



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] При каком наименьшем натуральном n число $n! + (n+1)! + (n+2)!$ делится на 361?

2. [3 балла] Из суммы квадратов пяти последовательных натуральных чисел вычли число 10 и получили куб натурального числа N , большего 6. Найдите наименьшее возможное значение N .

3. [4 балла] Решите неравенство

$$\left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \right| \geq \left| \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \right| + |7 - 2x|.$$

4. [5 баллов] На координатной плоскости рассматриваются ромбы с длиной стороны 5 такие, что абсциссы и ординаты всех четырёх вершин каждого ромба — целые числа из промежутка $[1; 50]$. Сколько существует таких ромбов? Напомним, что квадрат также является ромбом.

5. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2.$$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для множества точек плоскости Oxy , задаваемых уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, наибольшее значение выражения $x^2 - 6x + a$ равно 8.

7. [6 баллов] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MNB = \angle ANC = 80^\circ$. Найдите $\angle CAN$, если известно, что $BN \cdot MA = 2BM \cdot NC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$n! + (n+1)! + (n+2)! : 361.$$

$$\begin{aligned} n! + n! (n+1) + n! (n+1)(n+2) &= \\ = n! (1 + n+1 + n^2 + 3n + 2) &= \\ = n! (n^2 + 4n + 4) &= n! (n+2)^2 \end{aligned}$$

$$361 = 19^2$$

Возможны следующие случаи:

$$n! = 19^2 \quad n! : 19^2 \text{ или } n^2 + 4n + 4 : 19^2 \text{ или}$$

$$n! : 19 \text{ и } n^2 + 4n + 4 : 19.$$

Если $n! : 19^2$. Заменим, что 19 - простое число, поэтому если $n! : 19^2$, то в произведение чисел от 1 до n два раза встречается число

: 19. Наименьшее двоичное : 19 это 19 и 38 \Rightarrow

$\Rightarrow n = 38$, т.е. чтобы $n! : 19^2$, $n \geq 38$. Тогда нужно минимальное, поэтому ближайший случай $n = 38$.

Если $n^2 + 4n + 4 : 19^2$, т.е. это делится на 19, то остаток деления $n^2 + 4n + 4$ кратен 19, то есть наименьшее возможное значение $n^2 + 4n + 4$, меньшее

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

меньшее будущее

Если $n^2 + 4n + 4 : 19^2$, то

$$(n^2 + 4n + 4) \approx (n+2)^2, \text{ т.е.} :$$

$$(n+2)^2 : 19^2$$

\Rightarrow если $(n+2) : 19$, то $(n+2)^2 : 19^2$, то если

$$(n+2) / 19, \text{ то и } (n+2)^2 / 19.$$

$\Rightarrow n+2 = 19 \cdot k \Rightarrow n = 19k - 2$. Мы ищем
минимальное натуральное значение, поэтому
 $k=1, n=17$.

Если $n! : 19$ и $(n^2 + 4n + 4) : 19 \Rightarrow$ аналогично
1-ому случаю из того что $n! : 19 \Rightarrow n \geq 19$, то
У нас есть минимальный корень $n=17$. Значит
минимальное $n=17$.

Ответ: 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

Пусть такая последовательность натуральных чисел это a_1, a_1+1, \dots, a_1+4 . Тогда из условия:

$$a_1^2 + (a_1+1)^2 + (a_1+2)^2 + (a_1+3)^2 + (a_1+4)^2 - 10 = N^3, N > 6.$$

$$a_1^2 + a_1^2 + 2a_1 + 1 + a_1^2 + 4a_1 + 4 + a_1^2 + 6a_1 + 9 + a_1^2 + 8a_1 + 16 - 10 = N^3$$

$$5a_1^2 + a_1(2+4+6+8) + 1+4+6+9+16-10 = N^3$$

$$5a_1^2 + 20a_1 + 20 = N^3$$

$$5(a_1^2 + 4a_1 + 4) = 5(a_1 + 2)^2 = N^3.$$

Пусть $a_1 + 2 = x$. Тогда:

$$5x^2 = N^3. \text{ Т.к. } N^3 > 6, \text{ то } \Rightarrow N^3 > 125$$

и к. 5-простое и $N^3 : 5 \Rightarrow N^3 : 5^3$. Но это

значит, что $5x^2 : 5^3 \Rightarrow x^2 : 5^2$. Проведя

переходу, найдём минимальное x .

$$x = 5^2 \Rightarrow 5^3 = N^3 \Rightarrow N = 5 \text{ - 6-е нечётное}$$

$$x = 2 \cdot 5^2 \Rightarrow 2 \cdot 5^3 = N^3$$

значит $x \geq 5$. Пусть $x = 5^k \cdot t$, где

$t \nmid 5$. Тогда:

$$5^{kt} \cdot (5^k \cdot t)^2 = N^3 \Rightarrow 5^{2k+1} \cdot t^2 = N^3.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5. $2k+1$ и t - взаимопростые. Но тогда
 $\Rightarrow 2k+1 \nmid 3$, т.к. 5 и t - взаимопростые.

$\Rightarrow k=1$, но минимальное $k=1$. Тогда подберём t . оно должно быть таким, чтобы t^2 -было точным кубом. Минимально t , которое находит $t=5$, но при $t=5$, $k=1$, $N=5$, что невозможно. Значит увеличить нужно либо k , либо t .

Если оставим $t=5$, то следующее подх.
 k это 9. Тогда $\exists N = 5^3 = 125$.

Если оставим $k=1$, то тогда следующее t^2 , которое точный куб это $2^3=t$. \Rightarrow
 $\Rightarrow N = 2^2 \cdot 5^{24} = 20$. Очевидно, что $20 < 125$,
и при увеличении t либо k , N возрастает,
значит минимальное $N=20 \Rightarrow x=40$,

$a_1 = 38$.

Ответ: $N=20$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$|\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 6| \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|.$$

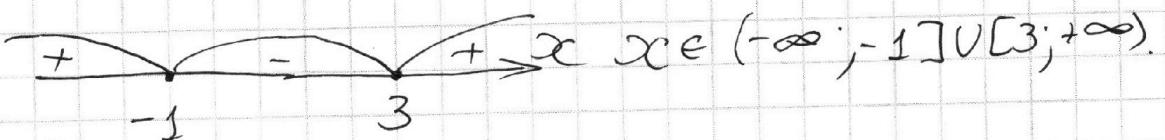
Очевидно, что $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 > 0$. Уберём этот модуль

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|.$$

ОДЗ:

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0.$$

$$(x - 3)(x + 1) \geq 0$$



Разберёмся теперь со знаменателем

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1. \text{ От значение корня } \geq 0.$$

$$\Rightarrow \text{при } 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \geq 0,5 \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0.$$

Теперь определим когда выражение ≤ 0 .

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \leq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \leq 1 - 2x.$$

Тогда если возьмём в квадрат, то мы потеряем знак в $1 - 2x$. Поэтому сравним модули этих чисел



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \leq |1 - 2x| \quad |^2$$

$$x^2 - 2x - 3 \leq (1 - 2x)^2$$

$$x^2 - 2x - 3 \leq 4x^2 - 4x + 1.$$

$$3x^2 - 2x + 4 \geq 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 < 0, \text{ и } 3 > 0 \Rightarrow$$

при всех x неравенство верно. т.е.

модуль $|1 - 2x|$ всегда больше, чем

$\sqrt{x^2 - 2x - 3}$. Это значит, что при $x \leq 3,5$

значение всего $\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \leq 0$.

При этом получим 0/3, получим, что при

$$x \geq 3,5, \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$$

$$x \leq -1, \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 < 0.$$

Задача решена на промежутке когда $7 - 2x \geq 0$ и

$x \leq 3,5; 7 - 2x \geq 0$, при

$x \geq 3,5 \quad 7 - 2x \leq 0$. Выводим 0/3:

если $x \in (-\infty; -1] \cup [3,5; +\infty)$, то $7 - 2x \geq 0$,

если же если $x \in [3,5; +\infty)$, то $7 - 2x \leq 0$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3.

Раскроем модули:

Если $x \in (-\infty; -1]$, то

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x + 1 + 7 - 2x$$

$$2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -4x + 2$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq -2x + 1$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0$$

Мы это уже решали и $x \geq 3$ - не подс.

Если $x \in [3; 3,5]$, то

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 7 - 2x$$

$$0 \geq 0$$

\Rightarrow подойдут все $x \in [3; 3,5]$.

Если $x \in [3,5; +\infty)$.

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 + 2x - 7$$

$$6 \geq 4x - 8$$

$$14 \geq 4x$$

$$x \leq \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$\Rightarrow x = 3,5 - \text{подс.}$$

При этом обознач обозначено все промежутки



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

получу, что $x \in [3; 3,5]$.

Ответ: $x \in [3; 3,5]$.

НГ

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

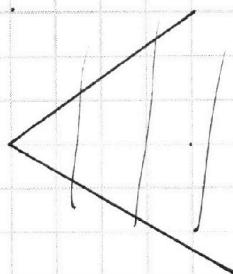
СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

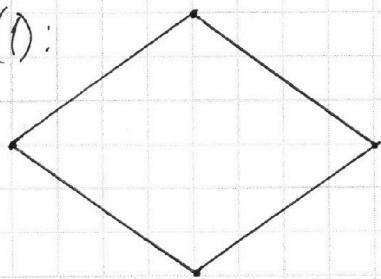
N4.

Рассмотрим все равноб. с длиной стороны

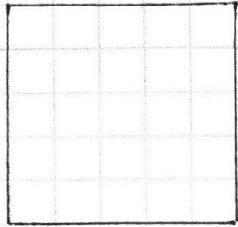
5:



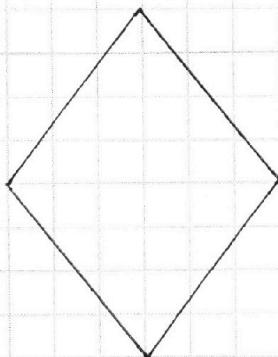
(1):



(2):



(3):



Всего получилось 3 вида. Посчитаем количество способов расположения каждого из видов равноб. и сложим эти варианты.

Начнем с 1-го вида. Будем считать за количество по краиней левой точке.

Максимальное значение по ^{по} ₀₈ этой точки, когда ее $1.50 - 3 = 47$, а минимальное

4. Но 08 ее минимум 1, максимум $50 - 6 = 44$.

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем сколько точек в квадратном поле 43×43 : В ~~каждом~~ ^{из каждого} ряду ~~есть~~ есть ^{всего} ~~разных~~ точек с координатами 44^2 , т.е. ~~всего~~ ^{всего} 44^2 точек, т.е. ~~всего~~ ^{всего} 44^2 . Это очень просто спасет.

Посчитаем для ряда 2 для его краиной левой точки какое ~~всего~~ ^{всего} количество возможных позиций. Он может же как и ~~всегда~~ ^{всегда} быть так же нужно приводящее к 43×43 точкам. Всего 44^2 вариантов.

Теперь посчитаем квадрат. Здесь я буду брать фиксированное положение его верхней краинной левой точки: минимально по $Ox - 1$, максимально по $Ox + 44$:

$50 - 5 = 45$. По Oy минимально $1 + 5 = 6$, максимально 50 . Здесь можно повторить все те самые рассуждения да, конечно же я проводил это на первых двух видах:

I-

I-

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

только квадраты суме 44 и 44 и
сумма уме 45?. Всичие сътамето всичие
получамо $2 \cdot 44^2 + 45^2 = 2 \cdot 44^2 + (44+1)^2 =$
 $= 2 \cdot 44^2 + 44^2 + 90 + 1 = 3 \cdot 44^2 + 91 = 5899.$

$$\begin{array}{r} \times 44 \\ \hline 176 \\ 1760 \\ \hline 1936 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1336 \\ \hline 5808 \end{array}$$

Ответ: 5899

L

L

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$19 \cdot 2^{x_c} + 2025 = y^2$$

$$2025 = 45^2$$

$$19 \cdot 2^x = y^2 - 2025$$

$$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45).$$

Рассмотрим случаи. Если y - чётное, то тогда $(y-45)$ и $(y+45)$ - нечётные, т.е

$2^x = 1$, тогда левая часть должна быть чётной $\Rightarrow x \geq 0$.

$$19 = (y-45)(y+45).$$

$$y^2 - 2025 = 19$$

$y = 2034$, но это не квадрат целого числа, т.к. $2034 \nmid 2$, но $2034 \nmid 4$.

$\Rightarrow y$ - нечётное. Рассмотрим делимость следок на 4. Если $y-45 \mid 4$, то

$$y \equiv 45 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow y = 4t + 1$$

но тогда $y+45 \equiv 4t+46 \equiv 2$. Если $y+45 \mid 4$, то

$$y \equiv -45 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow y = 4q + 3, \text{ но тогда } y-45 =$$

$$= 4q - 42 \equiv 2 \pmod{4}. \text{ Таким образом если одна из следок является } k, \text{ то степень } 2^k, \text{ где}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$k \geq 2$, то вторая задача решена только 2.

Но при этом в задаче стояло сде
сделки : 2.

$$19 \cdot 2^x = (y-45)(y+45)$$

$19 \cdot 2^x$ - единственное.

\Rightarrow рассмотрим случаи

$$(1) \begin{cases} y-45 = 19 \cdot 2 \\ y+45 = 2^{x-1} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y-45 = -19 \cdot 2 \\ y+45 = -2^{x-1} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y-45 = 2^{x-1} \\ y+45 = 19 \cdot 2 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} y-45 = -2^{x-1} \\ y+45 = -19 \cdot 2 \end{cases}$$

(1):

$$y = 38 + 45 = 83.$$

$$y+45 = 83 + 45 = 128 = 2^7 = 2^{x-1} \Rightarrow x = 8$$

$$x = 8, y = 83$$

$$(2): y = 45 - 38 = 7$$

$$y+45 = 7 + 45 = 52 = -2^{x-1} - x - \text{неделое}$$

$$(3): y = 38 - 45 = -7$$

$$y-45 = -7 - 45 = -52 = 2^{x-1} - x \text{ не целое}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(4) :

$$y = -38 - 45 = -83$$

$$-83 - 45 = -128 = -2^{x-2} \Rightarrow x = 8$$

$$x = 8, y = -83$$

Ответ: $(8; -83)$, ~~$(8; 83)$~~ .

РГ.

Х3



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NB

$x^2 - 6x + a$ - парабола, ветви которой направлены вверх. Значит т.к. x -ограничен, то максимумы будут в концах ветвей параболы. Это значит, что наибольшее значение $x^2 - 6x + a$ достигается при максимальном x , т.к. при минимальном x . Но условие:

$x^2 + y^2 = a^2$ - уравнение этого многочленса с центром в $(0; 0)$. окружность с радиусом $|a|$. Это значит, что максимальное и минимальное значение x это a и $-a$ соответственно. Положим $b = x^2 - 6x + a$.

$$x^2 - 6a + a = \frac{a}{2}x^2 - 5a, x=a$$

$$x^2 + 6a + a = \frac{a}{2}x^2 + 7a, x=-a.$$

При $a > 0$ максимум будем

$\frac{a}{2}x^2 + 7a$, при $a < 0$ максимум это $\frac{a}{2}x^2 - 5a$.

L

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№

Решение уравнения:

$$\alpha^2 + 7\alpha = 8, \alpha > 0.$$

$$\alpha^2 + 7\alpha - 8 = 0$$

$$(\alpha+8)(\alpha-1) = 0$$

$$\alpha = \begin{cases} -8 \\ 1 \end{cases} \text{ или } \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\alpha^2 - 5\alpha = 8$$

$$\alpha^2 - 5\alpha - 8 = 0, \alpha < 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 8 = 25 + 32 = 57$$

$$\alpha_1 = \frac{5 + \sqrt{57}}{2} > 0, \alpha_2 = \frac{5 - \sqrt{57}}{2} \text{ - недопустим}$$

$$\text{т.е. } \alpha \text{ надо } 1, \text{ надо } \alpha = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$$

Ответ: 1 или $\frac{5 - \sqrt{57}}{2}$.

L

L

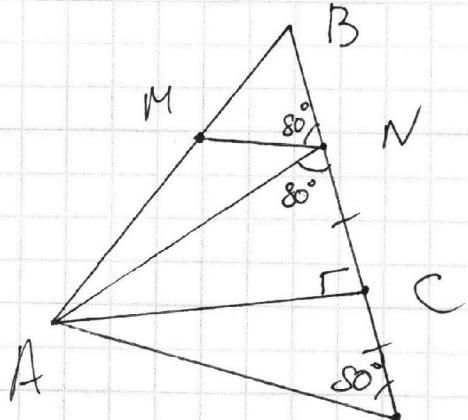
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$BN \cdot MA = 2BM \cdot NC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{NC} \cdot \frac{BN}{BM} = \frac{2NC}{MA}$$

Удвоим строку NC
по т. д. получим, что
 $2NC = CD$. Тогда

перепишем выше отношение:

~~$$\frac{BN}{BM} = \frac{ND}{MA} \neq \frac{ND}{MA} \text{ (не подходит)}$$~~

М.к. убеди $\frac{BN}{BM} = \frac{ND}{MA}$, но и $\frac{ND+BN}{BM+MA} = \frac{BN}{BM} =$
 $= \frac{ND}{NA}$. Но $\frac{ND+BN}{BM+MA} = \frac{BD}{BA}$. М.е.

$$\frac{BN}{BM} = \frac{BD}{BA} \Rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle MND.$$

$\Rightarrow \angle ADC = 80^\circ \Rightarrow \triangle AND - \text{р.д.}, \text{но } AC - \text{биссектриса}$

$\Rightarrow \text{она есть и высота} \Rightarrow \angle ACN = 90^\circ$.

Ответ: 90° .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 =$$

$$\begin{aligned} 8^2 \cdot 5^2 \cdot 5 &= \\ &= 2^6 \cdot 5^3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2039 \\ 1017 \\ 113 \\ \hline 27 \end{array}$$

5

$$\begin{aligned} &\left(\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right) + \left(\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right)^2 - 5 \left(\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right) \\ &\quad \left(\frac{5-\sqrt{57}}{2}\right) \left(\frac{-5-\sqrt{57}}{2}\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{57-25}{2} = \frac{32}{4} = 8$$



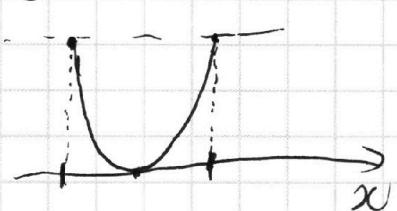
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 = a$$

$$x^2 - 6x + a$$



$$x = -a, \quad x = +a$$

$$a > 0$$

$$a^2 + 7a$$

$$a^2 + 5a$$

$$a^2 - 5a < a < 0$$

$$a^2 + 7a > a^2 - 5a$$

$$7a > -5a$$

$$a^2 + 7a = 8$$

$$a^2 + 7a - 8 = 0$$

$$(a + 8)(a - 1) = 0$$

$$a = -8$$

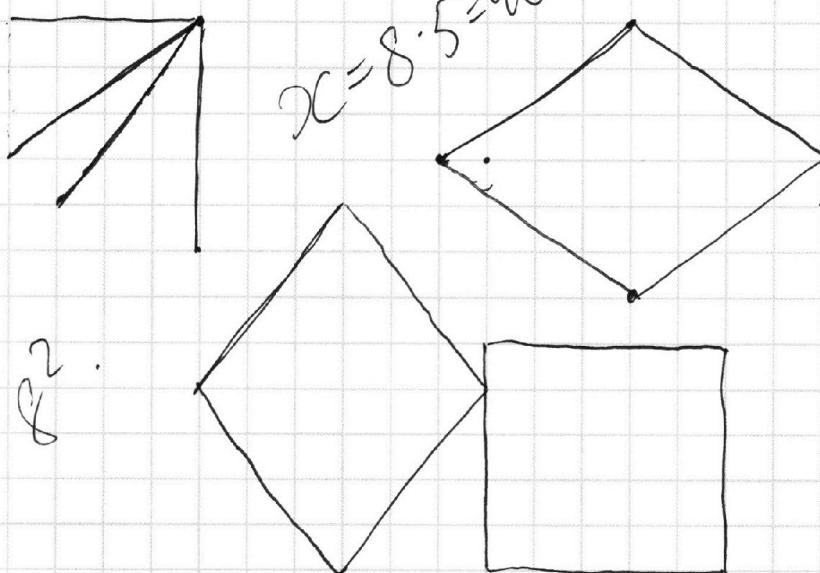
$$\textcircled{a = 1}$$

$$a^2 - 5a = -8$$

$$a^2 - 5a + 8 = 0$$

$$\textcircled{D = 25 - 4 \cdot 8}$$

$$x = 8.5^\circ$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$5a_1^2 + 20a_1 + 20 = N^3$$

$$5(a_1^2 + 4a_1 + 4) = N^3$$

$\begin{array}{c} 4 \\ \times 4 \\ \hline 16 \\ :5 \\ 3 \end{array}$ $\begin{array}{c} 1 \\ \times 5 \\ \hline 5 \\ :5 \\ 1 \end{array}$ $N = 10$

200
1000

$$a_1 + 4a_1 + 4 = 200$$

$$a_1 + 4a_1 - 196 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 196 = 92 \quad \begin{array}{r} \cancel{16} \\ \cancel{16} + \cancel{16} \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{14} \\ \cancel{14} + \cancel{14} \\ \hline 2 \end{array} \quad 14^2 = 2^2 \cdot 7^2$$

$$= 16(1+49)$$

$$5(a_1 + 2)^2 = N^3$$

$$\frac{N^3}{5} = 25c^2 \quad N^3 = 5^3 c^3$$

$$\begin{array}{c} 10 \\ 1000 \\ \cancel{15^3} \end{array} \neq \begin{array}{c} 5 \\ 500 \\ \cancel{15^2} \end{array}^2$$

$$8000$$

$$1600$$

$$10^0 \quad 40$$

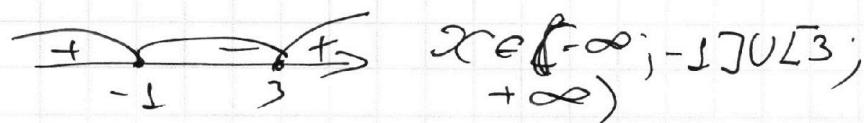
$$\begin{aligned} 5 \cdot 15^2 &= 3^2 \cdot 5^3 \\ 5 \cdot 20^2 &= 4^2 \cdot 5^3 \\ 5 \cdot 25^2 &= 5 \cdot 5^4 = 5^5 \\ 5 \cdot 125^2 &= 5 \cdot 5^6 \\ 5 \cdot (5^4)^2 &= 5^9 \\ \boxed{N = 125}, \end{aligned}$$

$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6| \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1| + |7 - 2x|$$

$$O13: x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$$D \neq (x-3)(x+1) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N 5

$$\begin{aligned} n! + n! \cdot (n+1) + n! (n+1)(n+2) &= \\ = n! (1 + n+1 + (n+1)(n+2)) : 361 & \\ n = 38. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} -361 / 17 \\ \underline{-34} \quad \underline{2} \\ \underline{21} \end{array} \quad \begin{array}{r} -361 / 19 \\ \cancel{-19} \quad \cancel{1} \\ \cancel{2} \cancel{1} \end{array} \quad \begin{array}{r} -361 / 19 \\ \underline{19} \quad \underline{1} \\ \underline{17} \quad \underline{1} \\ \underline{17} \end{array} \quad \begin{array}{r} 80 + 81 \\ 19^2 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ 190 \\ \hline 361 \end{array}$$

$$1 + n + 1 + n^2 + 3n + 2 : 361$$

$$n^2 + 4n + 2 : 361 \quad (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4.$$

$$(n+2)^2 : 361 = 19^2$$

$$n+2 : 19 \quad n \neq 17,$$

N 2

$$\alpha_1, \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_1 + 4. \quad N > 6.$$

$$\alpha_1^2 + (\alpha_1 + 1)^2 + \dots + (\alpha_1 + 4)^2 - 10 + N^3 = N^3$$

$$S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+1)}{6} \quad \begin{matrix} 1 & 4 & 9 & 16 \end{matrix}$$

$$4 \alpha_1^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 1 + \alpha_1^2 + 4\alpha_1 + 4 + \dots + \alpha_1^2 + 8\alpha_1 + 16 =$$

$$= 5\alpha_1^2 + 20\alpha_1 + 30 - 10 = N^3$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y - 45 = 38 \\ y + 45 = 2^{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 45 = 38 \\ y - 45 = 2^{x-1} \end{cases}$$

$$y = +\frac{83}{55} \quad y = 83$$

$$x = 8$$

$$y - 45 = -19$$

$$y + 45 = 2^x$$

$$y = 38 - 45 = -$$

$$\begin{array}{ll} 2^1 & 2 \\ 2^2 & 4 \\ 2^3 & 8 \\ 2^4 & 16 \\ 2^5 & 32 \\ 2^6 & 64 \\ 2^7 & 128 \\ 2^8 & 256 \\ 2^9 & 512 \\ 2^{10} & 1024 \end{array}$$

$$|\sqrt{x^2 - 2x - 3} + c| \geq |\sqrt{x^2 - 2x - 3 + 2x - 1}| + |c|$$

$$+ |7 - 2x|.$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x - 1 \geq 0 \quad x \in [3; +\infty)$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 1 - 2x \quad x \geq 0,5$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 4x^2 - 4x + 1 \quad x \in (3; +\infty) \geq 0$$

$$3x^2 - 2x + 4 \leq 0 \quad x \in (-\infty; -1] \leq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 4 - 4 < 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45)$$

$$1) y - 45 = 2^k \quad y + 45 = 0 \cdot 2^{x-k}$$

$$y + 45 = 2^k \quad y + 45 = 19 \cdot 2^{x-k}$$

$$y + 45 : 4 \quad y = 3 \Rightarrow y = 4k + 3$$

$$4k + 3 - 45 =$$

$$= 4k - 42 \stackrel{?}{=} 2$$

$$1) y = 2^k + 45 \quad \text{если } y - \text{цел}$$

$$2^k + 90 = 19 \cdot 2^{x-k} \quad x = 0$$

$$2^k = 19 \cdot 2^{x-k} - 90 \quad 19 = (y - 45)(y + 45)$$

$$k \leq x-k \quad x-k \leq k \quad y - 45 = 19$$

$$y + 45 = 1$$

$$0 \stackrel{?}{=} -90 \quad k = 1$$

$$y^2 - 45^2 = 19$$

$$y^2 = 19 + 45^2$$

y -цел:

$$\begin{cases} y - 45 = 19 \\ y + 45 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 45 = 19 \\ y - 45 = 1 \end{cases}$$

$$45 - 46^2 - 45^2 =$$

$$= 1 \cdot 45 = 45$$

$$\begin{cases} y - 45 = -19 \\ y + 45 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 45 = -19 \\ y - 45 = -1 \end{cases}$$

y -нечел:

$$19 \cdot 2^x = (y - 45)(y + 45).$$

$$\begin{cases} y = 64 \\ y - 45 = 19 \\ y + 45 = 128 \cdot 2^x \end{cases} \quad \begin{cases} y + 45 = 19 \\ y - 45 = 2^x \end{cases} \quad y = -26$$

$$109 = 2^x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y - 45 = 19 \cdot 2^k \\ y + 45 = 19 \cdot 2^{x-k} \end{cases}$$

$$y - 45 : 19 \quad y = 38$$

$$\frac{45}{19} = 2^{\frac{k}{19}} = 2^{\frac{38}{19}}$$

$$19 \cdot 3 = 30 \neq 37 - 2$$

$$\begin{cases} y + 45 = 19 \cdot 2^k \\ y - 45 = 2^{x-k} \end{cases}$$

$$y = \underbrace{19t + 7}_{3^2 \cdot 2 \cdot 5} = 19 \cdot (2 + 2^k) + 7$$

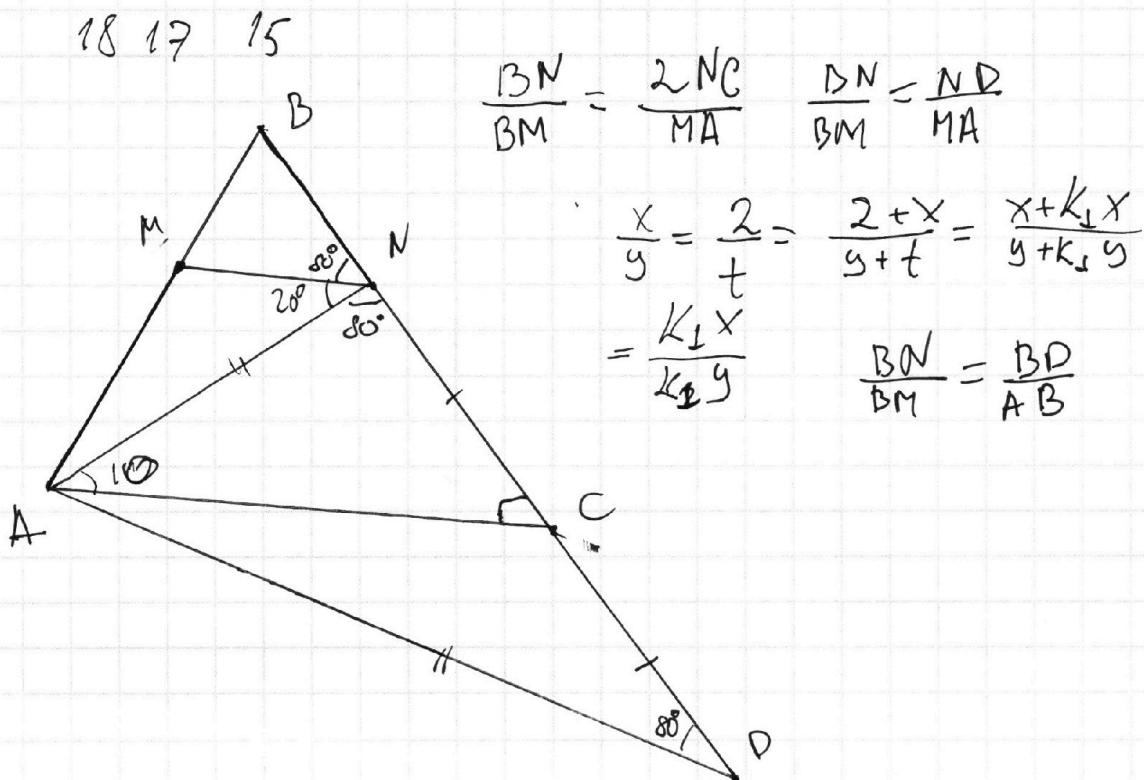
$$y = 19t + 12 \quad 28$$

$$90 + 19 \cdot 2^k = 2^{x-k}$$

$$19(t-2) = 19 \cdot 2^k \quad 45 + 19 \cdot 2^{k-1} = 2^{x-k-1}$$

$$t = 2 + 2^k = 2 \cancel{19} \quad 7 = 2^{x-k-1} \quad 13 \quad 26 - 19 = 7$$

$$2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 13 \quad 7 \quad 14 \quad 9$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$2x - 1 \leq 0 \quad 2x - 1 \geq 0$$

$$x \leq 0,5 \quad x \geq 0,5$$

$$7 - 2x < 0$$

$$7 - 2x \geq 0$$

$$2x > 7$$

$$x \leq 3,5$$

$$x \geq 3,5$$

$$\text{?} \quad \text{?} \quad (-\infty; 0,5) \cup [0,5; 3,5] \cup (3,5; +\infty).$$

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + 6 \geq -\frac{70+45}{107} = \frac{115}{107} \quad (9. \quad 95)$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq 2x - 1 \quad -\frac{125}{113} \quad 38 \quad 70+45 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq 2x - 1 \quad x \notin (-1; 3).$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq 2x - 1 \quad x \geq 0,5 - \text{без ко}$$

$$x^2 - 2x + 3 \geq 4x^2 - 4x + 1 \quad 2025 = 45^2$$

$$3x^2 - 2x - 2 \leq 0 \quad 405 \quad 81 \quad 34 =$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 7$$

$$19 \cdot 2^x + 2025 = y^2 \quad x \geq 2$$

$$12 \equiv y^2 = 19k + 12$$

$$1 \equiv y^2$$

$$2025$$

$$y^2 \equiv 1$$

$$1 \cdot (-1)^x \equiv y^2 \quad x \geq 2 \quad (9 \cdot 2^x) = (y-45)(y+45)$$

x - четн

$$y^2 \equiv 1$$

$$y^2 \equiv 1$$