

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?
2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .
3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.
5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.
7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$n! + (n+1)! + (n+2)! : 361.$$

$$\begin{aligned} n! + n!(n+1) + n!(n+1)(n+2) &= \\ = n!(1 + n+1 + n^2 + 3n+2) &= \\ = n!(n^2 + 4n + 4) &= n!(n+2)^2 \end{aligned}$$

$$361 = 19^2$$

Возможны следующие случаи:

$$n! = 19^2 \quad n! : 19^2 \text{ или } n^2 + 4n + 4 : 19^2 \text{ или } n! : 19 \text{ и } n^2 + 4n + 4 : 19.$$

Если $n! : 19^2$. Заметим, что 19 - простое число, поэтому если $n! : 19^2$, то в произведении чисел от 1 до n два раза встречается число : 19. Наименьшие два числа : 19 это 19 и 38 $\Rightarrow \Rightarrow n = 38$, т.е. чтобы $n! : 19^2$, $n \geq 38$. Нам нужно минимальное, поэтому в этом случае $n = 38$.

Если $n^2 + 4n + 4 : 19^2$, т.е. это квадрат уравнения $n^2 + 4n + 4$ - квадрат, то тем меньше будет значение $n^2 + 4n + 4$, тем



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

меньше будет

Если $n^2 + 4n + 4 : 19^2$, то

$$(n^2 + 4n + 4) = (n+2)^2, \text{ т.е. :}$$

$$(n+2)^2 : 19^2$$

$\Rightarrow$ если $(n+2) : 19$, то $(n+2)^2 : 19$, но если

$(n+2) \not: 19$, то и $(n+2)^2 \not: 19$.

$$\Rightarrow n+2 = 19 \cdot k \Rightarrow n = 19k - 2. \text{ Мы ищем}$$

минимальное натуральное значение, поэтому $k=1$, $n=17$.

Если $n! : 19$ и $(n^2 + 4n + 4) : 19 \Rightarrow$ аналогично

1-ому случаю из того что $n! : 19 \Rightarrow n \geq 19$, но

у нас есть меньший корень $n=17$. Значит

минимальное $n=17$.

Ответ: 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

Пусть наша последовательность натуральных чисел это $a_1, a_1+1, \dots, a_1+4$. Тогда из условия:

$$a_1^2 + (a_1+1)^2 + (a_1+2)^2 + (a_1+3)^2 + (a_1+4)^2 - 10 = N^3, N > 6.$$

$$a_1^2 + a_1^2 + 2a_1 + 1 + a_1^2 + 4a_1 + 4 + a_1^2 + 6a_1 + 9 + a_1^2 + 8a_1 + 16 - 10 = N^3$$

$$5a_1^2 + a_1(2+4+6+8) + 1+4+9+16-10 = N^3$$

$$5a_1^2 + 20a_1 + 20 = N^3$$

$$5(a_1^2 + 4a_1 + 4) = 5(a_1+2)^2 = N^3$$

Пусть $a_1+2=x$. Тогда:

$$5x^2 = N^3. \text{ П.к. } N^3 > 6, \text{ то } N^3 \neq 15$$

т.к. 5-простое и $N^3 : 5 \Rightarrow N^3 : 5^3$. Поэто

значит, что и $5x^2 : 5^3 \Rightarrow x^2 : 5^2$. Требуется

перебору, найдем минимальное N .

$$x = 5^2 \Rightarrow 5^3 = N^3 \Rightarrow N = 5 \text{ - не подх.}$$

$$x = 2 \cdot 5^2 \Rightarrow 2 \cdot 5^3 \neq N^3$$

Значит $x \neq 5$. Пусть $x = 5^k \cdot t$, где

$t \neq 5$. Тогда:

$$5 \cdot (5^k \cdot t)^2 = N^3 \Rightarrow 5^{2k+1} \cdot t^2 = N^3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Но 5^{2k+1} и t - взаимнопросты. Но тогда~~
 $\Rightarrow 2k+1 : 3$, т.к. 5 и t - взаимнопростые.
 $\Rightarrow k=1$, на минимальное $k=1$. Теперь
подберём t . Оно должно быть таким,
чтобы t^2 был точным кубом. Мини-
мально t , которое подходит $t=1$, но
при $t=1$, $k=1$, $N=5$, что невозможно. Значит
увеличить нужно либо k , либо t .
Если оставить $t=1$, то следующее подх.
 k это 4. Тогда $N=5^3=125$.
Если оставить $k=1$, то тогда следующее
 t^2 , которое точный куб это $2^3=t$. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow N=2^2 \cdot 5^4=20$. Очевидно, что $20 < 125$,
а при увеличении t либо k , N возрастает,
значит минимальное $N=20 \Rightarrow x=40$,
 $a_1=38$.

Ответ: $N=20$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$|\sqrt{x^2-2x+3}+6| \geq |\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1| + |7x-2x|.$$

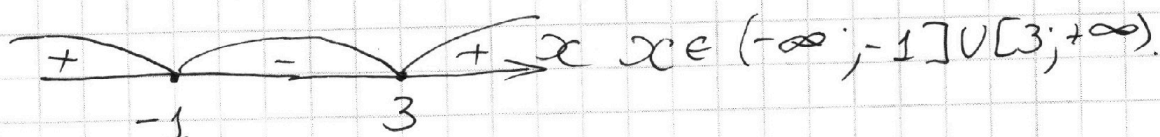
Очевидно, что $\sqrt{x^2-2x-3}+6 > 0$. Уберём этот модуль

$$\sqrt{x^2-2x-3}+6 \geq |\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1| + |7-2x|.$$

ОДЗ:

$$x^2-2x-3 \geq 0.$$

$$(x-3)(x+1) \geq 0$$



Разберёмся теперь со значениями

$$\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1. \text{ Его значение корня } \geq 0.$$

$$\Rightarrow \text{при } 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 0,5 \sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \geq 0.$$

Теперь определим когда выражение ≤ 0 .

$$\sqrt{x^2-2x-3}+2x-1 \leq 0$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \leq 1-2x.$$

Тогда если возводить в квадрат, то мы потеряем знак в $1-2x$. Поэтому сравним модули этих чисел



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА

2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \leq |1 - 2x| \quad |^2$$

$$x^2 - 2x - 3 \leq (1 - 2x)^2$$

$$x^2 - 2x - 3 \leq 4x^2 - 4x + 1.$$

$$3x^2 - 2x + 4 \geq 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 < 0, \text{ и } 3 > 0 \Rightarrow$$

при всех x неравенство верно. П.с.

можно $|1 - 2x|$ всегда больше, чем

$\sqrt{x^2 - 2x - 3}$. Это значит, что при $x \leq 0,5$ значение всегда $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \leq 0$.

Тогда выключим ОДЗ, получим, что при

$$x \geq 3, \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$$

$$x \leq -1, \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 < 0.$$

Всё Теперь определим когда $7 - 2x \geq 0$ и

$7 - 2x \leq 0$. При $x \leq 3,5$; $7 - 2x \geq 0$; при

$x \geq 3,5$ $7 - 2x \leq 0$. Выключим ОДЗ:

если $x \in (-\infty; -1] \cup [3; 3,5]$, то $7 - 2x \geq 0$,

иначе если $x \in [3,5; +\infty)$, то $7 - 2x \leq 0$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Раскроем модуль: №3.

Если $x \in (-\infty; -1]$, то

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq -\sqrt{x^2-2x-3} - 2x + 1 + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2-2x-3} \geq -4x + 2$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} \geq -2x + 1$$

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 \geq 0$$

Мы это уже решали и $x \geq 3$ - не подх.

Если $x \in [3; 3,5]$, то

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$0 \geq 0$$

$\Rightarrow$ подойдут все $x \in [3; 3,5]$.

Если $x \in [3,5; +\infty)$.

$$\sqrt{x^2-2x-3} + 6 \geq \sqrt{x^2-2x-3} + 2x - 1 + 2x - 7$$

$$6 \geq 4x - 8$$

$$14 \geq 4x$$

$$x \leq \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$\Rightarrow x = 3,5$ - подх.

Таким образом объединю все промежутки



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

найду, что $x \in [3; 3,5]$.

Ответ: $x \in [3; 3,5]$.

Handwritten signature



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

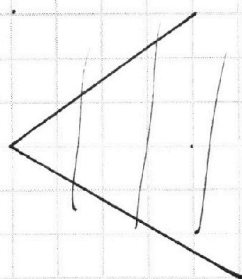
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

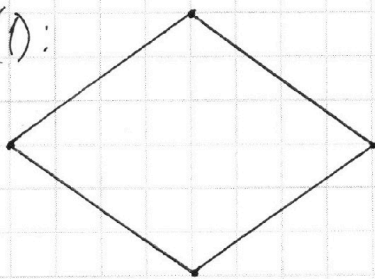
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4.

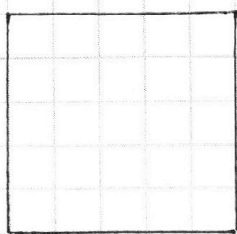
Рассмотрим все ромбы с длиной стороны 5:



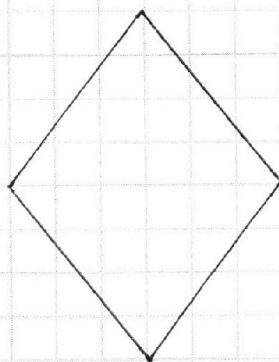
(1):



(2):



(3):



Всего получилось 3 вида. Посчитаем количество способов расставить каждый из видов ромбов и сложим эти варианты. Начнем с 1-ого вида. Будет считаться количество по крайней левой точке.

Максимальное значение OX по OY этой точки, назову её $A. 50 - 3 = 47$, а минимальное

4. По OY же минимум 1, максимум $50 - 6 = 44$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем сколько точек в прямоугольном поле 43×43 : В каждой из 43 строк по 44 точек, т.е. всего точек 44^2 . Это количество способов.

Посчитаем для ромба 2 для его крайней левой точки кол-во возможных положений. Он такой же как и случай (1), и ему так же нужно прямоугольное поле 43×43 . всего 44^2 вариантов.

Теперь посчитаем квадрат. Здесь я буду брать положение его верхней крайней левой точки. Минимум по $Ox - 1$, максимум по Ox будет: $50 - 5 = 45$. По Oy минимум $1 + 5 = 6$, максимум 50 . Здесь можно повторить те же самые рассуждения, которые я проводил для и первых двух видов:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

только квадраты уже 44 на 44 и вертикальных
тогда уже 45². В итоге суммируем все
получая $2 \cdot 44^2 + 45^2 = 2 \cdot 44^2 + (44+1)^2 =$
 $= 2 \cdot 44^2 + 44^2 + 90 + 1 = 3 \cdot 44^2 + 91 = 5899.$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 44 \\ \hline 176 \\ 1760 \\ \hline 1936 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1936 \\ 3 \\ \hline 5808 \end{array}$$

Ответ: 5899



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{5}$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2$$

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 2025$$

$$2025 = 45^2$$

$$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45).$$

Рассмотрим случаи. Если y -чётно, то тогда

$(y - 45)$ и $(y + 45)$ - нечётные, т.е.

$2^x = 1$, тогда левая часть была так же нечётно $\Rightarrow x = 0$.

$$19 = (y - 45)(y + 45).$$

$$y^2 - 2025 = 19$$

$y = 2034$, но это не квадрат целого числа, т.к. $2034 : 2$, но $2034 \nmid 4$.

$\Rightarrow y$ - нечётное. Рассмотрим делимость

скажем на 4. Если $y - 45 : 4$, то

$$y \equiv 45 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow y = 4t + 1$$

но тогда $y + 45 = 4t + 46 \equiv 2 \pmod{4}$. Если $y + 45 : 4$, то

$$y \equiv -45 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow y = 4q + 3, \text{ но тогда } y - 45 =$$

$$= 4q - 42 \equiv 2 \pmod{4}. \text{ Таким образом если одна}$$

из скобок кратна 2^k , то степень 2^k , где



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☒☐☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$k \geq 2$, то вторая скобка кривая только 2.

Но при этом в любом случае обе скобки: 2.

$$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

19 и 2^x - взаимнопросты.

$\Rightarrow$ рассмотрим случаи

$$\begin{cases} (1) \begin{cases} y-45 = 19 \cdot 2 \\ y+45 = 19 \cdot 2^{x-1} \end{cases} & (2) \begin{cases} y-45 = -19 \cdot 2 \\ y+45 = -2^{x-1} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3) \begin{cases} y-45 = 2^{x-1} \\ y+45 = 19 \cdot 2 \end{cases} & (4) \begin{cases} y-45 = -2^{x-1} \\ y+45 = -19 \cdot 2 \end{cases} \end{cases}$$

(1): $y = 38 + 45 = 83$.

$$y+45 = 83+45 = 128 = 2^7 = 2^{x-1} \Rightarrow x=8$$

$$x=8, y=83$$

(2): $y = 45 - 38 = 7$

$$y+45 = 7+45 = 52 = -2^{x-1} - x - \text{нечисло}$$

(3): $y = 38 - 45 = -7$

$$y-45 = -7-45 = -52 = 2^{x-1} - x - \text{нечисло}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(4):

$$y = -38 - 45 = -83$$

$$-83 - 45 = -128 = -2^{x-1} \Rightarrow x = 8$$

$$x = 8, y = -83$$

Ответ: $(8; -83), (8; 83)$.

РР.

23



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$x^2 - 6x + a$ - парабола, ветви которой направлены вверх. Значит т.н. x -ограничен, то максимумы будут в концах ветвей параболы. Из это значит, что наибольшее значение $x^2 - 6x + a$ достигается либо при максимальном x , либо при минимальном x . По условию:

$x^2 + y^2 = a^2$ - график этого уравнения существует в $(0; 0)$. окружность с радиусом $|a|$. Это значит, что максимальное и минимальное значения x это a и $-a$ соотв. Подставим в $x^2 - 6x + a$.

$$x^2 - 6x + a = \cancel{a^2}^a - 5a, x = a$$

$$x^2 - 6x + a = \cancel{a^2}^a + 7a, x = -a.$$

Тогда при $a > 0$ максимум будет $\cancel{a^2}^a + 7a$, при $a < 0$ максимум это $\cancel{a^2}^a - 5a$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☐☐☒☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NB

Решим уравнение:

$$a^2 + 7a = 8, a > 0.$$

$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

$$(a+8)(a-1) = 0$$

$$a = -8 \text{ или } a = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$a^2 - 5a = 8$$

$$a^2 - 5a - 8 = 0, a < 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 8 = 25 + 32 = 57$$

$$a_1 = \frac{5 + \sqrt{57}}{2} > 0, a_2 = \frac{5 - \sqrt{57}}{2} - \text{не подходит}$$

$$\text{И.е. } a \text{ либо } 1, \text{ либо } a = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$$

$$\text{Ответ: } 1 \text{ или } \frac{5 - \sqrt{57}}{2}.$$



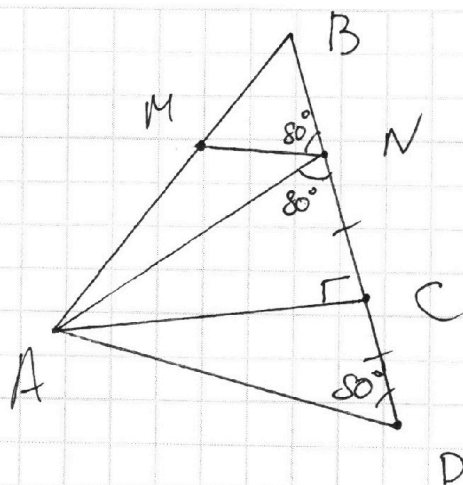
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{BM} = \frac{2NC}{MA}$$

Удвоим сторону NC

по т. Д. получим, что

$$2NC = CD. \text{ Тогда}$$

перепишем наше отношение:

$$\frac{BN}{BM} = \frac{ND}{MA} \neq \frac{ND+BN}{MA+2NC}$$

т.к. упрости $\frac{BN}{BM} = \frac{ND}{MA}$, то и $\frac{ND+BN}{BM+MA} = \frac{BN}{BM} = \frac{ND}{MA}$. По $\frac{ND+BN}{BM+MA} = \frac{BD}{BA}$. т.е.

$$\frac{BN}{BM} = \frac{BD}{BA} \Rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle MND.$$

$$\Rightarrow \angle ADC = 80^\circ \Rightarrow \triangle AND - \text{прямоугольный, но AC - медиана}$$

$$\Rightarrow \text{она еще и высота} \Rightarrow \angle ACN = 90^\circ.$$

Ответ: 90° .

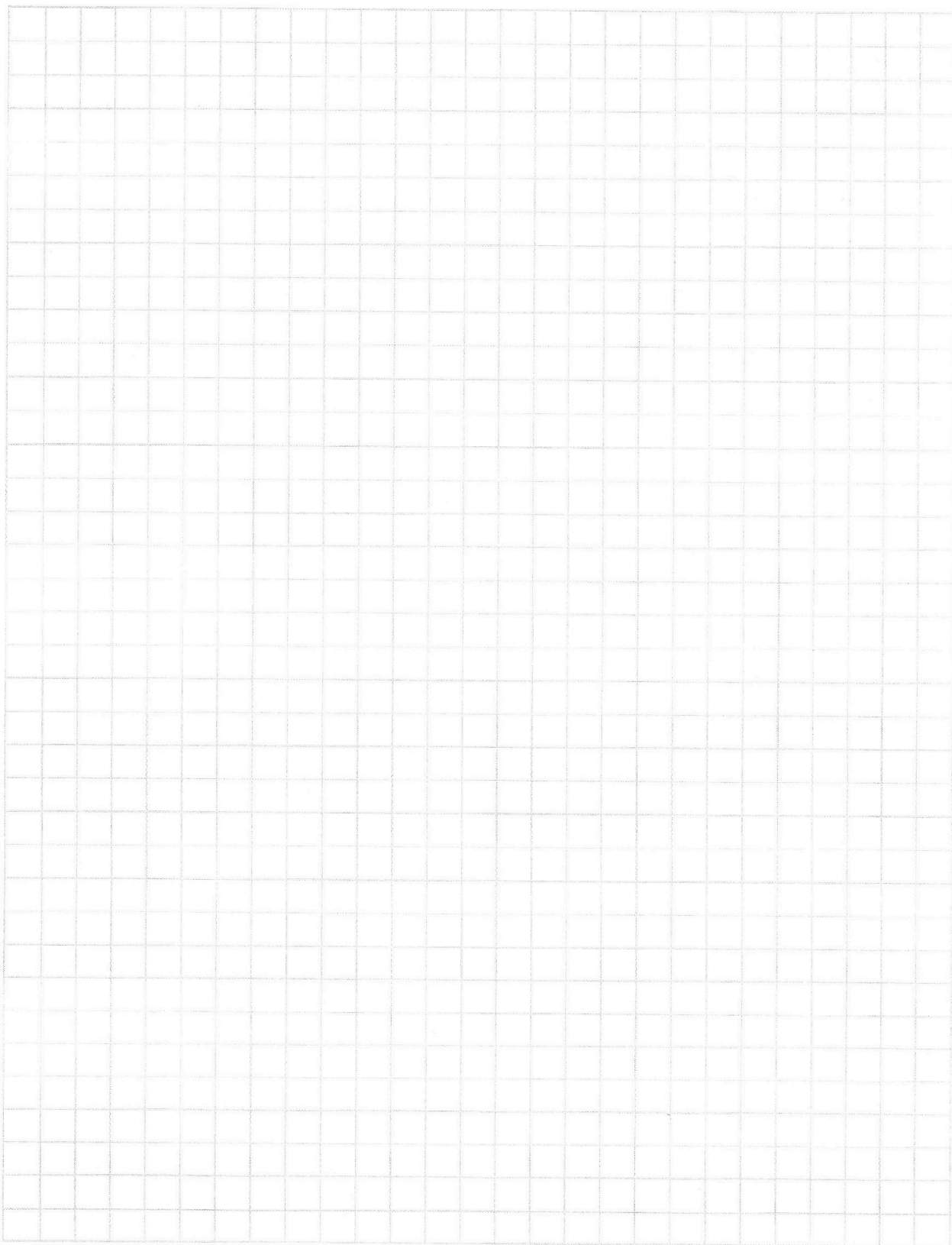


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 =$$

$$8^2 \cdot 5^2 \cdot 5 =$$

$$= 2^6 \cdot 5^3$$

$$\begin{array}{r} 2034 \overline{) 2} \\ 1017 \overline{) 9} \\ 113 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2034 \overline{) 4} \\ 1017 \overline{) 9} \\ 113 \end{array}$$

5

$$\left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right)^2 - 6 \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) + \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) =$$

$$= \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right)^2 - 5 \left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right)$$

$$\left(\frac{5 - \sqrt{57}}{2} \right) \left(\frac{-5 - \sqrt{57}}{2} \right) =$$

$$= \frac{57 - 25}{2} = \frac{32}{2} = 8$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

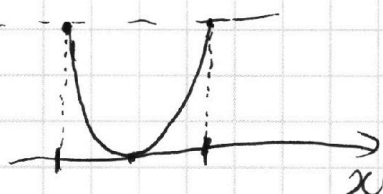
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a$$

$$x^2 - 6x + a$$



$$x = -a, \quad x = +a$$

$$\begin{array}{r} a^2/7 \\ + a \\ \hline a^2 - 5a \end{array}$$

$$a > 0$$

$$a^2 + 7a$$

$$a^2 - 5a \leq a < 0$$

$$a^2 + 7a > a^2 - 5a$$

$$7a > -5a$$

$$a^2 + 7a = 8$$

$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

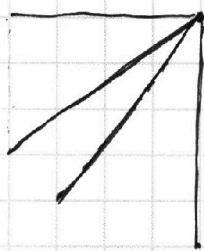
$$(a + 8)(a - 1) = 0$$

$$a = -8 \text{ or } a = 1$$

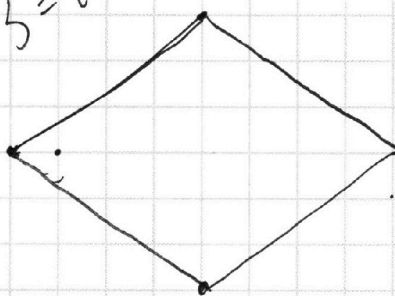
$$a^2 - 5a = -8$$

$$a^2 - 5a + 8 = 0$$

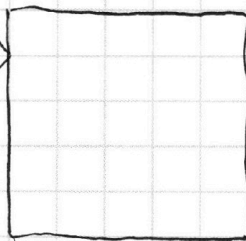
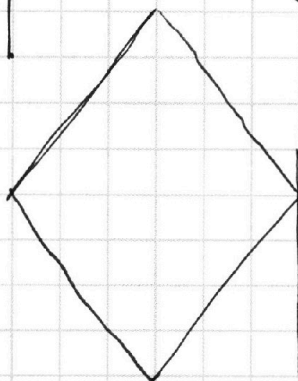
$$D = 25 - 4 \cdot 8$$



$$x = 8 \cdot 5 = 40$$



8.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5a_1^2 + 20a_1 + 20 = N^3$$

$$5(a_1^2 + 4a_1 + 4) = N^3 \quad N=10$$

200
1000

$$a_1 + 4a_1 + 4 = 200$$

$$a_1 + 4a_1 - 196 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 196 = 924 = 2 \cdot 231 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

$$= 16(1 + 49)$$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 16 \\ \hline 160 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 14 \\ \hline 56 \\ \hline 140 \\ \hline 156 \end{array}$$

$$14^2 = 2^2 \cdot 7^2$$

$$5(a_1 + 2)^2 = N^3$$

$$\frac{N^3}{5} = 500^2$$

$$a_1 + 4a_1 + 4 = (a_1 + 2)^2$$

$$N^3 = 500^2$$

$$\begin{array}{r} 10^3 \\ 1000 \\ \hline 15^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5 \cdot 15^2 = 3^2 \cdot 5^3 \\ 5 \cdot 20^2 = 4^2 \cdot 5^3 \\ 5 \cdot 25^2 = 5 \cdot 5^4 = 5^5 \\ 5 \cdot 125^2 = 5 \cdot 5^6 \\ 5 \cdot (5^2)^2 = 5^9 \end{array}$$

$$N = 125$$

$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6| \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

$$0 \leq x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$(x - 3)(x + 1) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline -1 \quad 3 \end{array}$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$n! + n! \cdot (n+1) + n! \cdot (n+1)(n+2) =$$

$$= n! (1 + n+1 + (n+1)(n+2)) : 361$$

$$n = 38.$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 17} \\ 34 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 19} \\ 18 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \overline{) 19} \\ 19 \\ \hline 171 \\ 171 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$80 + 81$$

$$\begin{array}{r} 19^2 \\ 19 \\ \hline 171 \\ 180 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$1 + n + 1 + n^2 + 3n + 2 : 361$$

$$n^2 + 4n + 4 : 361 \quad (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4.$$

$$(n+2)^2 : 361 = 19^2$$

$$n+2 : 19 \quad n = 17.$$

№2

$$a_1, a_1+1, \dots, a_1+4$$

$$N > 6.$$

$$a_1^2 + (a_1+1)^2 + \dots + (a_1+4)^2 - 10 + N^3 = N^3$$

$$S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1+4+9=14$$

$$4a_1^2 + a_1^2 + 2a_1 + 1 + a_1^2 + 4a_1 + 4 + \dots + a_1^2 + 8a_1 + 16 =$$

$$= 5a_1^2 + 20a_1 + 30 - 10 = N^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y - 45 = 38 \\ y + 45 = 2^{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 45 = 38 \\ y - 45 = 2^{x-1} \end{cases}$$

$$y = \begin{array}{r} +83 \\ 45 \\ \hline 128 \end{array} \quad y = 83$$

$$y - 45 = -19$$

$$y + 45 = 2^x$$

$$y = 38 - 45 = -$$

$$\begin{array}{ll} 2^1 & 2 \\ 2^2 & 4 \\ 2^3 & 8 \\ 2^4 & 16 \\ 2^5 & 32 \\ 2^6 & 64 \\ 2^7 & 128 \\ 2^8 & 256 \\ 2^9 & 512 \\ 2^{10} & 1024 \end{array}$$

$$|\sqrt{5x^2 - 2x - 3} + 6| \geq |\sqrt{5x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + (7 - 2x).$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + (2x - 1) \geq 0 \quad x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x \quad x \geq 0,5$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1 \quad x \in [3; +\infty) \Rightarrow 0$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0 \quad x \in (-\infty; -1] \Leftarrow 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 4 < 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$y+45 \div 4$$

$$1) y-45 = 2^k \quad y+45 = 19 \cdot 2^{x-k} \quad y \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow y = 4k+3$$

$$y+45 = 2^k \quad y+45 = 19 \cdot 2^{x-k} \quad 4k+3-45 = 4k-42 \equiv 2$$

$$1) y = 2^k + 45$$

Если y - чётн

$$2^k + 90 = 19 \cdot 2^{x-k}$$

$$2^k = 0$$

$$2^k = 19 \cdot 2^{x-k} - 90$$

$$19 = (y-45)(y+45)$$

$$k \leq x-k \quad x-k \leq k$$

$$y-45 = 19$$

$$y+45 = 1$$

$$0 \equiv -90 \pmod{2^k}$$

$$k=1$$

$$y^2 - 45^2 = 19$$

$$y^2 = 19 + 45^2$$

$$2 + 90 =$$

y - чётн:

$$\begin{cases} y-45=19 \\ y+45=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+45=19 \\ y-45=1 \end{cases}$$

$$45 \quad 46^2 - 45^2 = 1 \cdot 45 = 45$$

$$\begin{cases} y-45=-19 \\ y+45=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+45=-19 \\ y-45=-1 \end{cases}$$

y - нечётн:

$$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$$y=64$$

$$\begin{cases} y-45=19 \\ y+45=109 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+45=19 \\ y-45=2^x \end{cases}$$

$$y = -26$$

$$109 = 2^x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y - 45 = 19 \cdot 2^k \\ y + 45 = 19 \cdot 2^{x-k} \end{cases}$$

$$y - 45 = 19$$

$$\frac{45}{19} = \frac{2^{x-k}}{2^k}$$

$$y =$$

$$38$$

$$\frac{38}{17} \cdot 19 \cdot 3 = 30 \cdot 17 = 37 \cdot 2$$

$$38$$

$$\begin{cases} y + 45 = 19 \cdot 2^k \\ y - 45 = 2^{x-k} \end{cases}$$

$$y = 19t + 7 = 19 \cdot (2 + 2^k) + 7$$

$$y = 19t + 12 \quad 38 \quad 45 + 19 \cdot 2^k$$

$$19t + 7 - 45$$

$$90 + 19 \cdot 2^k = 2^{x-k}$$

$$19(t - 2) = 19 \cdot 2^k$$

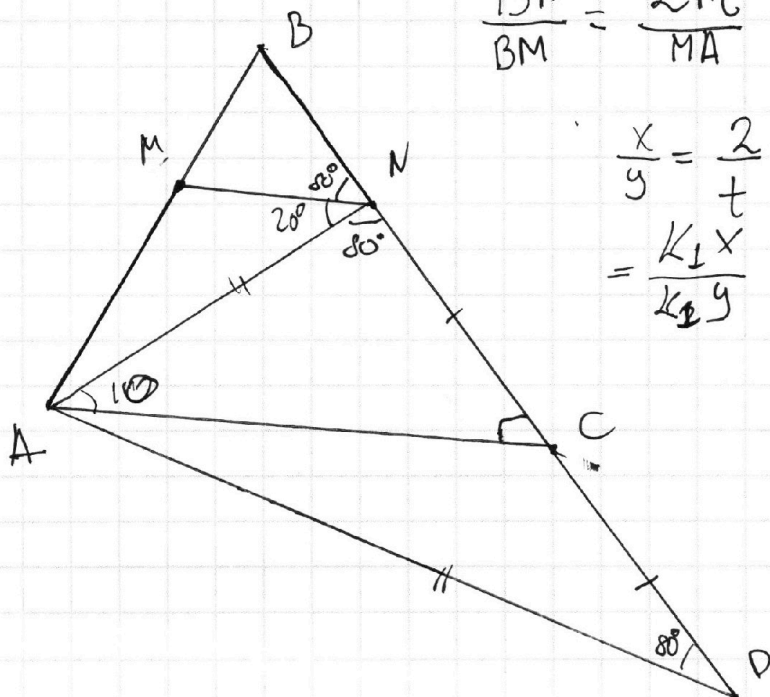
$$45 + 19 \cdot 2^{k-1} = 2^{x-k-1} \quad 26 \cdot 2 = 26 - 19 = 7$$

$$t = 2 + 2^k = 2$$

$$7 = 2^{x-k-1} \quad 13 \quad 32 - 19$$

$$2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 13 \quad 7 \quad 14 \quad 9$$

$$18 \quad 17 \quad 15$$



$$\frac{BN}{BM} = \frac{2NC}{MA} \quad \frac{DN}{BM} = \frac{ND}{MA}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{t} = \frac{2+x}{y+t} = \frac{x+k_1x}{y+k_2y}$$

$$\frac{BN}{BM} = \frac{BD}{AB}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2x - 1 \leq 0 \quad 2x - 1 \geq 0$$

$$x \leq 0,5 \quad x \geq 0,5$$

$$7 - 2x < 0 \quad 7 - 2x \geq 0$$

$$2x > 7 \quad x \leq 3,5$$

$$x > 3,5$$

$$x \in (-\infty; 0,5) \cup [0,5; 3,5] \cup [3,5; +\infty).$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq$$

$$\begin{array}{r} 2025 \overline{) 19} \\ \underline{107} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 70+45=115 \\ 19 \cdot 95 \\ \underline{38} \quad 70+45 \\ 76 \end{array}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq 2x - 1$$

$$\begin{array}{r} -125 \\ \underline{113} \end{array}$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3 + 2x - 1} \geq 0$$

$$x \notin (-1; 3).$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq 1 - 2x$$

$$x \geq 0,5 - \text{верно}$$

$$x^2 - 2x + 3 \geq 1 - 4x + 4x^2$$

$$\begin{array}{r} 2025 \overline{) 5} \\ 405 \overline{) 5} \quad 2025 = 45^2 \\ \underline{81} \quad 34 = \end{array}$$

$$3x^2 - 2x - 2 \leq 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 7$$

$$19 \cdot 2^{2x} + 2025 = y^2$$

$$12 \equiv y^2 = 19k + 12$$

$$x \geq 2$$

$$y^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$1 \equiv y \pmod{2}$$

$$2025$$

$$x \geq 2$$

$$1 \cdot (-1)^x \equiv y^2 \pmod{3}$$

$$\begin{array}{l} y^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ y^2 \equiv 1 \pmod{2} \end{array}$$

$$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$$

2x - решим