

$$\begin{aligned}
 a &= 2^{10} & a &= 2^7 & ac = 2^{23} \cdot 7^{33} & ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^4 & (abc)^2 = m \cdot k \cdot 2^{55} \cdot 7^{68} \\
 b &= 2^5 & b &= 2^7 & \frac{ab}{ac} = 8 & bc = n \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} & \frac{68}{2} = 34 \\
 c &= 2^{12} \cdot 7^{18} & bc = 2^{18} \cdot 7^{18} & \frac{2^{23} \cdot 7^{33}}{2^{18} \cdot 7^{18}} = \frac{2^5}{1} = 8 & ac = m \cdot 2^{23} \cdot 7^{33} & \frac{68}{2} = 34 \\
 ab &= 2^{15} \cdot 7^{11} & c &= 2^5 & \frac{ab}{c} = 2^{10} \cdot 7^4 & \frac{68}{2} = 34 \\
 && &= 2^{12} \cdot 7^8 & a &= 2^5 \\
 && &= 2^5 & & a = 2^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^{55} &= 2^{54} \cdot 2^1 \\
 &= 2^{54} \cdot 2^1 \\
 &= 2^{54} \cdot 2^1
 \end{aligned}$$

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

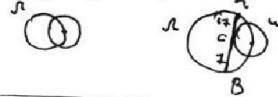
$$\begin{aligned}
 ab &= 2^{15} \cdot 7^{11} & ac &= 2^{23} \cdot 7^{33} & ab &= 2^{15} \cdot 7^{11} & ac &= 2^{23} \cdot 7^{33} \\
 &+ 5 \cdot 3 \cdot 7^5 & bc &= 2^{18} \cdot 7^{18} & & & bc = 2^{18} \cdot 7^{18} \\
 &G & & & & & ac = 2^{23} \cdot 7^{33} \\
 ab &= 2^{15} \cdot 7^{11} & bc &= 2^{18} \cdot 7^{18} & & & ac = 2^{23} \cdot 7^{33}
 \end{aligned}$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c такие, что ab делится на $2^{15} \cdot 7^{11}$, bc делится на $2^{17} \cdot 7^{18}$, ac делится на $2^{23} \cdot 7^{33}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

$$\begin{aligned}
 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь \\
 &= \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{a+b}{a^2 + 2ab + b^2 - 9ab} = \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}} = \frac{a+b}{\frac{a+b}{a^2 + b^2 - 2ab - 9ab}}
 \end{aligned}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.



4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

$$129 \pm 15 = 130 \pm 14$$

$$\begin{aligned}
 16 \cdot 8 &= 80 + 48 = 128 \\
 &\frac{129}{15} = 129 \\
 &\frac{129}{15} + 15 = 129
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S=1}{aB} : 2^{15+11} \Rightarrow aB = K \cdot 2^{15+11}, \quad K \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$BC \cdot 2^{17+18} \Rightarrow BC = n \cdot 2^{17+18}, n \in \mathbb{N} \quad ②$$

$$AC : 2^{23} \neq 3^9 \Rightarrow AC = m \cdot 2^{23} \neq 3^9, m \in \mathbb{N}$$

непримкнутым раб. 8а ①, ②, ③:

$$AB \cdot BC \cdot AC = m \cdot n \cdot K \cdot 2^{15+17+23} \cdot 7^{14+18+39}$$

$$a^2 b^2 c^2 = mnk \cdot 2^{55} 7^{68}$$

$$(abc)^2 = mnk 2^{55} \nmid 68$$

$$abc = \sqrt{mnk} 2^{56+68} = 7^{34} \cdot 2^{27} \cdot \sqrt{m \cdot n \cdot k \cdot 2} \quad ①$$

- $a, b, c \in \mathbb{N}$ - no yet $\Rightarrow abc \in \mathbb{N}$ } $\Rightarrow \sqrt{mnk} \in \mathbb{N}$ }
 $7^{34} \cdot 2^{27} \in \mathbb{N}$ }
- приведи, м.к. числа имеют abc_{\min} , $(mnk)_{\min}$

~~WILHELM KESTER~~ WILHELM KESTER

- также, если на некоторую окружность ложатся шесть точек : abc (т.е. ab, bc и ac), то и abc образует на ней диагональ $\Rightarrow abc$: на окружности ложатся шесть точек и 7^{th} , встреч. в ab, ac, bc т.е. $abc: 2^3$, $abc: 7^{39}$

• Нам нужно сделать так, чтобы $2mnk$ было квадратом (из ①), делится на $\left(\frac{t^{39}}{t^{34}}\right)^2 = t^5)^2 = t^{10}$

(~~нек.~~ на 2^{23} все уже :), м.к.: на 2^{27} , а вот чтобы оно : на 7^{39} , $\sqrt{2mnk}$ должен : на 7^5 (abc :на 7^{34} и ①) \Rightarrow
 $\Rightarrow 2mnk$ должно : на 7^{10}) и было минимальным
 \Rightarrow другие, доп. множители, кроме $2^{\frac{ek}{ek}}$ и $7^{\frac{ok}{ok}}$ и сами не пустые, а $2^{\frac{ek}{ek}}$ и $7^{\frac{ok}{ok}}$ в min кол-ве)

$$\left. \begin{array}{l} 2mnK = x^2 \\ 2mnK : 7^{10} \\ (2mnK)_{\min} \end{array} \right\} \Rightarrow 2mnK = 7^{10} \cdot 2^2 \\ mnK = 2 \cdot 7^{10} \Rightarrow \sqrt{2mnK} = 7^5 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{BC\min} = \gamma^{34} \cdot 2^{2^3} \cdot \sqrt{2mnk} = \gamma^{34} \cdot 2^{2^3} \cdot 2 \cdot \gamma^5 = 2^{2^3} \cdot \gamma^{39}$$

пример $a, b \in c$, при кот. $\exists n. \forall x^{\exists - n} \in c$

$$\begin{aligned}abc_{\min}: \quad a &= 2^{10} \cdot 7^2, \quad b = 2^5, \quad c = 2^{13} \cdot 7^{18} \quad (\text{moga } abc = 2^{28} \cdot 7^{39}), \\ab &= 2^{15} \cdot 7^{21} : 2^{15} \cdot 7^7, \quad bc = 2^{48} \cdot 7^{18} : 2^{17} \cdot 7^{18}, \quad ac = 2^{23} \cdot 7^{29} : 2^{23} \cdot 7^{39}\end{aligned}$$

$$\underline{\text{ombem: }} abc_{\min} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2$$

$$\frac{a}{b}$$

несокр $\Rightarrow a \text{ и } b$ взаимно просты, (I)

$$a+b$$

$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a^2 - 7ab + b^2}$ можно сократить на $m \Rightarrow$ и числ., и
знам. данной дроби: m

$$(a+b) : m$$

$$(a^2 - 7ab + b^2) : m$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 - 7ab + b^2 &= a^2 + b^2 + 2ab - 9ab = (a+b)^2 - 9ab \\ (a+b)^2 : (a+b) &: m \\ (a^2 - 7ab + b^2) : m & \\ \Rightarrow 9ab &: m \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

поскольку a и b взаимно просты, (I) \Rightarrow у них
нет общ. простых множ. $\Rightarrow a+b$ не делится ни
на один из пр. мн., встречающихся в a и b $\Rightarrow a+b$
взаимно просто с a и с b ~~взаимно просто с a и b~~
~~взаимно просто с $a+b$~~

$a+b$ взаимно просто с $9ab$, но
имеет общий делитель с $9ab$
значит, этот общий делитель - делитель числа
9 т.е. максимум 9

Отвем: $M_{\max} = 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{4}$ (начало реш-я)

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

заметим, что $3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = 3x^2 - 6x + 2 -$

$$-3x^2 - 3x - 1 = 1 - 9x \quad ①$$

заметка: $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = a \geq 0$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = b \geq 0$$

тогда, из ①, $a^2 - b^2 = 1 - 9x = a - b$ - это и есть уп-е

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$[a - b = 0 \quad ④]$$

$$[a + b = 1 \quad ③]$$

$$②: a - b = 0$$

$$a = b$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$-9x = -1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

проверим, выполняется ли при $x = \frac{1}{9}$ условие того, что подкоренное выражение ≥ 0 : $3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$$3\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 \geq 0 - \text{Верно}$$

$$3\left(\frac{1}{9}\right)^2 - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2 \geq 0$$

$$3\left(\frac{1}{9}\right)^2 - \frac{6}{9} + 2 \geq 0$$

$$3\left(\frac{1}{9}\right)^2 - \frac{2}{3} + 2 \geq 0$$

$$3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 1 \frac{1}{3} \geq 0 - \text{Верно}$$

значит, $x = \frac{1}{9}$ - корень

$$③: a + b = 1 \Rightarrow a = 1 - b \quad ④$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-6x = 3x - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-9x = -2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\cancel{9x^2} = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad ④$$

$$81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\Delta = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 1248 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{2^5 \cdot 3 \cdot 13} = 4\sqrt{78}$$

$$x = \frac{-12 \pm 4\sqrt{78}}{69 \cdot 2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

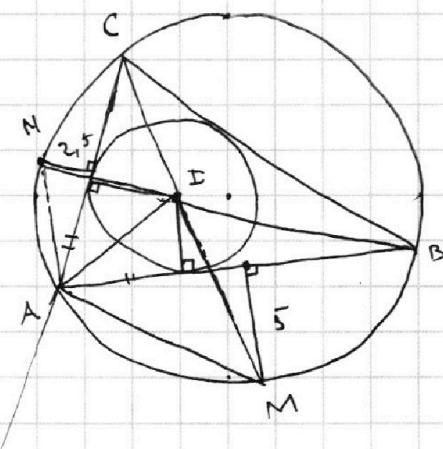
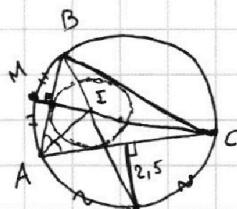
н² 4 (окончание реш-я)

$$x = \frac{-12 - 4\sqrt{78}}{69 \cdot 2} = \frac{-6 - 2\sqrt{78}}{69} - \text{не подходит, т.к } \text{из } ④: \\ 9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \\ 9x \geq 0 \\ x \geq 0$$

$$x = \frac{-6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\text{Одн. реш.: } x = \frac{1}{9}; x = \frac{-6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

оставшаяся часть списка - первовка



AI - ?



$$\alpha x + y - 8B = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1$$



$$\alpha x + y - 8B = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

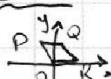


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2} \cdot 5$



A, B вицугра пар $\Rightarrow y_1 \in [0; 26]$
 $y_2 \in [0; 26]$

найдем ур-е прямой OP:

$$y = K_1 x + B_1$$

$$0 \cdot y \quad DK_1 + B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$P: -13K_1 = 26 \Rightarrow K_1 = -2$$

итого: $y = -2x$ — прямая a

найдем ур-е прямой QR: $y = K_2 x + B_2$

$$\text{Последовательно } K_2 = K_1 = -2$$

$$y = -2x + B_2$$

$$0 = -2 \cdot 16 + B_2$$

$$0 = -32 + B_2 \Rightarrow B_2 = 32$$

итого: $y = -2x + 32$ — прямая b

найдем т.как. вицугри пар \Rightarrow они лежат на b , "ног" прямой b

а

$$\text{макса: } y_1 \geq -2x_1 \quad ①$$

$$y_2 \geq -2x_2 \quad ② \quad \Rightarrow \text{пересеч}$$

$$y_1 \leq -2x_1 + 32 \quad ③$$

$$y_2 \leq -2x_2 + 32 \quad ④$$

$$\text{макса по уш} \quad 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \quad ⑤$$

$$\text{①} + \text{②} + \text{③} + \text{④} + \text{⑤}$$

$$\text{①: } -2x_1 \leq y_1$$

$$\text{①} + \text{⑤}: 2x_2 + y_1 + y_2 \geq 14 \geq 4$$

$$2x_2 + y_2 \geq 14$$

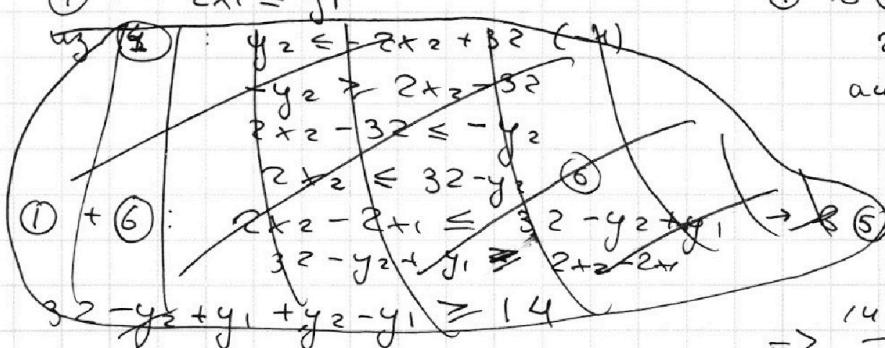
$$\text{аналогично } 2x_1 + y_1 \geq 14$$

$$x_1 \geq \frac{14 - y_1}{2}$$

$$x_1 \in \mathbb{R}$$

$$y_1 \in [0; 26] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{14 - y_1}{2} \in [-6; 7]$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{5}$ 6 Сокращение реш-я)

$$t = \frac{-24 \pm 12\sqrt{10}}{30} = \frac{-12 \pm 6\sqrt{10}}{15}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{-12 - 6\sqrt{10}}{15} \rightarrow X \text{ m.k. } t = a^2 + 1 \geq 1 > 0 \\ t = \frac{-12 + 6\sqrt{10}}{15} \end{array} \right.$$

обр. замена: $a^2 + 1 = \frac{-12 + 6\sqrt{10}}{15} \quad | \cdot 15$

$$15a^2 + 15 = -12 + 6\sqrt{10} \quad | : 3$$

$$5a^2 + 5 = -4 + 2\sqrt{10}$$

$$5a^2 = 2\sqrt{10} - 9$$

нет корней

видимо, где-то вспомогательные ошибки:

один кас к 2-му окр должно быть 4: 2 вспом и 2
внур, что соотв 4-ему диам 9 как квад-га иаки
так кас



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (окончание реш-я) (продолжение реш-я)

$$x^2(a^2+1) - x \cdot 16ab + (64b^2 - 1) = 0$$

$$\Delta = 0 : \Delta = 256a^2b^2 - 4 \cdot (a^2+1)(64b^2 - 1) = \\ = 256a^2b^2 - (4a^2+4)(64b^2 - 1) = 256a^2b^2 - 256a^2b^2 + \\ + 4a^2 - 256b^2 + 4 = 4a^2 - 256b^2 + 4$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4a^2 - 256b^2 + 4 = 0 \mid : 4$$

$$a^2 - 64b^2 + 1 = 0 \quad (6)$$

$$y = 8b - ax - \text{рас} \text{ к } \mathcal{L} :$$

$$x^2 + (8b - ax - 12)^2 - 16 = 0$$

$$x^2 + (64b^2 + a^2x^2 + 144) - 16xab - 192b + 24ax - 16 = 0$$

$$x^2(a^2+1) + x(24a - 16ab) + 64b^2 - 192b + 128 = 0 \quad (7)$$

$$y = 8b - ax - \text{рас} \text{ к } \mathcal{L} \Rightarrow \text{ур-е } (7) \text{ имеет ровно 1 реш-е}$$

$$\Rightarrow \Delta = 0$$

$$\Delta = (24a - 16ab)^2 - 4 \cdot (a^2+1) \cdot (64b^2 - 192b + 128)$$

$$\Delta = 64(3a - 2ab)^2 - 4 \cdot (a^2+1) \cdot 16 \cdot (4b^2 - 12b + 8) = 0$$

$$9a^2 + 4a^2b^2 - 12a^2b - (4a^2b^2 - 12a^2b + 8a^2 + 4b^2 - 12b + 8) = 0$$

$$\frac{9a^2}{a^2} + \frac{4a^2b^2}{a^2} - \frac{12a^2b}{a^2} - \frac{4a^2b^2}{a^2} + \frac{12a^2b}{a^2} - \frac{8a^2}{a^2} - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{12b}{a^2} - \frac{8}{a^2} = 0 \quad (8)$$

(6), (8):

$$a^2 - 64b^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 + 1 = 64b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{a^2+1}{64} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{a^2+1}}{8}$$



т.к. наше уравнение левая часть к обеим окнам одновременно

$$a^2 - 4 \cdot \frac{a^2+1}{64} + 12 \cdot \frac{\sqrt{a^2+1}}{8} - 8 = 0$$

$$a^2 - \frac{a^2+1}{16} + 12 \cdot \frac{\sqrt{a^2+1}}{8} - 8 = 0 \mid \cdot 16$$

$$\frac{16a^2 - a^2 - 1}{16} + 24\sqrt{a^2+1} - 128 = 0$$

$$15a^2 + 24\sqrt{a^2+1} - 129 = 0$$

$$15(a^2+1) + 24\sqrt{a^2+1} - 144 = 0$$

$$\text{замени} \alpha : a^2+1 = t \geq 1$$

$$15t^2 + 24t - 144 = 0$$

$$\Delta = 24^2 + 60 \cdot 144 = 576 + 864 = 1440 = 2^4 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2^2 \cdot 3 \sqrt{10} = 12\sqrt{10}$$

$$t = \frac{-24 \pm 12\sqrt{10}}{30}$$

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 (началь рещ-я)

чр-е, издависимое от параметров:

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \quad (1)$$

$x^2 + y^2 = 1$ - окр $(0; 0)$ и радиусом 1 (обозначим ее ω)

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad (\text{m.e. } x^2 + y^2 - 1 \leq 0) \quad (2)$$

Верно для m , нач. ω (включая ее границы)

$$x^2 + (y - 12)^2 = 16 - \text{окр с ц. } (0; 12) \text{ и радиусом 4}$$

(обозначим ее \mathcal{R})

$$x^2 + (y - 12)^2 \leq 16 \quad (\text{m.e. } x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0) \quad (3)$$

Верно для m , нач. \mathcal{R} (включая ее границы)

нерав-во (1) верно, если одно из нерав. (2) - (3) верно

верно, а второе нет (окр. ω и \mathcal{R} не пересек \Rightarrow если

одно из нерав. (2) - (3) верно, то второе точно нет \Rightarrow

\Rightarrow (1) верно, если верно (2) или (3)

$$ax + y - 8B = 0$$

$$y = 8B - ax - \text{прямая} \quad (4)$$

Система из (1) и (4) должна иметь 2 рещ-я \Rightarrow прямая $y = 8B - ax$ должна иметь с этими 2 окр (из (1) и (3)) в сумме 2 общих т.

прямые и окр могут иметь только 0, 1 (кас), или ∞ (секущие) общих т.

\Rightarrow обеим окр. и нача прямые должны быть касательной

$$\begin{cases} 0 \text{ и } 0 \\ 0 \text{ и } 1 \\ 1 \text{ и } 0 \\ \infty \text{ и } 0/1 \end{cases}$$

$1 \text{ и } 1 \Rightarrow$ кас-во обу т пр. и окр

$$y = 8B - ax - \text{кас к } x^2 + y^2 = 1 :$$

$$x^2 + (8B - ax)^2 = 1$$

$$x^2 + 64B^2 + a^2x^2 - 16axB = 1$$

$$x^2(a^2 + 1) - 16axB + (64B^2 - 1) = 0 \quad (5)$$

$y = 8B - ax - \text{кас} \Rightarrow$ чр-е (5) имеет ровно 1 рещ-я

$$\Rightarrow D = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

чертёжник

$$\begin{aligned} & \cancel{y = 8b - ax}, \\ & \cancel{y^2 + x^2 = 1}, \\ & \cancel{x^2 + (y-1)^2 = 16} \\ & \cancel{y^2 - (y-1)^2 = -15} \\ & \cancel{y^2 - y^2 - 1 + 2y = -15} \\ & \cancel{2y =} \\ & \Rightarrow a^2 = 64b^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y = 8b - ax \\ & y^2 + x^2 = 1 \\ & 64b^2 - 16abx + a^2x^2 + x^2 = 1 \\ & x^2(a^2 + 1) - 16abx + (64b^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$36 \cdot 6 = 110 \leftarrow 36 -$$

$$2, 144 + 160 = 304$$

$$64b^2 - 1 - 4b^2 + 12b - 8 = 0$$

$$60b^2 + 12b - 9 = 0$$

$$D = 144 + 36 \cdot 60 = 144 + 2160 = 2304$$

2304

$$\Rightarrow a^2 - 64b^2 + 1 = 0$$

$$a^2 + 1 = 64b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{a^2 + 1}{64}$$

$$\begin{aligned} a^2 - 4 \cdot \frac{a^2 + 1}{64} + 12 \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{8} - 8 &= 0 \\ a^2 - \frac{a^2 + 1}{16} + 12 \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{8} - 8 &= 0 \quad | \cdot 16 \end{aligned}$$

$$16a^2 - a^2 - 1 + 24\sqrt{a^2 + 1} - 128 = 0$$

нр

$$\begin{aligned} & 144 \cdot 6 = 600 + 240 + 24 = 840 + 24 \\ & 500 \quad . \quad 1440 = 1300 + 64 + 76 = 1300 + 140 = 1440 \approx 864 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 1440 & 2 \\ 720 & :2 \\ 360 & :2 \\ 180 & :2 \\ 90 & :2 \\ 45 & :3 \\ 15 & :3 \\ 5 & :5 \\ 1 & \end{array}$$

$$1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\sqrt{D} =$$

$$\sqrt{1440} = \sqrt{1300 + 140} = \sqrt{1440}$$



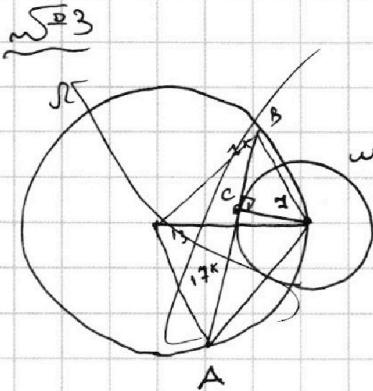
На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО ОДИНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

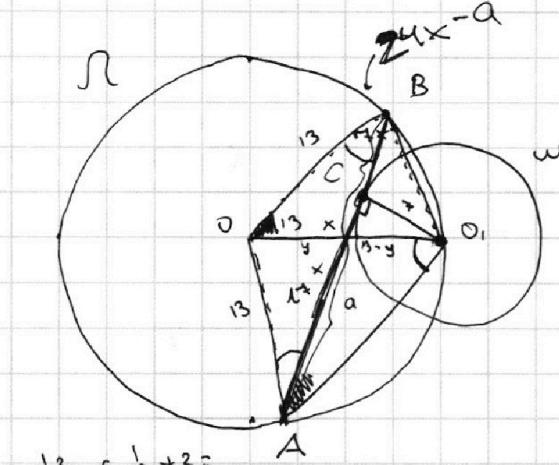


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

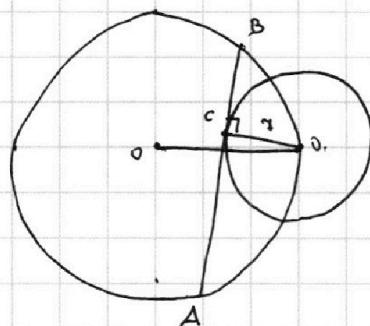
ЧЕРНОВИК



$$3 \cdot \frac{r^2}{4} - 6 \cdot \frac{r^2}{4} + 2 =$$

6.1

1



10

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 2x - 3x - 1 = 1 - 9x$$

$$\alpha - \beta = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\alpha - \beta = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

$$81 - 12 = 82 - 1 - 12 = 80 - 10 - 1 = 70 - 10 - 1 = 60 - 10 - 1 = 50 - 10 - 1 = 40 - 10 - 1 = 30 - 10 - 1 = 20 - 10 - 1 = 10 - 10 - 1 = 0 - 10 - 1 = -10 - 1 = -11$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 9 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$17 + 4 = 21$$

$$\begin{array}{l} 1 - 9x = 0 \\ 1 = 9x \\ x = \frac{1}{9} \end{array}$$

AB?

ОБОИА - ВН / АГИАЛ ОСР

5-

т-1

$$7x \cdot 13x = y(13-y)$$

$$91x^2 = 13y - y^2$$

$\triangle OXB \sim \triangle OAxO_1$:

$$\frac{y}{13-y} = \frac{a}{24x-a}$$

7.3

$$24x-a-4x = 14x-a$$

$$49 + (14x-a)^2 \neq (13-y)^2$$

$$y \cdot 24x - ya = 13a - ay$$

$$24xy = a(13a - 2ay)$$

$$a = \frac{24xy}{13}$$

$$49 + \left(14x - \frac{24xy}{13}\right)^2 = (13-y)^2$$

$$49 + 289 + 2 =$$

$$49 + 17^2x^2 + \frac{24^2x^2y^2}{13^2} - \frac{48xy \cdot 12}{13} = 132$$

y^2

$$500 + 100 + 24$$

75+3

35+4

$$\begin{array}{r} 1248 \\ 624 \\ 312 \\ 156 \\ 78 \\ 39 \\ 13 \end{array} \begin{array}{r} :2 \\ :2 \\ :2 \\ :2 \\ :2 \\ :3 \end{array}$$

$$\sqrt{2^4} = 2^2 = 4$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 1104 \\ \hline 1244 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

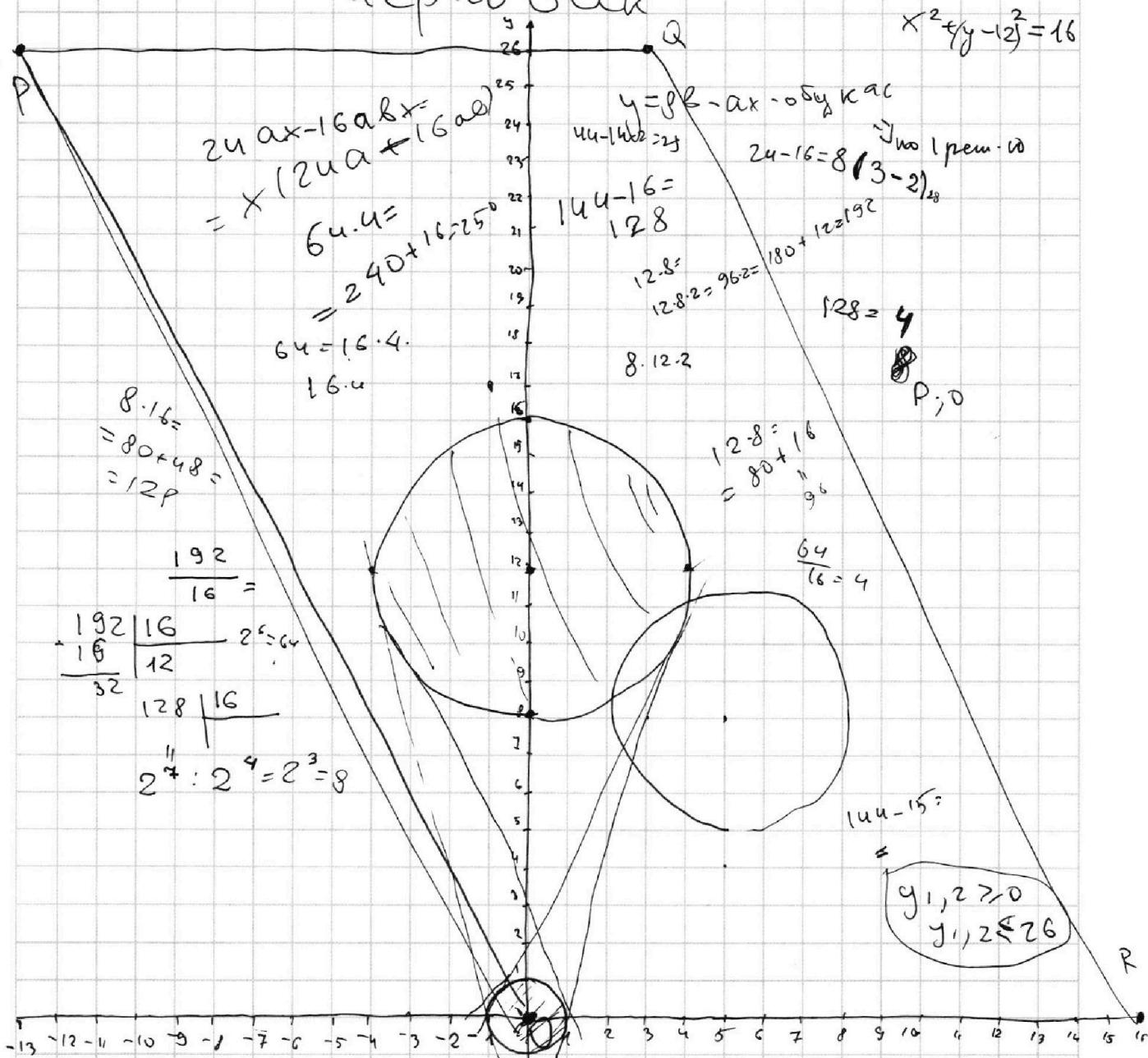


- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черночник



$$x^2 + y^2 - 12y = 16$$

$$y = 8 - ax - \text{окончание}$$

$$24 - 16 = 8(3 - 2)$$

$$128 = 8$$

$$128 = 4$$

$$P; D$$

$$128 = 8^2$$

$$\frac{64}{16} = 4$$

$$144 - 16 =$$

$$\begin{cases} y_1, 2 \geq 0 \\ y_1, 2 \leq 26 \end{cases}$$

R

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$$

$$2ax + oy = 14$$

$$x^2 + y^2 - 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 16 \text{ круг}$$

то же фигура

либо фигура 1, либо фигура 2

2 реш-я

$$ax + y - 8 = 0$$

$$y = 8 - ax \Rightarrow oy + ax = 8$$

у однай окр: 0, 1, ∞