



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ? *97 1?*

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x. \quad \text{наблюдаю}$$

6105...

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$. *сложно, но можно. <целое>*

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases} \quad \text{2 опре-ти}$$

имеет ровно 2 решения. *($\Rightarrow$) все >0 кроме каждой из 2 скобок. 99*

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

||

$$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}$$

аналогично

$$bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

||

$$ac \cdot ab \cdot bc = kmn \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc^2 = kmn \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

||

$$abc^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$$

||

$$abc : 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$ac : 7^{39}$$

||

$$abc : 7^{39}$$

||

$$abc : (2^{28} \cdot 7^{39})$$

||

$$abcmin = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

- любое натуральное деление
мало не будет делиться

на него кратно (для 0 не
называется)

Ответ: $abcmin = 2^{28} \cdot 7^{39}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b} - \text{число Кратчайших}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{НОД}(a; b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} \quad \text{т.к. } \text{НОД}(a; b) = 1$$

$$\cancel{(a+b)^2} : \cancel{a+b}$$

$$\cancel{a+b} \text{ НОД}(a+b; (a+b)^2-9ab) = m$$

$$m = \text{НОД}(a+b; 9ab) \quad \left(\begin{array}{l} \text{по алгоритму} \\ \text{Евклида} \end{array} \right)$$

$$9ab : a$$

$$a+b \not\propto a \quad \text{т.к. } \text{НОД}(b; a) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$ab \not\propto \text{на любой из делителей } a \quad \text{по аналогии}$$

$$a+b \not\propto \text{ни на любой из делителей } b$$

$$\Downarrow$$

$$\text{т.к. } \max \text{НОД}(9ab; a+b) = 9$$

можно привести пример

$$a=4, b=5$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{16+25-140} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

$$\text{Ответ: } m_{\max} = 9$$

пояснение
 $9ab \nmid a, b$
 помимо a, b и
 их кратчайших
 делителей
 т.к. $\text{НОД}(a, b) = 1$
 и $9 - \text{НОД}(a, b)$
 — не делит



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1 + 1 - 9x} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$1 - 9x = b$$

ОДЗ

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \Rightarrow a+b > 0$$

$$a+b - 2\sqrt{a(a+b)} + a - b^2 \geq b$$

$$2a + b - b^2 = 2\sqrt{a(a+b)}$$

$$2a + b - b^2 \geq 0$$

$$4a^2 + 4ab = (2a + b - b^2)^2$$

$$4a^2 + 4ab = 4a^2 + 2ab - 2ab^2 + 2ab + b^2 - b^3 + 2ab^2 + b^3 - b^4$$

$$4ab^2 = b^2 - 2b^3 + b^4$$

$$4a = 1 - 2b + b^2$$

$$4a = (b-1)^2$$

$$b-1 = 2\sqrt{a}$$

$$12x^2 + 6x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 144 + 16 \cdot 69 = 16 \cdot 78$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

ответ

7. а ОДЗ не был

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

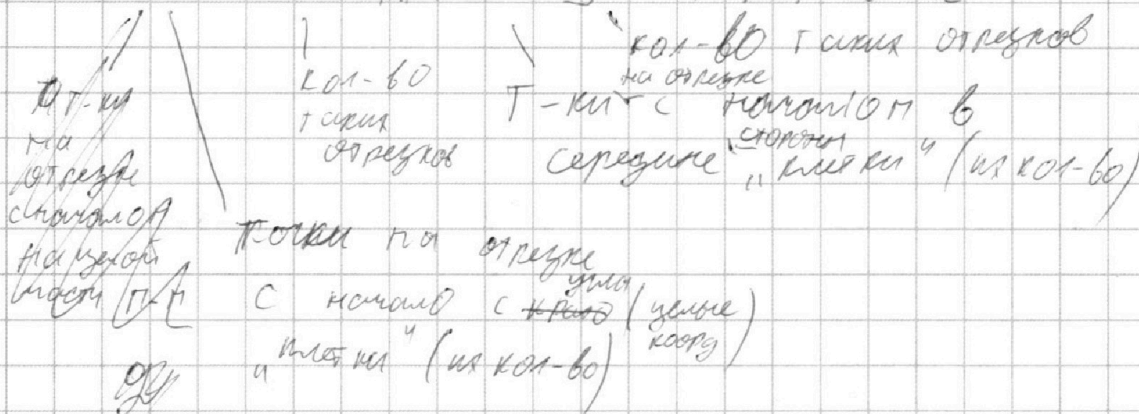
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5 - Прого 14 (и 13)

внутри такого пар-ма точек с целыми координатами.

14 • 10 и 13 • 9 таких точек



для каждой из Т-к с

началом в углу клетки можно поставить вторую

те же 14 Т-к на // отрезке с началом (в узле)

— | — с началом в середине стороны

клетки можно поставить вторую те же 13

Т-к на // отрезке с началом (в узле)



$$\text{всего таких пар } 10 \cdot 14^2 + 9 \cdot 13^2 = 9 \cdot 169 + 1960$$

Ответ: 3487 пар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~5. - 17. 10. 10. 10. 10. 10. 10.~~

$$2 \times 2^2 - 2x_1 + y_1 - y_2 = 14$$

$$14 + 2x_1 + y_1 = 2 \times 2 + y_2: \quad - \text{ для каждой } T\text{-ки } (x_i, y_i) \text{ это - прямая,}$$

прямая в уравнении
этой прямой $a = -2$

в вершине n -мис $OPQR$

стороны PO и QR задаются прямой

$$PO: y = -2x$$

$$QR: y = 32 - 2x$$

$\Downarrow$

они $\parallel$ той прямой, получая для каждой T -ки

запомним также, что каждая точка на прямой, полученной от одной из точек этой прямой прямой также по ~~то~~ заданному уравнению имеет ту же самую прямую в качестве полученной

расстояния м/у этими прямыми по оси $x = 16$

$\Downarrow$

для каждой T -ки

в n -мис $PXYO$ есть участок такой прямой, лежащий внутри/на стороне n -мис

$$X = (-4; 26) \quad Y = (9; 0) \quad \text{т.к. } xQ = yR = 7$$

$$\begin{aligned} (y_1 = y_2) \\ \Downarrow \\ (x_1 - x_2) = 16 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

α - угол $\angle C$

$O_1 O_2$ - высота $\triangle O_1 C D$

$O_1 H$ - высота $\triangle O_1 C D$

тогда $\triangle O_1 C D$ - прямоугольный

$\Downarrow$

$$O_1 H = O_1 C - O_2 D = 3$$

$$\Downarrow$$
$$\tan \alpha = \frac{O_1 O_2}{O_2 D} = 4$$

$$\Downarrow$$
$$\alpha_{3,4} = \pm 4$$

Ответ: $\alpha = [-4; -2,4; 2,4; 4]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ ((x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16)) \leq 0 \end{cases}$$

Какая из скобок ^{неравенства} ~~уравнения~~ если ее приравнять к 0 -
- окр-ть, радиус π/y и центр $m = 12$, радиус 4 и 4
свойство

(x, y) - решение системы, если оно
Они не пересекаются

Принадлежит прямой $ax + y - 8b = 0$ и одной
из окр-тей (если т-ка внутри окр-ти - скобка ≤ 0)
на ней - $= 0$
вне нее - > 0

Решения всего 2 $\Rightarrow$ если т-ка лежит в окр-ти,
то прямая т-ка - сек и все т-ки на ней -
- решения $\leq$ $\times$

т-ка лежит на окр-ти (каждой)

Прямая - общая касательная
к окружностям (таких будет 2)

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ ax_2 + y_2 - 8b = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 = 1 \\ x_2^2 + (y_2 - 12)^2 = 16 \\ x_2^2 + (8b/ax_2 - 12)^2 = 16 \\ x_1 + (8b/ax_1)^2 = 1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x^2 - 1)(x^2 - 2)$$

$$36 - 24 = 12$$

$$x = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = 14$$

$$2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = 14$$

$$2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = 14$$

Q

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$

$$2x_2 - 2x_1 - 14 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab \cdot bc \cdot ac$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = m \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot n \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot l \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc^2 = mnk \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc : 2^{18} \cdot 7^{39}$$

$$ab : bc : 7^{29}$$

$$a : c : 7^{39}$$

$$\Sigma ab \cdot bc : 7^{39}$$

$$a = 2^{15} \cdot 7^{11}$$
$$c = 2^{17} \cdot 7^{38}$$

$$a = 2^{14} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^4$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$18 \cdot 7 = 126$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = \text{НОД}(a+b, -9ab)$$

$$9ab : a; b; 9$$

$$a^2 + b^2 : a; b$$

$$12^2 = (3 \cdot 4)^2 = 16 \cdot 9$$

$$\Rightarrow a+b \text{ н.д. } : 1 \cdot 3 \cdot 9$$

$$(1-9)^2 = 1 - 18 \cdot 8 \cdot 1$$

$$18 \cdot 8 = 144$$

$$9$$

$$a = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a+b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} = b$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+by-8b=0 \end{cases}$$

$$2(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0$$

1
если $=0$,
то $ax-by$
ОКР

1
если $=0$, то
 $ax-by$
окружности

если 1-я внутри окр, то скобка < 0

если на окр, то эта скобка $= 0$

если вне, то скобка > 0

эти окр-ти не пересекаются (расст м/у ними 12,
а их радиусы - 1 и 4 соответственно)

решения всего 2

решение - если 1-я лежит внутри окр-ти
или на ней.

$x(y)$ - из $ax-by$

решения всего 2 - исконые уравнения -

- рас. сразу к 2 окр-тям (из радиусов 4)
найдем а в этом случае:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 1 \\ x_2^2 + (12-y_2)^2 = 16 \\ ax_1 + by_1 - 8b = 0 \\ ax_2 + by_2 - 8b = 0 \end{cases}$$