



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{14} 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} 7^{14}$$

$$ac: 2^{20} 7^{37}$$

$$\Rightarrow \text{минимальное } abc = 2^k 7^n$$

$$\text{тогда } ab = 2^{14} 7^{10}, bc = 2^{17} 7^{14}, ac = 2^{20} 7^{37}$$

т.к. это минимальное возможное
произведение

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 2^{20+17 \cdot 2} 7^{10+14 \cdot 2+37 \cdot 2} = 2^{10 \cdot 2+17 \cdot 2} 7^{10+28 \cdot 2} = 2^{27 \cdot 2} 7^{32 \cdot 2} = (2^{27} 7^{32})^2$$

$$abc = 2^{27} 7^{32}$$

Ответ: $2^{27} 7^{32}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. т.к. m — наибольшее и $a+b : m$, $a^2 - 6ab + b^2 : m$
 $\Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2)$

2. Найдем $\text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = 8m$

$$\begin{array}{r|l} a^2 - 6ab + b^2 & a+b \\ - a^2 + ab & \\ \hline - 7ab + b^2 & \\ - 7ab - 7b^2 & \\ \hline 8b^2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow m = \text{НОД}(a$$

$$8m = \text{НОД}(a+b; 8b^2)$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} : a = kb + l$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a, b^2) = 1$$

$$\text{НОД}(a+b, b^2) = 1 \Rightarrow \text{максимальный } m = \text{НОД}$$
$$m = \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = 8$$

3. Проверим такие a, b : $a = 5, b = 3$

$$a+b = 8$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = 25 - 6 \cdot 5 + 9 = (a-b)^2 - 4ab = 4 - 4 \cdot 15 =$$
$$= 4(-14) = -8 \cdot 4$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = 8$$

Ответ: $m = 8$

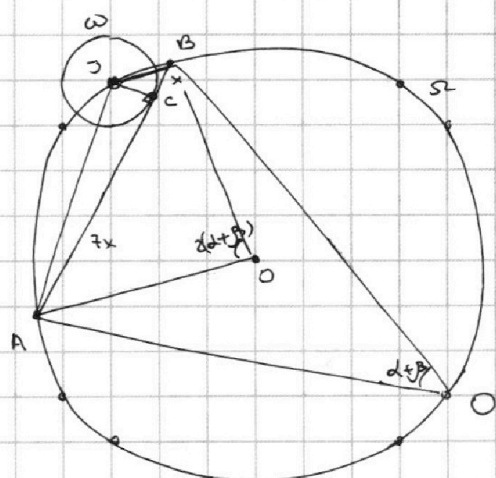
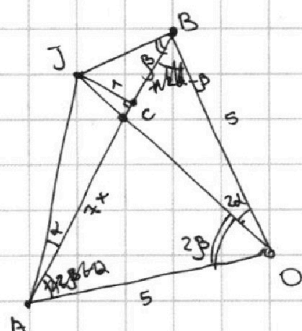
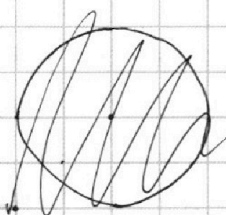
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



1. AB - кас $\Rightarrow \angle BCJ = \angle ACJ = \pi/2$
2. $2\angle BAJ = \angle BOJ = 2\alpha$ (впис. и центр. омер на $\widehat{BJ}$)
 $2\angle ABJ = \angle JOA = 2\beta$ (впис. и центр. омер на $\widehat{AJ}$)
3. $AO = OB = 5$ - радиус Ω
 $JO = 1$ - радиус ω
 $JO = 5$ - радиус Ω
 $\Rightarrow \triangle JOA \sim \triangle BOJ - p\delta \Rightarrow \angle OJB = \angle OBJ, \angle JAO = \angle OJA$
4. $\triangle ABO' -$ впис. в $\Omega \Rightarrow \frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)} = 10$

$$\begin{aligned} \triangle JCB: \quad \text{tg } \beta \cdot x &= \text{tg } \alpha \cdot 7x \Rightarrow \text{tg } \beta = 7 \text{tg } \alpha \\ \triangle JAC \quad \sin \beta \cos \alpha &= 7 \sin \alpha \cos \beta \\ \Rightarrow AB &= 10 (\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta) = 80 \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

5. $\triangle JAC: 1 = JA \sin \alpha$, $\triangle JBA -$ впис. в Ω
 $\Rightarrow JA = 10$

$$\begin{aligned} \Rightarrow JA &= 10 \sin \beta = 10 \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \sin \beta \\ 1 - \frac{JA^2}{100} &= \cos^2 \beta \Rightarrow \frac{100 - JA^2}{100} = \cos^2 \beta \end{aligned}$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{100 - JA^2}}{10} = \frac{\sqrt{100 - \sin^2 \alpha}}{10} = \frac{\sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1}}{10 \sin \alpha}$$

3/12

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6. (продолжение)

$$\begin{aligned} 1 + 48\cos^2\alpha &= 4900\cos^2\alpha - 4900\cos^4\alpha \\ 4900\cos^4\alpha - 4852\cos^2\alpha + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha &= \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha &= \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$AB = \frac{8}{7\operatorname{tg} \alpha} = 8\sqrt{100\sin^2 \alpha - 1}$$

$$7\operatorname{tg} \alpha \sqrt{100\sin^2 \alpha - 1} = 1$$

$$\frac{7^2 \sin^2 \alpha (100\sin^2 \alpha - 1)}{1 - \sin^2 \alpha} = 1$$

$$(7 \cdot 10)^2 \sin^4 \alpha - 7^2 \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$70^2 \sin^4 \alpha - 48\sin^2 \alpha + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 6^2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 70^2 = 2^8 \cdot 3^2 + 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = \\ &= 2^4 (2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2) \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{48 \pm \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 70^2}, \quad \sin^2 \alpha \in [0; 1]$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{12 \pm \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{12 + \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2}$$

$$AB = 8 \sqrt{100 \left(\frac{12 + \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2} \right) - 1}$$

$$AB = \frac{8}{7} \sqrt{424 + \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2} - 49} = \frac{8}{7} \sqrt{\sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2} - 25}$$

$$2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 160 - 16 = 144$$

$$5^2 \cdot 7^2 = 25 \cdot 49 = 1250 - 25 = 1225$$

$$\Rightarrow 2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2 = 1369 = 37^2$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ 25 \overline{) 1369} \\ \underline{80} \\ 569 \\ \underline{518} \\ 510 \\ \underline{510} \\ 0 \end{array}$$

$$AB = \frac{8}{7} \sqrt{\sqrt{1369} - 25}$$

$$\text{Ответ: } AB = \frac{8}{7} \sqrt{\sqrt{1369} - 25}$$

5/12



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

42 62

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

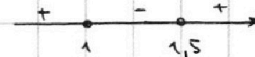
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad \text{ОДЗ: } (x-1)(2x-3) \geq 0$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$



$$2. \begin{aligned} a &= 2x^2 + 2x + 1 \quad | \Rightarrow a+b = 2x^2 - 5x + 3 \\ b &= 2 - 7x \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &\in \mathbb{R}(-\infty; 1] \cup [1.5; +\infty) \\ 2x^2 + 2x + 1 &> 0, \text{ м.к.} \\ D < 0, D > 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \quad | \uparrow^2 \text{ м.к. по ОДЗ } a+b \geq 0, a \geq 0$$

$$a+b+a-2\sqrt{a^2+ab} = b$$

$$a = \sqrt{a^2+ab} \quad | \uparrow^2, \text{ м.к. по ОДЗ } a+b \geq 0, a \geq 0 \Rightarrow a^2+ab \geq 0$$

$$a^2 = a^2 + ab$$

$$ab = 0$$

$$3. ab = 0 \Rightarrow (2x^2 + 2x + 1)(2 - 7x) = 0$$

$$* 2x^2 + 2x + 1 \geq 0, \text{ м.к. } D < 0 \text{ и } D > 0$$

$$\Rightarrow 2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} < 1 \Rightarrow \text{подходит по ОДЗ}$$

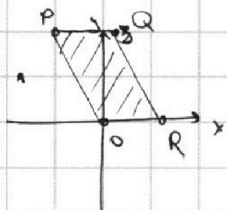
Ответ: $x = 2/7$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. $O(0,0)$
 $P(-12;24)$
 $Q(3;24)$
 $R(15;0)$



Зададим прямые,
которые ограничивают
пар-ю

$$PQ: y = 24$$

$$OR: y = 0$$

$$PO: y = -2x$$

$$RQ: y = -2x + 30$$

2. Зададим условие того, что точка $M(x,y) \in PQRO$

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 24 \\ -2x \leq y \leq -2x + 30 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y \in [0; 24] \\ 2x + y \in [0; 30] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y \in [0; 24] \\ x \in [0; 15] \\ 2x + y \in [0; 30] \end{aligned}$$

$$3. 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12, \quad x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

$$y_1, y_2 \in [0; 24]$$

$$2x_1 + y_1, 2x_2 + y_2 \in [0; 30]$$

$$\Rightarrow 2x_1 + y_1 + 12 = 2x_2 + y_2 \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1 + y_1 &\in [0; 18] \\ 2x_2 + y_2 &\in [12; 30] \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } y_i \in [0; 24] \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1 &\in [0; 18] \Rightarrow x_1 \in [0; 9] \\ 2x_2 &\in [0; 30] \Rightarrow x_2 \in [0; 15] \end{aligned}$$

4. т.к. $x_1 \in [0; 9]$ Рассмотрим все значения x_1
 $\Rightarrow x_1 = 0$

3. $y + 2x = k$ - задает прямую $\parallel PO \parallel QR$,
которая пересекает OR в $(k/2; 0)$

$$\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = (2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = k_2 - k_1 = 12$$

Заметим, что $k \in [0; 30]$, т.к. крайнее
прямые PO и QR и $k_2 - k_1 = 12$

$\Rightarrow$ пар $(k_2; k_1)$ всего 18 штук

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4. Для каждой $k = y + 2x$

Существует всего 12 точек / удовлетворяющих условию, т.к. $y \in [0, 24]$

существует всего 12
точек координат, которых
целые числа

т.к. $\frac{k-y}{2} = x$

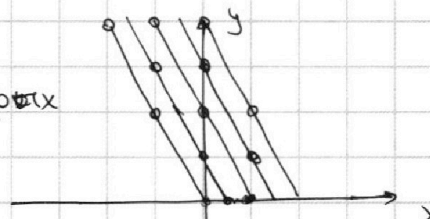
⇒ если при $y, x \in \mathbb{Z}$

то при $y_1 + 2k, n \in \mathbb{Z} \quad x \in \mathbb{Z}$

а при $y_1 + 2n - 1, n \in \mathbb{Z}, x \notin \mathbb{Z}$

~~то $x \notin \mathbb{Z}$~~

2) нам подходит по условию все $y \in \mathbb{Z}$



5. Подходящих нам пар (k_2, k_1) всего 18 (н.3)

Для каждой k можно найти 12 (y, x) пар (н.4)

2) пару (k_2, k_1) можно задать 12^2 парами
 (x, y) (различными)

Всего таких пар 18 2) всего пар $(x, y) = 12^2 \cdot 18$

$$n = 12^2 \cdot 18 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^5 = 6^4 \cdot 2 = 36^2 \cdot 2 =$$

$$= 2376 \cdot 2 = 4752$$

Ответ: $3^4 \cdot 2^5 = 4752$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 36 \\ \hline 216 \\ + 216 \\ \hline 2376 \end{array}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b = 0$$

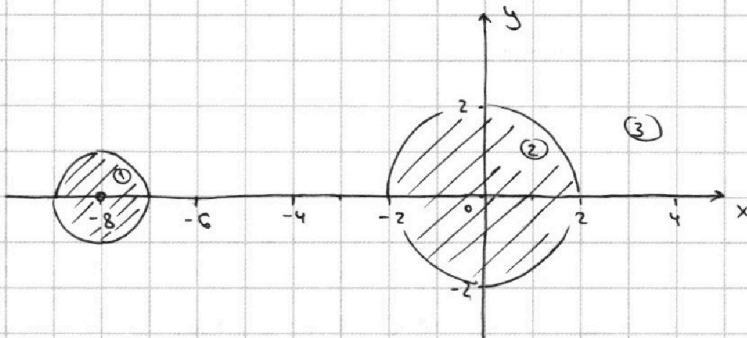
$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

1. Построим

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

1. $(x+8)^2 + y^2 = 1$ - окр-ть $\omega_1(-8, 0, 1)$

2. $x^2 + y^2 = 4$ - окр-ть $\omega_2(0, 0, 2)$



2. Расставим знаки методом областей

1) $(-8, 0)$: $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = -1 \cdot (8^2 - 4) \leq 0$ - подходит

2) $(0, 0)$: $(8^2 - 1) \cdot (-4) \leq 0$ - подходит

3) $(3, 0)$: $(25^2 - 1)(9 - 4) > 0$ - не подходит

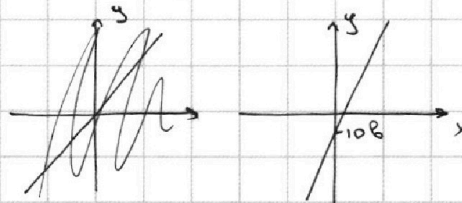
Подходящие области заштрихуем

3. $ax - y + 10b = 0$

$y = ax + 10b$ - прямая

т.к. проходящая $2/3$

$(0; 10b); (-\frac{10b}{a}; 0)$

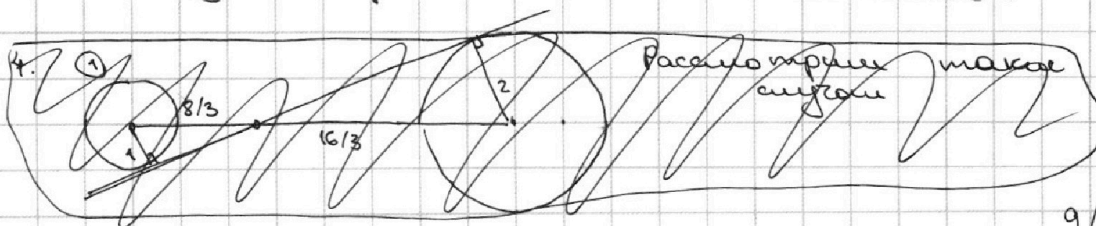


~~Заметим, что кр~~

кол-во решений системы = кол-ву ~~т.е.~~ пересечений
прямой $y = ax + 10b$ с графиком из п. 2

2) ~~крайний случай, когда прямая кас.~~

т.к. там 2 круга равно 2 решение существует,
когда ~~к~~ прямая касается обоих кругов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

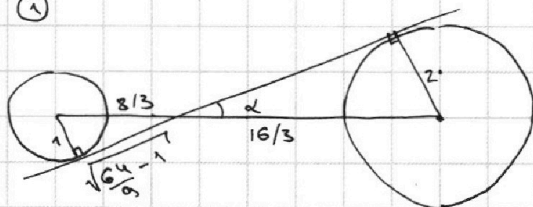
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



4. Рассмотрим все такие ситуации

①

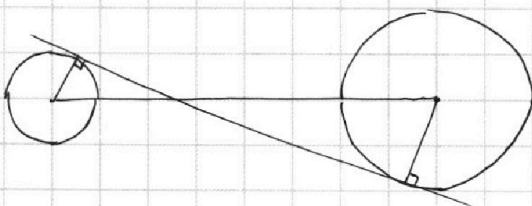


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{8/3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{64/9 - 1}} = \frac{3}{\sqrt{56/9}}$$

$$a = \frac{3\sqrt{14}}{28}$$

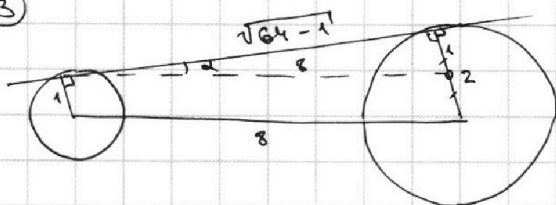
②



$$a = -\frac{3\sqrt{14}}{28}, \text{ т.к. ситуация}$$

симметрична к 4.1

③

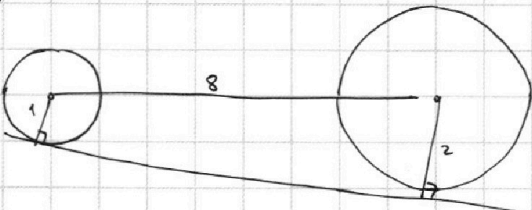


$$\operatorname{tg} \alpha = a$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$$

$$a = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

④



$$a = -\frac{\sqrt{7}}{21}, \text{ т.к. ситуация}$$

симметрична к 4.3

$$\text{Ответ: } a \in \left\{ -\frac{3\sqrt{14}}{28}; -\frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{3\sqrt{14}}{28} \right\}$$

10/12

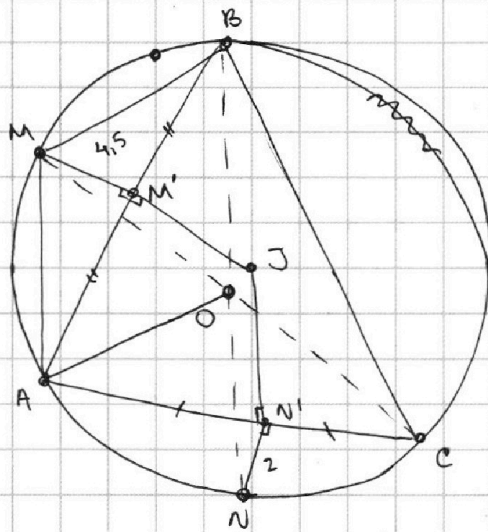
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

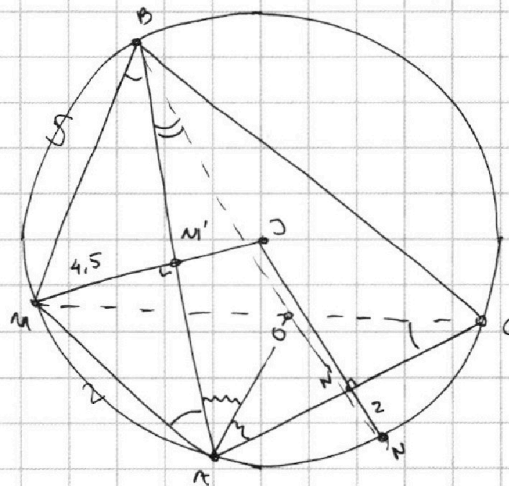
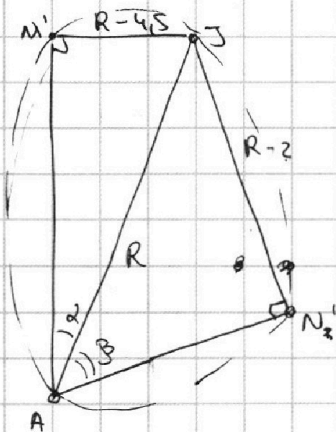
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. BN - бис-са $\angle ABC$ м.к. $\angle AN = \angle CN$
 $\angle$ и $\angle ABN$ и $\angle NBC$ - впис. оцир.
на $\angle AN$ и $\angle CN$
аналогично MC - бис-са $\angle BCA$
 $MC \cap BN = O$ - центр впис. окр.
 $\Rightarrow AO$ - иск.
2. $\angle AM = \angle BM \Rightarrow MA = MB$
 $\Rightarrow \angle AAB = \angle B \Rightarrow MA = MB$
 $\Rightarrow \angle BAM = \angle MBA$ - впис. оцир.
на $\angle AM$ и $\angle BM$
 $\Rightarrow MN$ - высота, бис-са и медиана

3. м.к. J - центр впис. ок-ти
 $\Rightarrow$ по п.2 $JN' \perp AC$, $JM' \perp BA$
 $\Rightarrow M' \in (JM)$
 $N' \in (JN)$ (м.к. $\angle JN'A + \angle AN'N = \pi$ и с M' аналог.)

4. $M'JN'A$



м.к. $\angle M' + \angle N' = \pi \Rightarrow$ вокруг $M'JN'A$ можно описать
окружность с радиусом $R/2$ и диаметром AJ

$$\frac{\sin d}{R - 4.5} = \frac{1}{R} \Rightarrow \sin d = 1 - \frac{4.5}{R} \quad \sin \beta = 1 - \frac{2}{R}$$

$$\sin d + \beta = \sin d \cos \beta + \sin \beta \cos d = \frac{(R - 4.5)(4 - 2R)}{R^2} + \frac{(R - 2)(4.5^2 - 9R)}{R^2 - 9R}$$

$$\sin d + \beta = \frac{R(R - 4.5) \cdot 4(1 - R) + (R - 2) \cdot 4.5(4.5 - 2R)}{R^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5. \triangle ABM: MB = 2R \sin \angle A \quad | \Rightarrow 4,5 = 2R \sin^2 \angle A$$

$$\triangle AMM': \sin \angle A = \frac{4,5}{MA} = \frac{4,5}{MB}$$

$$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle MCA \text{ (т. опис. на равные дуги и впис.)}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \angle C/2 = \frac{4,5}{2R} = \frac{9}{4R} = \sin^2 \angle MCA$$

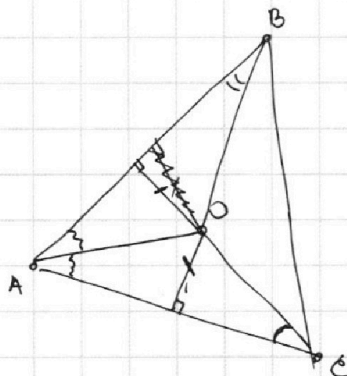
$$\text{аналогично} \quad \sin^2 \angle B/2 = \frac{1}{R} = \sin^2 \angle NBA$$

6. т.к. O - г. впис. окр. $\Rightarrow AO$ - бис. к углу A
пусть $\angle MCA = \angle C$, $\angle NBA = \angle B$

$$\angle OAC = \angle OAB = \angle A$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi/2, \quad \sin^2 \angle B = 1/R$$

$$\sin^2 \angle C = 9/4R$$



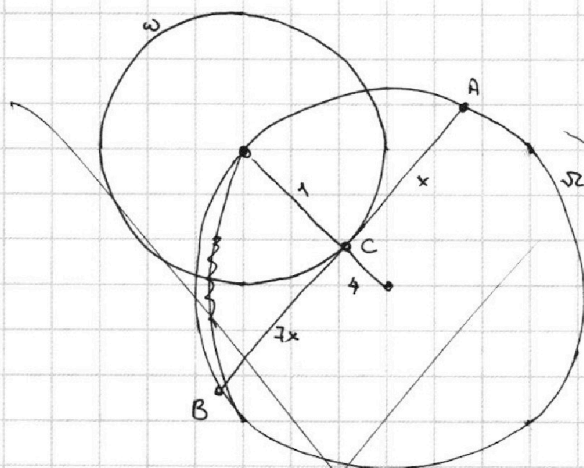
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

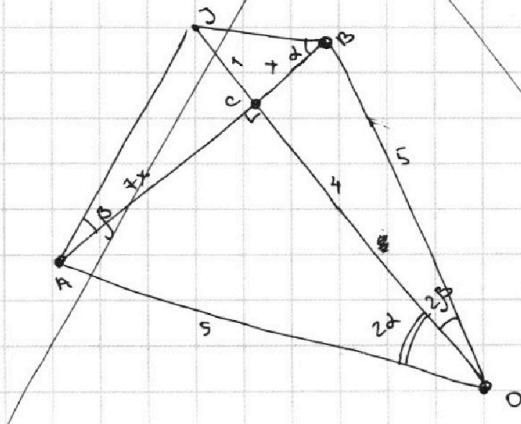
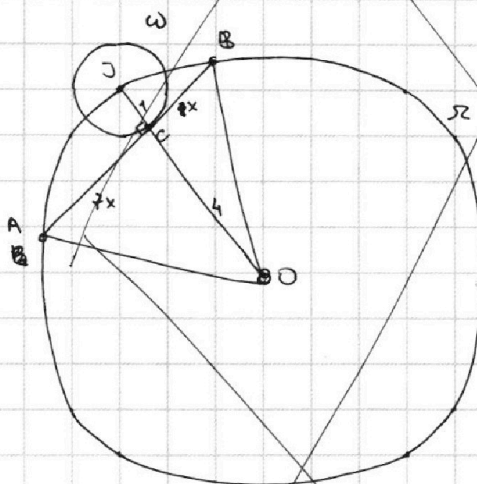
1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- ~~$\angle JCA = \angle KJ$, т.к. AB - кас~~
 1. $\angle C = \pi/2$, т.к. AB - кас.
 2. $\angle JBA$ - впис. опираем. на $\widehat{AJ}$
 ~~$\angle JCA$~~ $\angle JOA$ - центр. опир. на $\widehat{AJ}$
 $\Rightarrow 2\angle JBA = \angle JOA = 2\alpha$
 аналогично $\angle BOJ = 2\angle BAJ = 2\beta$
 3. $OB = OA = 5$, т.к. радиусы R
 $OC = 4$, т.к. радиус r
 $OC = JO - JC = 4$, т.к. JO - радиус R
 радиус r
 4. $\triangle BCO$: п/у $BO^2 = OC^2 + BC^2$
 $25 = 16 + x^2 \Rightarrow x = 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 + 3 = 8$$

$$a^2 + b^2 - 6ab = (a-b)^2 - 4ab = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4(1-15) = 4 \cdot 14 = 8 \cdot 7$$

① Решена $\rightarrow 4$

② Доказать, что если $(a, b) = 1$, $(a+b; b^2) = 1$

④ Решена $\rightarrow 5$

⑥ Решена $\rightarrow 5$

③ Решена, но ответ не красивый

⑤ Решена $\rightarrow 5$

$$\begin{array}{r} 1369 \overline{) 23} \\ \underline{128} \\ 89 \\ \underline{85} \\ 40 \\ \underline{39} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 30 \end{array}$$

$$(a, b) = 1 \Rightarrow ak + bu = 1$$

и

$$(a, b^2) = 1$$

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) \neq q_1, q_2, \dots, q_k$$

$$(p_1, p_2, \dots, p_n + q_1, \dots, q_k; (q_1, q_2, \dots, q_k)^2)$$

$$(a+b; b^2) = (a, (b-1)b)$$

$$(a+b; 8b^2) = (a, (8b-1)b) = 8b-1$$

$$5, (8 \cdot 3 - 1) \cdot 3 = 5; 23 \cdot 3$$

$$(5, (8 \cdot 3 - 1) \cdot 3) = 5; 23 \cdot 3$$

или

$$a+b;$$

$$8; 8 \cdot 9$$

$$a, b : c$$

$$nc, kc$$

$$nc-d,$$

$$(a+b; (8b-1)b-a)$$

$$\begin{array}{r} 1369 \overline{) 7} \\ \underline{7} \\ 66 \\ \underline{39} \\ 27 \\ \underline{26} \\ 1 \\ \underline{0} \\ 1369 \end{array}$$

$$1 + 48 \cos^2 \alpha = 4900 (1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha$$

$$\begin{array}{r} 1369 \overline{) 17} \\ \underline{8} \\ 9 \\ \underline{8} \\ 1 \\ \underline{0} \\ 1369 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = \frac{8}{\tan \alpha} = 10 \sin \alpha$$