end{cases}$

$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45).$

$y = 64$

$\begin{cases} y-45 = 19 \\ y+45 = 19 \cdot 2^x \end{cases} \quad \begin{cases} y+45 = 19 \\ y-45 = 2^x \end{cases} \quad y = -26$

$19 = 2^x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y-45=19\cdot 2^k \\ y+45=2^{x-k} \end{cases} \qquad y-45 \vdots 19 \qquad \frac{45}{19}=2\frac{7}{19}$$

$$y \equiv 38 \qquad 19\cdot 3=30+27=37-2$$

$$\begin{cases} y+45 \div 19\cdot 2^k \\ y-45=2^{x-k} \end{cases} \qquad y=\boxed{19t+7}=19\cdot(2+2^k)+7$$

$$y=19t+12 \qquad 3^2\cdot 2\cdot 5 \qquad 45+19\cdot 2^k$$

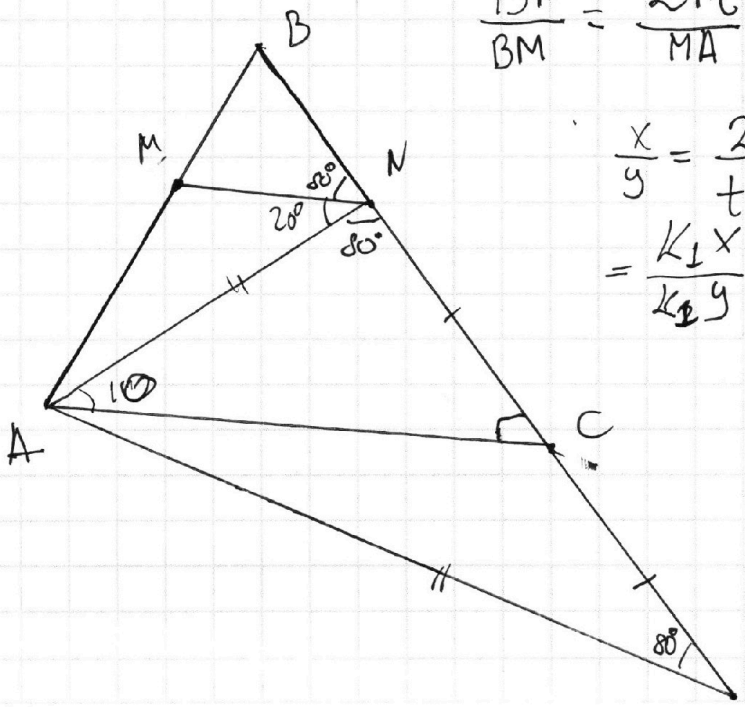
$$19t+7-45 \qquad 90+19\cdot 2^k=2^{x-k}$$

$$19(t-2)=19\cdot 2^k \qquad 45+19\cdot 2^{k-1}=2^{x-k-1} \qquad 26\cdot 2=26-19=7$$

$$t=2+2^k \qquad 7 \equiv_{19} 2^{x-k-1} \qquad 13 \qquad 32-19$$

2 4 8 16 13 7 14 9

18 17 15



$$\frac{BN}{BM}=\frac{2NC}{MA} \qquad \frac{DN}{BM}=\frac{ND}{MA}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{t}=\frac{2+x}{y+t}=\frac{x+k_1x}{y+k_1y}$$

$$=\frac{k_1x}{k_1y} \qquad \frac{BN}{BM}=\frac{BD}{AB}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$2x-1\leq 0$ $\quad 2x-1\geq 0$

$x\leq 0,5$ $\quad x\geq 0,5$

$7-2x<0$ $\quad 7-2x\geq 0$

$2x>7$ $\quad x\leq 3,5$

$x>3,5$

$(-\infty;0,5)\cup[0,5;3,5]\cup[3,5+\infty)$.

$\sqrt{x^2-2x-3}+6\geq$

$\sqrt{x^2-2x+3}\geq 2x-1$

$\sqrt{x^2-2x+3}+2x-1\geq 0$

$\sqrt{x^2-2x+3}\geq 2x-1$ $\quad x\geq 0,5$ - верно

$x^2-2x+3\geq 1^2-4x+4x^2$

$3x^2-2x-2\leq 0$

$D=4+4\cdot 3\cdot 2=4\cdot 7$

$19\cdot 2^x+2025=y^2$ $\quad x\geq 2$

$12\equiv y^2=19k+12$ $\quad y^2\equiv_4 1$

$1\equiv_2 y$

$1\cdot(-1)^x\equiv_3 y^2$

x - четно

2025

$x:2$

$y^2\equiv_3 1$

$y^2\equiv_2 1$

$19\cdot 2^x=(y-45)(y+45)$