



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1) (1)
 $ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc : 2^{12} \cdot 7^{12}$
 $ac : 2^{20} \cdot 7^{32}$
 $(abc)^2 : 2^{51} \cdot 7^{64}$
 $abc : 2^{26} \cdot 7^{32}$

(2) (2)
 $a = 2^x \cdot 7^y \cdot k$
 $b = 2^z \cdot 7^m$
 $c = 2^l \cdot 7^n$
 где $k, m, l \in \mathbb{N}$
 $k, m, l \neq 2$
 $k, m, l \neq 7$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + y_1 \geq 14 \\ y_1 + z_1 \geq 12 \\ z_1 + x_1 \geq 20 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 \geq 26$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + z_2 \geq 12 \\ z_2 + x_2 \geq 32 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geq 32$$

(4) Чтобы abc было наим., k, m, l возьмём равными 1, и $\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 26 \\ x_2 + y_2 + z_2 = 32 \end{cases}$
 abc должно быть кратно $2^{26} \cdot 7^{32}$, иначе не будет выполнено условие, что $(abc)^2 : 2^{51} \cdot 7^{64}$, значит наим. возможное

(6) $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$, т.к. $ac : 7^{32}$, то и $abc : 7^{32}$, т.е. $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$

Например: $a = 2^8 \cdot 7^{20}$
 $b = 2^8$
 $c = 2^{12} \cdot 7^{12}$

$b = 2^8$
 $c = 2^{12} \cdot 7^{12}$
 $a = 2^8 \cdot 7^{20}$

(5) Поймём, что для миним. значения abc ,
 $ac : 7^{32}$ & $ac : 7^{32}$ и для соблюдения
 условий для bc и ab , достаточно
 $a : 7^{10}$ и $c : 7^{12}$, при этих условиях
 b может быть $\neq 7$ вообще, и так получится
 минимальная степень для 7 .

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$ при $a = 2^8 \cdot 7^{20}, b = 2^8, c = 2^{12} \cdot 7^{12}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

② $\frac{a}{b}$ - несократима, $\Rightarrow (a,b)=1$ ($\text{НОД}(a,b)=1$)

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \cdot (a+b) \div m \Rightarrow (a+b) = m \cdot k, \text{ где } k, m \in \mathbb{N}$$

$$(a+b)^2 = k^2 \cdot m^2 \Rightarrow (a+b)^2 \div m, \text{ чтобы сократить } \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \text{ на } m,$$

$$\text{надо чтобы } (a+b)^2-8ab \div m, (a+b)^2 \div m \Rightarrow 8ab \div m.$$

$$\text{т.к. иначе из } a+b, \text{ получим, что } (a,b)=m. \text{ ✗}$$

$$a \text{ или } b \div m$$

$$\text{Значит, т.к. } a, b \div m, \text{ то } 8 \div m. \text{ Наид. } m \div 8 \div m = 8$$

$$\text{т.к. нужно наид. } m, \text{ то } m=8 \Rightarrow \text{Ответ: при } m=8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

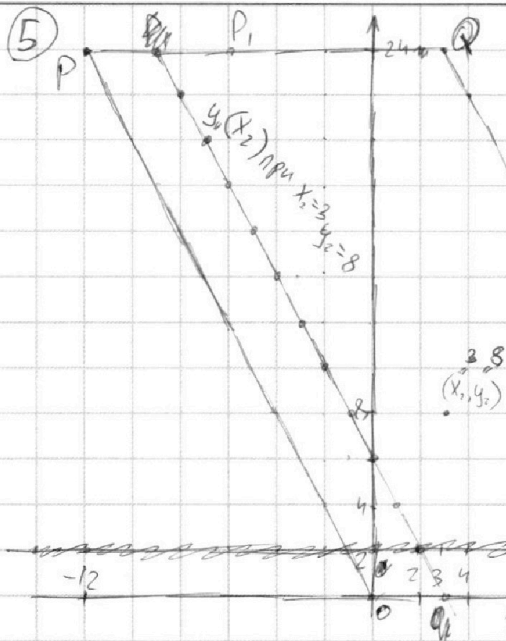
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Всего точек в целых x_1, y_1 внутри $OPQR$ в ~~каждой~~ строке с чётным y_1 : 16
с нечётным: 15

$$2x_2 - 2y_2 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2 - 12$$

Всегда видно, что ~~эта~~ ~~через~~ ~~одно~~ ~~знаковое~~ y_2

Поймём, что при $x_2, y_2 = \text{const}$
 $y_1 = \text{const} - 2x_1 - 12$, т.е. const

График $y_1(x_1)$ параллелен

(PQ) и ~~ка~~ ~~сдвинут~~

параллельно Ox влево

от $T(x_2, y_2)$ (т.е. $x_2 - x_1 = 6$)

~~Каждая~~ ~~точка~~ Знают, чтобы (x_1, y_1) была внутри $OPQR$, при $y_2 = y_1$
 $(x_2 - 6, y_2) \in OPQR$, значит точки (x_2, y_2) можно выбрать из
 O, P, QR , где ~~каждый~~; $P(-6, 24)$, для ~~каждой~~ точек (x_2, y_2) из
 $O(6, 0)$

O, P, QR в строках, где y -чётное есть 13 точек (x_1, y_1) для каждой
для таких же точек, но в строках, где y -нечётное
есть 12 точек (x_1, y_1) для каждой, ~~это~~ значит кол-во
пар, удовлетворяющих условию: + ещё одна чётная строка

$$((16-6) \cdot 13 + (15-6) \cdot 12) \cdot 12 + 10 \cdot 13$$

↑ кол-во "супер-строк" (чётная + нечётная строки)

Зависит от чётности/нечётности y в строке (см. выше)

$$(10 \cdot 13 + 9 \cdot 12) \cdot 12 + 130 = (130 + 108) \cdot 12 + 130 = 238 \cdot 12 + 130 =$$

$$= 2856 + 130 = 2986$$

Ответ:

$\times 238$
 $\quad 12$

 $+ 476$
 $\quad 238$

 2856



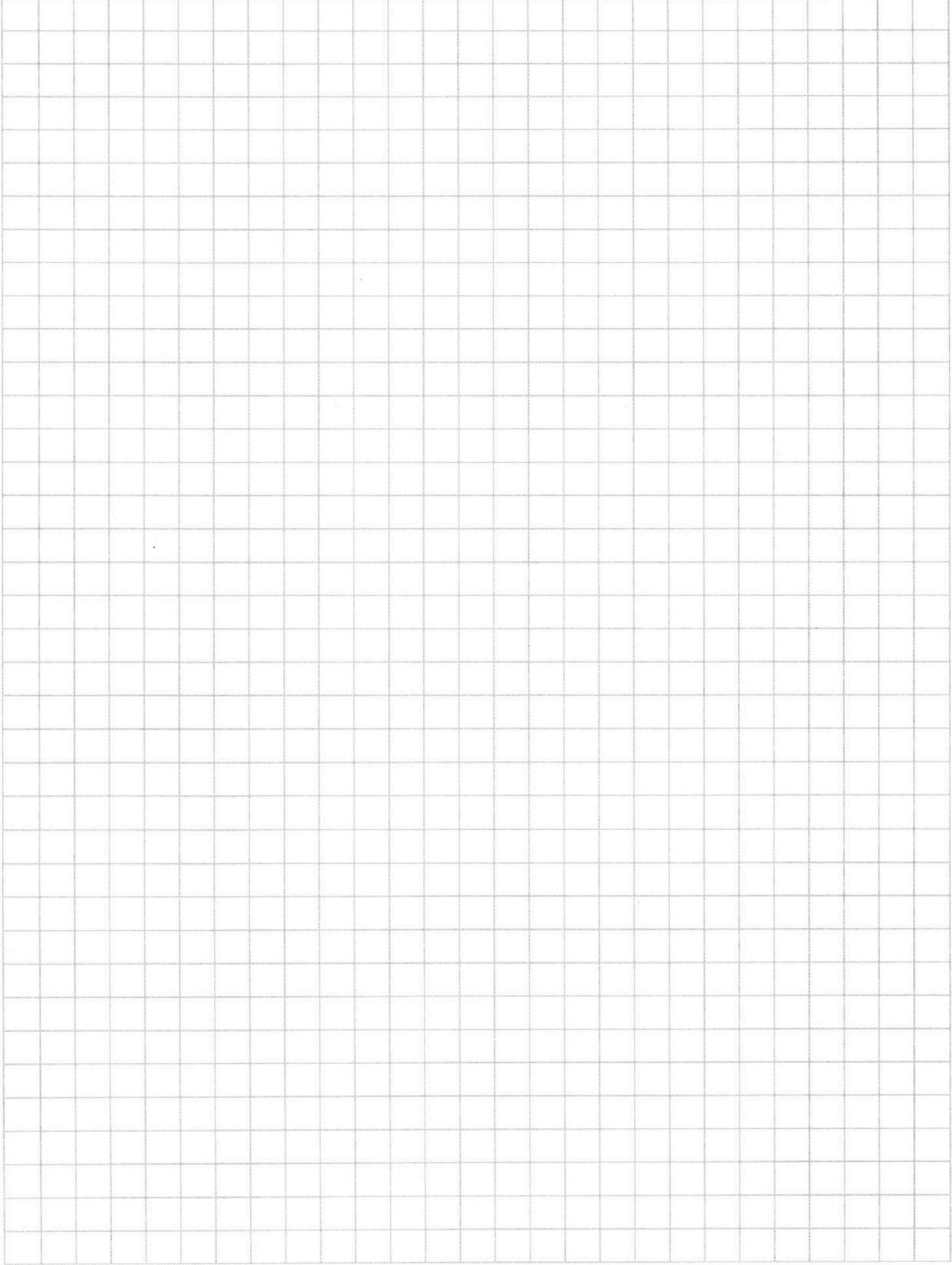
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



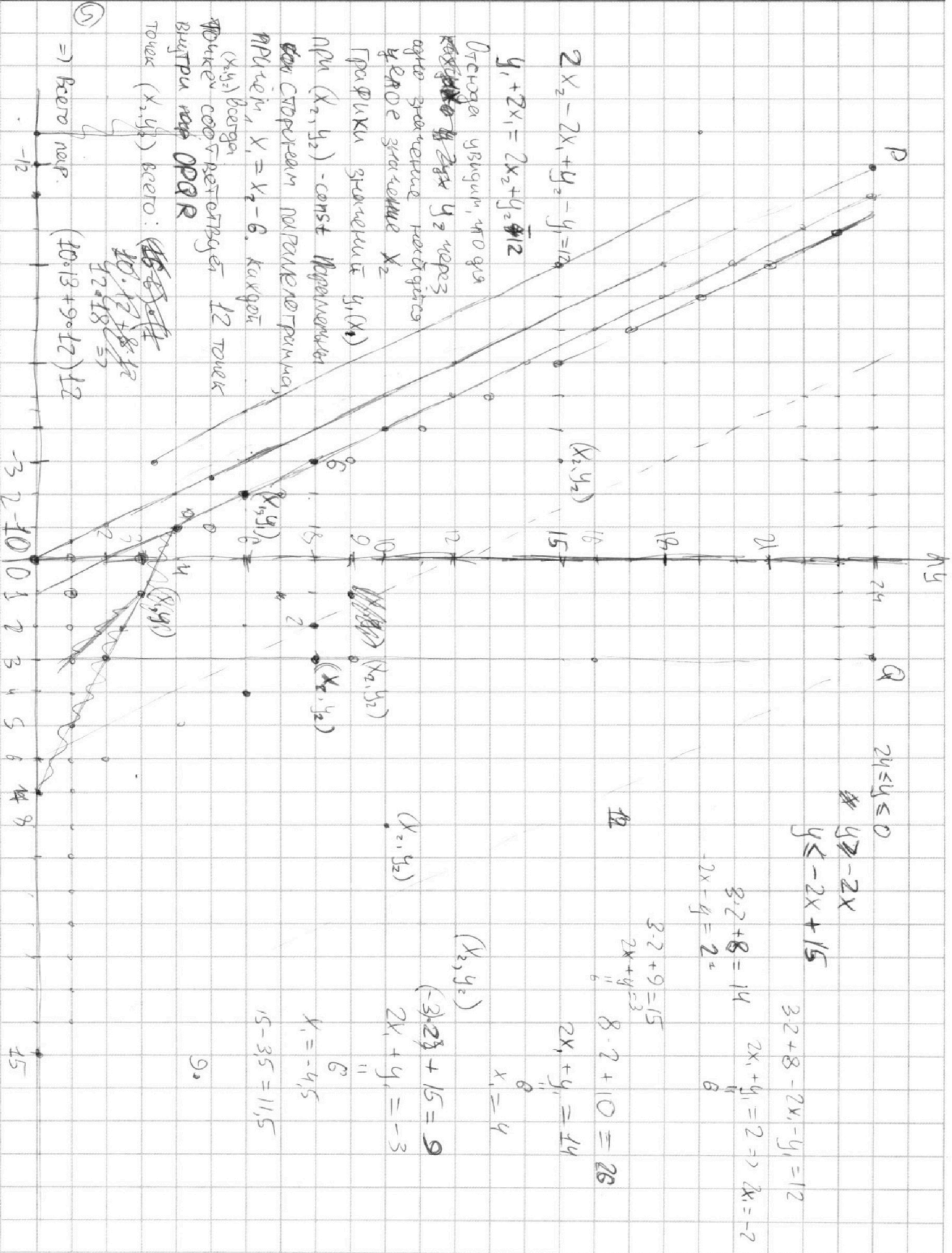
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



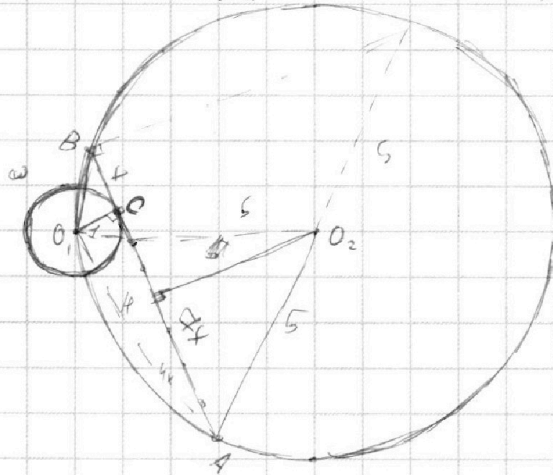
② $(a, b) = 1$

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$$a+b \stackrel{m}{=} m$$

$a+b = k \cdot m$, где $k, m \in \mathbb{N}$, (на m , если $a+b$ можно сократить, то $(a+b)^2 - 8ab = m$)
 $\Rightarrow 8ab = m$, $a+b \neq a, b$ т.к. иначе $(a, b) \neq 1 \Rightarrow (a+b) \neq 8$

③

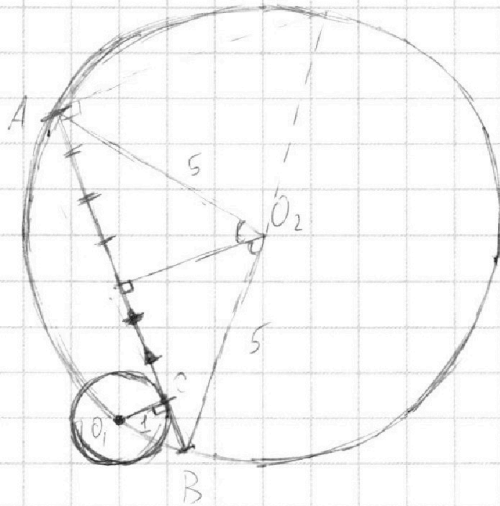
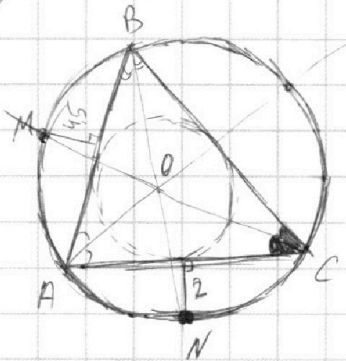


O_2H - перпендикуляр к $[AB]$
 $|BH| = |AH|$ (перпендикуляр через центр окр. к хорде)
 $O_1C \perp AB$ т.к. AB - кас.

Проведем $[O_1O_2]$ и $[O_2A]$,
 $|O_1O_2| = |O_2A| = 5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow |O_1A| = 5$

④ $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 3x$

⑦





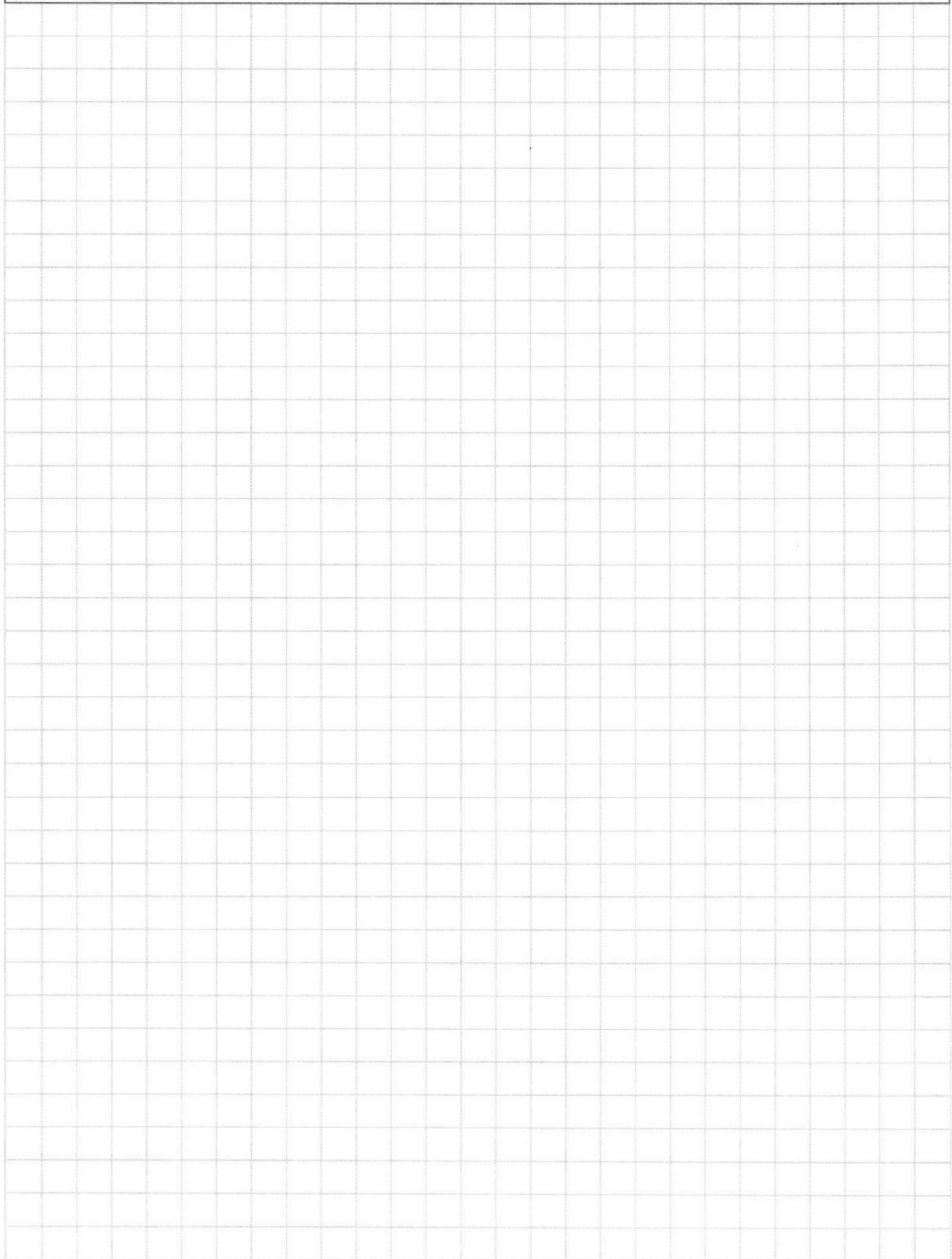
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





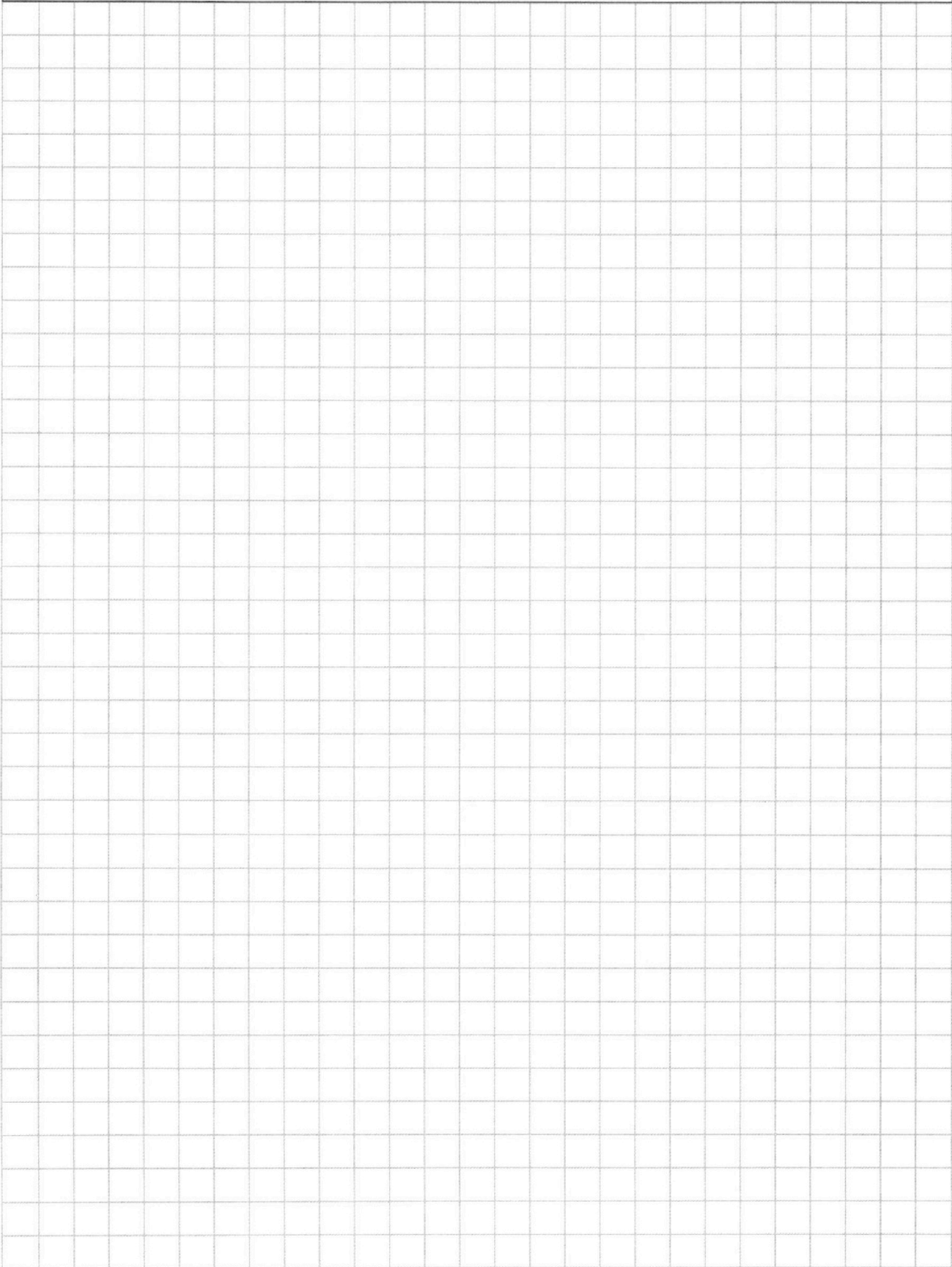
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





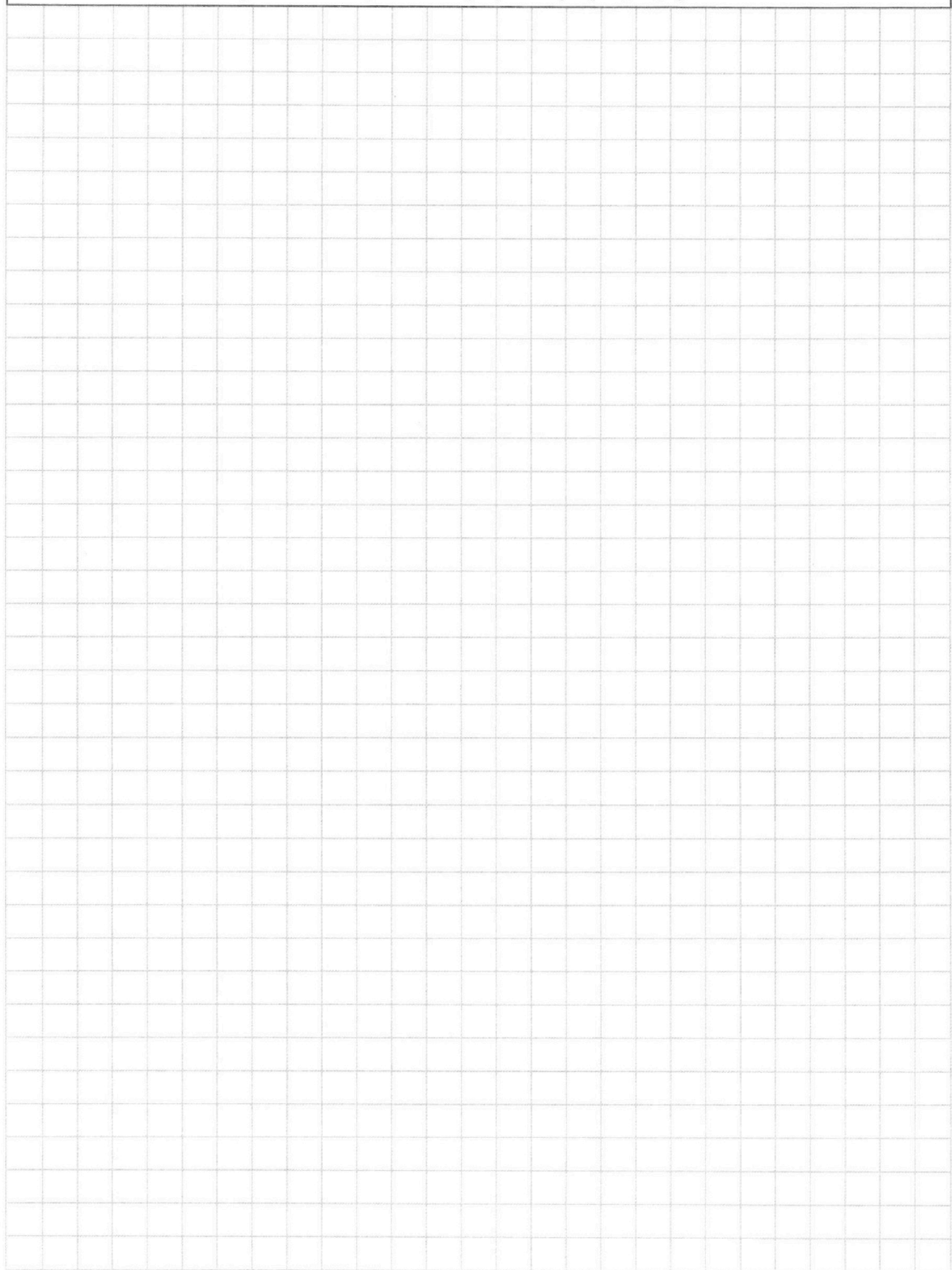
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

