



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{14} 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} 7^{14}$$

$$ac: 2^{20} 7^{37}$$

\Rightarrow минимальное $abc = 2^k 7^n$

тогда $ab = 2^{14} 7^{10}$, $bc = 2^{17} 7^{14}$, $ac = 2^{20} 7^{37}$

т.к. это минимальное возможное

произведение

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 2^{20+17 \cdot 2} 7^{10+14 \cdot 2+37} = 2^{10 \cdot 2 + 17 \cdot 2} 7^{10+27 \cdot 2} = 2^{27 \cdot 2} 7^{32 \cdot 2} = (2^{27} 7^{32})^2$$

$$abc = 2^{27} 7^{32}$$

Ответ: $2^{27} 7^{32}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. т.к. m - наибольшее и $a+b : m, a^2 - 6ab + b^2 : m$
 $\Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2)$

2. Найдем $\text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = m$

$$\begin{array}{r|l} a^2 - 6ab + b^2 & a+b \\ a^2 + ab & a-7b \\ \hline -7ab + b^2 & \\ -7ab - 7b^2 & \\ \hline 8b^2 & \end{array}$$

$\Rightarrow m = \text{НОД}(a$

$\& m = \text{НОД}(a+b; 8b^2)$

$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \nexists d, k \in \mathbb{Z} : ad + kb = 1$

$\Rightarrow \text{НОД}(a, b^2) = 1$

$\text{НОД}(a+b, b^2) = 1 \Rightarrow$ максимальный $m = \text{НОД}$
 $m = \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = 8$

3. Проверим такие a, b : $a = 5, b = 3$

$a+b = 8$

$a^2 - 6ab + b^2 = 25 - 6 \cdot 15 + 9 = (a-b)^2 - 4ab = 4 - 4 \cdot 15 =$
 $= 4(-14) = -8 \cdot 4$

$\Rightarrow \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = 8$

Ответ: $m = 8$

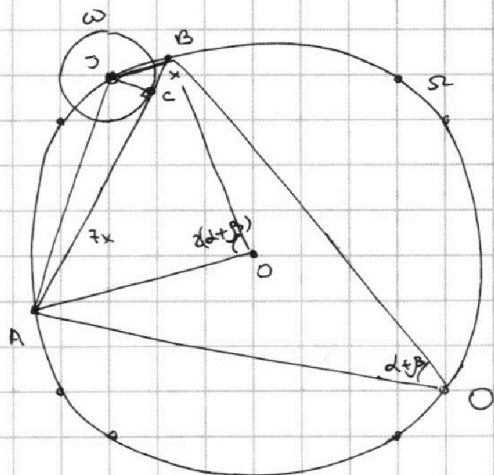
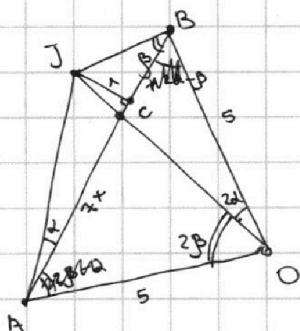
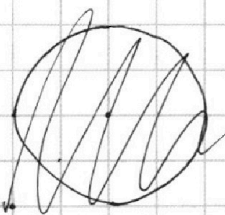
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. AB - кас $\Rightarrow \angle BCJ = \angle ACJ = \pi/2$
2. $\angle BAJ = \angle BOJ = 2\alpha$ (впис. и центр. омпр на \widehat{BJ})
 $\angle ABJ = \angle JOA = 2\beta$ (впис. и центр. омпр на \widehat{AJ})
3. $AO = OB = 5$ - радиусы Ω
 $JB = 1$ - радиус ω
 $JO = 5$ - радиус Ω
 $\Rightarrow \triangle JOA \sim \triangle BOJ - \beta\beta \Rightarrow \angle OJB = \angle OBJ, \angle JAO = \angle OJA$
4. $\triangle ABO' -$ впис в $\Omega \Rightarrow \frac{AB}{\sin(2\alpha + 2\beta)} = 10$

$$\begin{aligned} \text{в } \triangle JCB: \operatorname{tg} \beta \cdot x &= \operatorname{tg} \alpha \cdot 7x \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 7 \operatorname{tg} \alpha \\ \text{в } \triangle JAC: \sin \beta \cos \alpha &= 7 \sin \alpha \cos \beta \\ \Rightarrow AB &= 10 (\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta) = 80 \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

5. ~~в~~ $\triangle JAC: 1 = JA \sin \alpha$, $\triangle JBA -$ впис. в Ω
 $\Rightarrow JA = 10$

$$\begin{aligned} \Rightarrow JA &= 10 \sin \beta = 10 \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \sin \beta \\ 1 - \frac{JA^2}{100} &= \cos^2 \beta \Rightarrow \frac{100 - JA^2}{100} = \cos^2 \beta \end{aligned}$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{100 - JA^2}}{10} = \frac{\sqrt{100 - \sin^2 \alpha}}{10} = \frac{\sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1}}{10 \sin \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

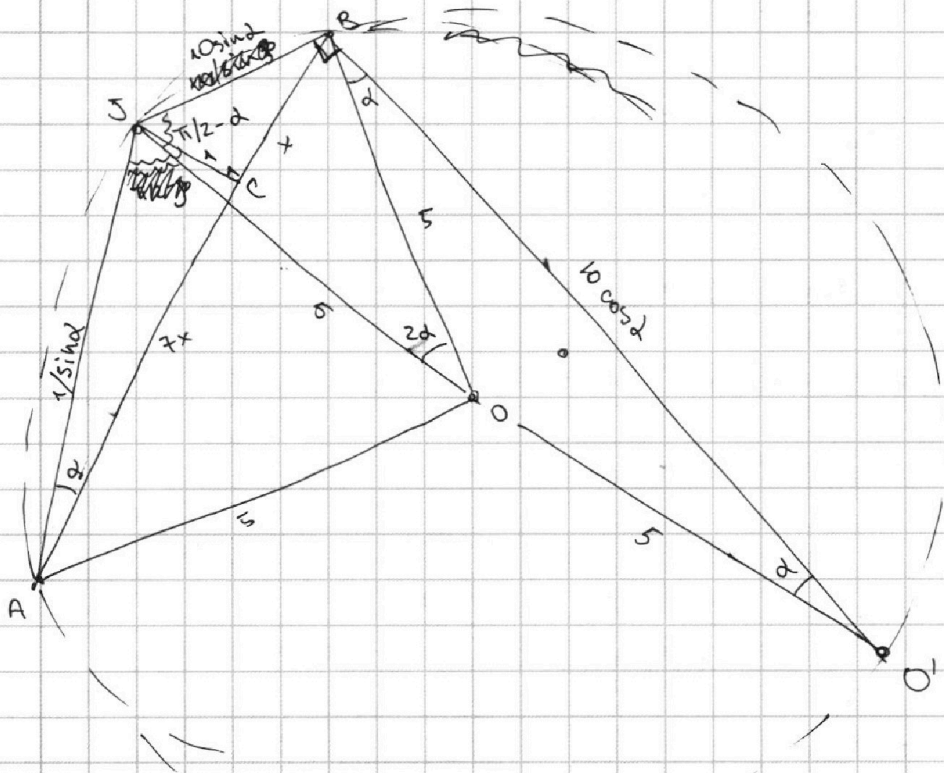
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5. (сферический)

$$\Rightarrow \cos \beta \sin \alpha = \frac{\sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1}}{10}$$

$$\Rightarrow AB = 8 \sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1}$$



6. ~~ABO~~. ~~по косинусам~~ $25 = 25 + 100 \sin^2 \alpha - 2 \cos(\pi/2 - \alpha) \cdot 5 \cdot 10 \sin \alpha$
 $100 \sin^2 \alpha = 100 \sin^2 \alpha$

6. $\triangle JAC \sim \triangle JBO'$ ($\angle O' = \angle A, \angle B = \angle C$)

$$\Rightarrow \frac{10 \cos \alpha}{7x} = \frac{10 \sin \alpha}{1} \Rightarrow 7x = \frac{10}{\tan \alpha} \Rightarrow AB = \frac{8}{7} \frac{10}{\tan \alpha}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{8}{7} \frac{10}{\tan \alpha} = 8 \sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1}$$

$$\frac{8}{7} \frac{10}{\tan \alpha} = 8 \sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{27 \sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1} \cos \alpha}{10}$$

$$\sin^2 \alpha = 49 (100 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

$$1 + 48 \cos^2 \alpha = 4900 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 4900 (1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha$$

4/12

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6. (продолжение)

$$\begin{cases} 1 + 48\cos^2\alpha = 4900\cos^2\alpha - 4900\cos^4\alpha \\ 4900\cos^4\alpha - 4852\cos^2\alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$AB = \frac{8}{7\operatorname{tg}\alpha} = 8\sqrt{100\sin^2\alpha - 1}$$

$$7\operatorname{tg}\alpha \sqrt{100\sin^2\alpha - 1} = 1$$

$$\frac{7^2\sin^2\alpha(100\sin^2\alpha - 1)}{1 - \sin^2\alpha} = 1$$

$$(7 \cdot 10)^2 \sin^4\alpha - 7^2 \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$70^2 \sin^4\alpha - 48 \sin^2\alpha + 1 = 0$$

$$D = 6^2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 70^2 = 2^8 \cdot 3^2 + 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 =$$

$$= 2^4 (2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{48 \pm \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 70^2} \approx \dots \in [0; 1]$$

$$\sin^2\alpha = \frac{2^4 \cdot 3}{2^3 \cdot 7^2 \cdot 5^2} \pm \frac{\sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{12 + \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2}$$

$$AB = 8 \sqrt{100 \frac{12 + \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2} - 1}$$

$$AB = \frac{8}{7} \sqrt{424 + \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2} - 49} = \frac{8}{7} \sqrt{\sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2} - 25}$$

$$2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 160 - 16 = 144$$

$$5^2 \cdot 7^2 = 25 \cdot 49 = 1250 - 25 = 1225$$

$$\Rightarrow 2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2 = 1369 \approx 37^2$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 1369 \\ \hline 1369 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$AB = \frac{8}{7} \sqrt{\sqrt{1369} - 25}$$

Ответ: $AB = \frac{8}{7} \sqrt{\sqrt{1369} - 25}$

5/12

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 10

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

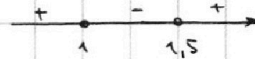
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$ ОДЗ: $(x-1)(2x-3) \geq 0$
 $\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$



2. $a = 2x^2 + 2x + 1 \quad | \Rightarrow \quad a + b = 2x^2 - 5x + 3$
 $b = 2 - 7x$ $x \in \mathbb{R}(-\infty; 1] \cup [1.5; +\infty)$
 $2x^2 + 2x + 1 > 0$, м.к.
 $\mathcal{D} < 0, \mathcal{Z} > 0$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \quad | \uparrow^2$ м.к. по ОДЗ $a+b \geq 0, a \geq 0$

$a+b+a-2\sqrt{a^2+ab} = b$

$a = \sqrt{a^2+ab} \quad | \uparrow^2$, м.к. по ОДЗ $a+b \geq 0, a \geq 0 \Rightarrow a^2+ab \geq 0$

$a^2 = a^2 + ab$

$ab = 0$

3. $ab = 0 \Rightarrow (2x^2 + 2x + 1)(2 - 7x) = 0$

* $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$, м.к. $\mathcal{D} < 0$ и $\mathcal{Z} > 0$

$\Rightarrow 2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} < 1 \Rightarrow$ подходит по ОДЗ

Ответ: $x = 2/7$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

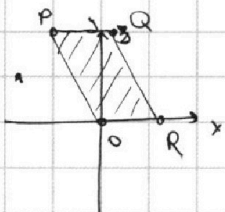
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. $O(0,0)$
 $P(-12; 24)$
 $Q(3; 24)$
 $R(15; 0)$



~~Для~~ Зададим прямые,
которые ограничивают
кар-ш

$$PQ: y = 24$$

$$OR: y = 0$$

$$PO: y = -2x$$

$$RQ: y = -2x + 30$$

2. Зададим условия того, что точка $M(x, y) \in PQRO$

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 24 \\ -2x \leq y \leq -2x + 30 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y \in [0; 24] \\ 2x + y \in [0; 30] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y \in [0; 24] \\ x \in [0; 15] \\ 2x + y \in [0; 30] \end{aligned}$$

3. $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12, x_i, y_i \in \mathbb{R}$

$$y_1, y_2 \in [0; 24]$$

$$2x_1 + y_1, 2x_2 + y_2 \in [0; 30]$$

$$\Rightarrow 2x_1 + y_1 + 12 = 2x_2 + y_2 \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1 + y_1 &\in [0; 18] \\ 2x_2 + y_2 &\in [12; 30] \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } y_i \in [0; 24] \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1 &\in [0; 18] \Rightarrow x_1 \in [0; 9] \\ 2x_2 &\in [0; 30] \Rightarrow x_2 \in [0; 15] \end{aligned}$$

4. т.к. $x_1 \in [0; 9]$ Рассмотрим все значения x_1

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

3. $y + 2x = k$ - задает прямую $\parallel PO \parallel QR$,

которая пересекает Ox в $(k/2; 0)$

$$\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = (2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = k_2 - k_1 = 12$$

Заметим, что $k \in [0; 30]$, т.к. крайнее

прямые PO и QR и $k_2 - k_1 = 12$

\Rightarrow пар $(k_2; k_1)$ всего 18 штук

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4. Для которой $k = y + 2x$

Существует всего 12 точек удовлетворяющих условию, т.к. $y \in [0, 24]$

существует всего 12
точек координат, которых
целые числа

т.к. $\frac{k-y}{2} = x$

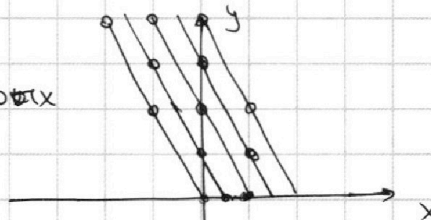
\Rightarrow если при $y, x \in \mathbb{Z}$

то при $y, + 2k, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}$

а при $y, + 2n-1, n \in \mathbb{Z}, x \notin \mathbb{Z}$

~~т.к. $k \in \mathbb{Z}$~~

\Rightarrow нам подходит половина все $y \in \mathbb{Z}$



5. Подходящих нам пар (k_2, k_1) всего 18 (н.3)

Для каждой k можно найти 12 (y, x) пар (н.4)

\Rightarrow пару (k_2, k_1) можно задать 12^2 парами

(x, y) (различными)

Всего таких пар 18 \Rightarrow всего пар $(x, y) = 12^2 \cdot 18$

$$n = 12^2 \cdot 18 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^5 = 6^4 \cdot 2 = 36^2 \cdot 2 = \\ = 2376 \cdot 2 = 4752$$

Ответ: $3^4 \cdot 2^5 = 4752$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 36 \\ \hline 216 \\ + 216 \\ \hline 2376 \end{array}$$

8/12

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b = 0$$

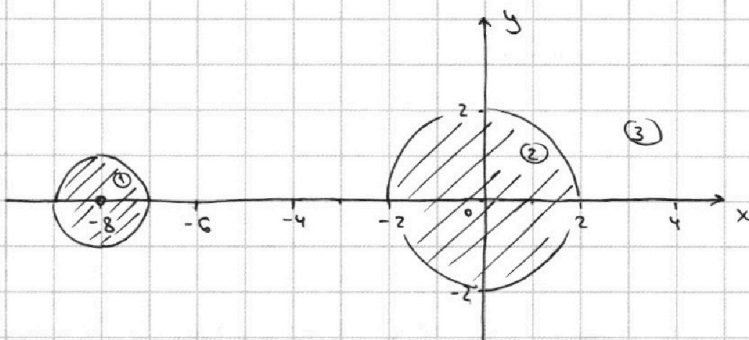
$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

1. Построим

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

1. $(x+8)^2 + y^2 = 1$ - окр-ть $\omega_1((-8, 0), 1)$

2. $x^2 + y^2 - 4 = 0$ - окр-ть $\omega_2((0, 0), 2)$



2. Расставим знаки методом областей

1) $(-8, 0)$: $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = -1 \cdot (8^2 - 4) \leq 0$ - подходит

2) $(0, 0)$: $(8^2 - 1) \cdot (-4) \leq 0$ - подходит

3) $(-3, 0)$: $(25^2 - 1)(9 - 4) > 0$ - не подходит

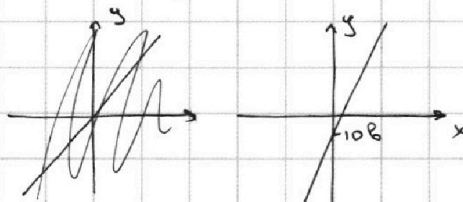
Подходящие области заштрихуем

3. $ax - y + 10b = 0$

$y = ax + 10b$ - прямая

т.к. проходящая $z/3$

$(0; 10b); (-10b/a; 0)$

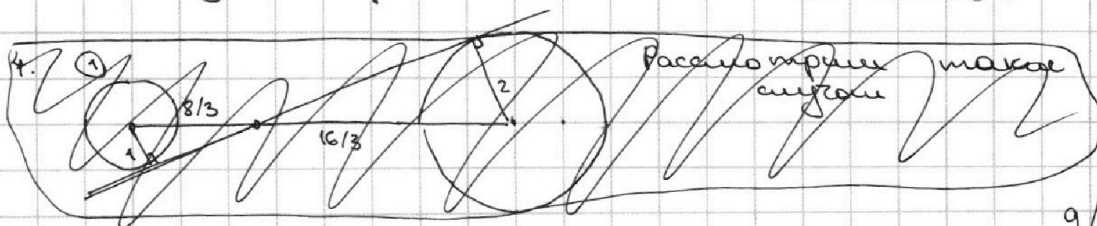


Заметим, что кр

кол-во решений системы = кол-ву ~~т.к.~~ пересечений
прямой $y = ax + 10b$ с графиком из п. 2

т) крайний случай, когда прямая кас.

т.к. там 2 круга равно 2 решения существует,
когда ~~т.~~ прямая касается обоих кругов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

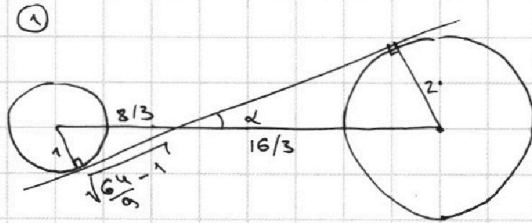
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

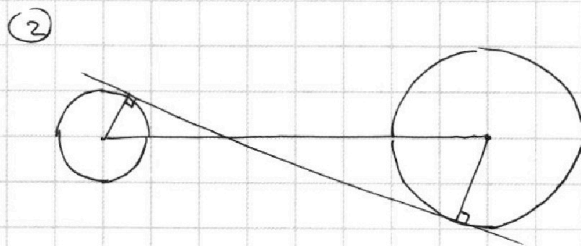
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



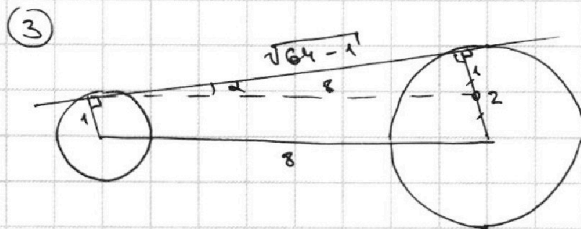
4. Рассмотрим все такие ситуации



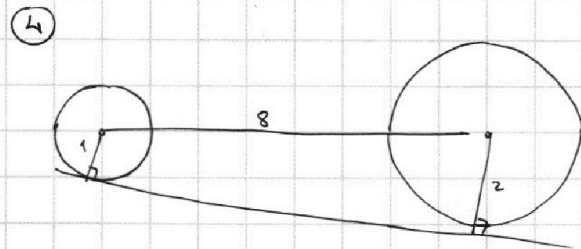
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{8} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{3}{\sqrt{64-9}} = \frac{3}{\sqrt{55}} \\ a &= \frac{3\sqrt{55}}{28} \end{aligned}$$



$$a = -\frac{3\sqrt{14}}{28}, \text{ т.к. ситуация симметрична к 4.1}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= a \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} \\ a &= \frac{\sqrt{7}}{21} \end{aligned}$$



$$a = -\frac{\sqrt{7}}{21}, \text{ т.к. ситуация симметрична к 4.3}$$

Ответ: $a \in \left\{ -\frac{3\sqrt{14}}{28}; -\frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{3\sqrt{14}}{28} \right\}$

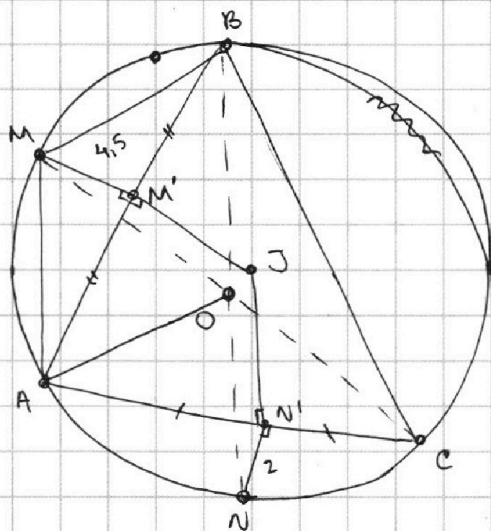
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

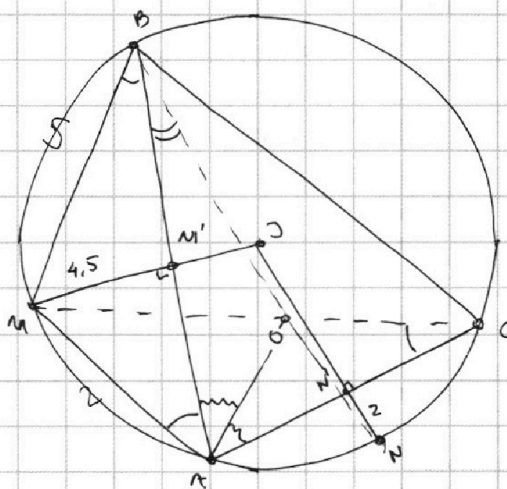
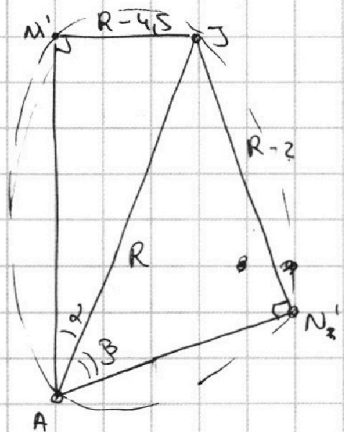
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. BN - диаметр сечения $\angle ABC$ м.к. $\checkmark AN = \checkmark CN$
 \neq и $\angle ABN$ и $\angle NBC$ - впис. опис.
на $\checkmark AN$ и $\checkmark CN$
аналогично MC - диаметр сечения $\angle BCA$
 $MC \cap BN = O$ - центр впис. опис.
 $\Rightarrow AO$ - ось.
2. $\checkmark AM = \checkmark BM \Rightarrow MA \Rightarrow MB$
 $\Rightarrow \triangle AAB \sim \triangle B \Rightarrow \triangle MAA'$
 $\Rightarrow \angle BAM = \angle MBA$ - впис. опис.
на $\checkmark AM$ и $\checkmark BM$
 $\Rightarrow MM'$ - высота, медиана
и диаметр сечения $\angle M$

3. м.к. J - центр опис. ок-ти
 \Rightarrow по п.2 $JN' \perp AC, JM' \perp BA$
 $\Rightarrow \triangle M'AN' \sim \triangle M'N'A$
 $N' \in (JN)$ (м.к. $\angle JN'A + \angle AN'N = \pi$ и с M' аналог.)

4. $M'JN'A$



м.к. $\angle M' + \angle N' = \pi \Rightarrow$ вокруг $M'JN'A$ можно описать
окружность с радиусом $R/2$ и диаметром AJ

$$\frac{\sin \alpha}{R-4,5} = \frac{1}{R} \Rightarrow \sin \alpha = 1 - \frac{4,5}{R} \quad \sin \beta = 1 - \frac{2}{R}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{(R-4,5)(4-2R)}{R^2} + \frac{(R-2)(4,5^2)}{R^2 - 9R}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{R(R-4,5) \cdot 4(1-R) + (R-2) \cdot 4,5(4,5-2R)}{R^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 5. \triangle ABM: MB &= 2R \sin \angle A & | \Rightarrow 4,5 &= 2R \sin^2 \angle A \\ \triangle AMM' &: \sin \angle A &= \frac{4,5}{MA} &= \frac{4,5}{MB} \end{aligned}$$

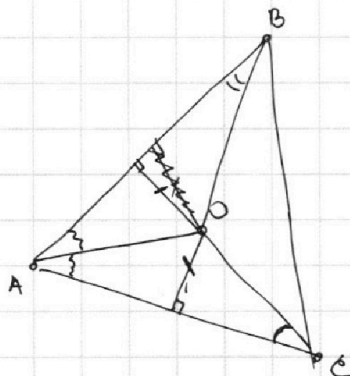
$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle A &= \angle B = \angle MCA \text{ (т. опир. на равные дуги и впис.)} \\ \Rightarrow \sin^2 \angle C/2 &= \frac{4,5}{2R} = \frac{9}{4R} = \sin^2 \angle MCA \end{aligned}$$

$$\text{аналогично } \sin^2 \angle B/2 = \frac{1}{R} = \sin^2 \angle NBA$$

6. т.к. O - г. впис. окр. $\Rightarrow AO$ - бис. -ка угла A
пусть $\angle MCA = \angle C$, $\angle NBA = \angle B$

$$\angle OAC = \angle OAB = \angle A$$

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= \pi/2, \quad \sin^2 \angle B/2 = 1/R \\ \sin^2 \angle C &= 9/4R \end{aligned}$$



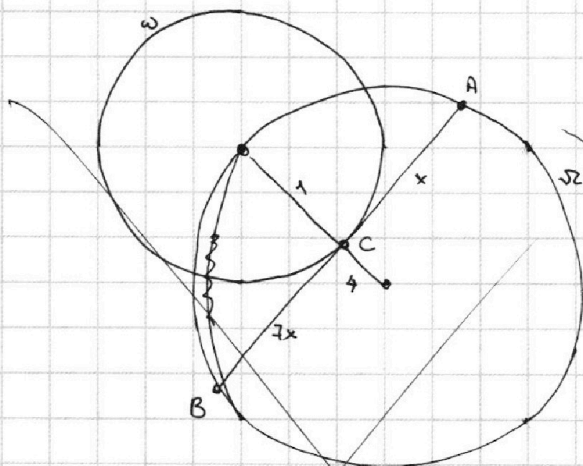
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

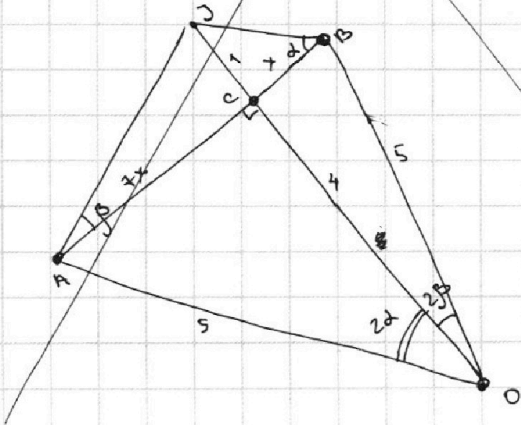
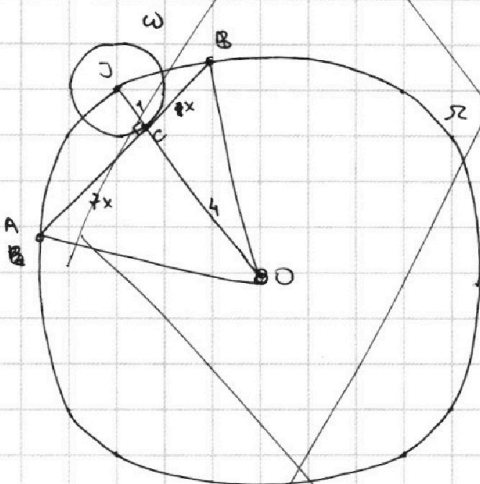
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- ~~$\angle JCA = \angle K_2$, м.к. AB - кас~~
 1. $\angle C = \pi/2$, м.к. AB - кас.
 2. $\angle JBA$ - впис. опираем. на $\overset{\frown}{AJ}$
 ~~$\angle JCA$~~ $\angle JOA$ - центр. опир. на $\overset{\frown}{AJ}$
 $\Rightarrow 2\angle JBA = \angle JOA = 2\alpha$
 аналогично $\angle BOJ = 2\angle BAJ = 2\beta$
 3. $OB = OA = 5$, м.к. радиусы R
 $JC = 1$, м.к. радиус r
 $OC = JO - JC = 4$, м.к. JO - радиус R
 радиус r
 4. $\triangle BCO$: п/у $BO^2 = OC^2 + BC^2$
 $25 = 16 + x^2 \Rightarrow x = 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~128~~ 32

$$5 + 3 = 8$$

$$a^2 + b^2 - 6ab = (a-b)^2 - 4ab = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4(1-15) = 4 \cdot 14 = 8 \cdot 7$$

① Решена $\rightarrow 4$

② ~~Доказать~~, что если $(a, b) = 1$, $(a+b; b^2) = 1$

④ Решена $\rightarrow 5$

⑥ Решена $\rightarrow 5$

③ Решена, но ответ не красивый

⑤ Решена $\rightarrow 5$

$$\begin{array}{r} 1369 \overline{) 23} \\ \underline{128} \\ 115 \\ \underline{115} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 230 \\ \underline{23} \\ 207 \end{array}$$

$$(a, b) = 1 \Rightarrow ak + bu = 1$$

\Downarrow

$$(a, b^2) = 1$$

$$(p_1 p_2 \dots p_n) \neq q_1 q_2 \dots q_k$$

$$(p_1 p_2 \dots p_n + q_1 \dots q_k; (q_1 q_2 \dots q_k)^2)$$

$$(a+b; b^2) = (a, (b-1)b)$$

$$(a+b; 8b^2) = (a, (8b-1)b) = 8b-1$$

~~$$(5, (8 \cdot 3 - 1) \cdot 3) = 5; 23 \cdot 3$$~~

$$(5, (8 \cdot 3 - 1) \cdot 3) = 5; 23 \cdot 3$$

или

$$a+b;$$

$$8; 8 \cdot 9$$

$$a, b : c$$

$$nc, kc$$

~~$$kc-d$$~~

$$(a+b; (8b-1)b - a)$$

$$\begin{array}{r} 1369 \overline{) 7} \\ \underline{7} \\ 66 \\ \underline{66} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \underline{19} \\ 17 \\ \underline{8} \\ 9 \end{array}$$

$$1 + 48 \cos^2 \alpha = 4900 (1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha$$

$$\begin{array}{r} 1369 \overline{) 17} \\ \underline{8} \\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ \underline{8} \\ 9 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = \frac{8}{7 \sin \alpha} = 10 \sin \alpha$$