



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{14} 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} 7^{14}$$

$$ac: 2^{20} 7^{37}$$

$\Rightarrow$  минимальное  $abc = 2^k 7^n$

тогда  $ab = 2^{14} 7^{10}$ ,  $bc = 2^{17} 7^{14}$ ,  $ac = 2^{20} 7^{37}$

т.к. это минимальное возможное

произведение

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 2^{20+17 \cdot 2} 7^{10+14 \cdot 2+37} = 2^{10 \cdot 2 + 17 \cdot 2} 7^{10+27 \cdot 2} = 2^{27 \cdot 2} 7^{32 \cdot 2} = (2^{27} 7^{32})^2$$

$$abc = 2^{27} 7^{32}$$

Ответ:  $2^{27} 7^{32}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. т.к.  $m$  - наибольшее и  $a+b : m, a^2 - 6ab + b^2 : m$   
 $\Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2)$

2. Найдем  $\text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = m$

$$\begin{array}{r|l} a^2 - 6ab + b^2 & a+b \\ a^2 + ab & a-7b \\ \hline -7ab + b^2 & \\ -7ab - 7b^2 & \\ \hline 8b^2 & \end{array}$$

$\Rightarrow m = \text{НОД}(a$

$\& m = \text{НОД}(a+b; 8b^2)$

$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \nexists d, k \in \mathbb{Z} : ad + kb = 1$

$\Rightarrow \text{НОД}(a, b^2) = 1$

$\text{НОД}(a+b, b^2) = 1 \Rightarrow$  максимальный  $m = \text{НОД}$   
 $m = \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = 8$

3. Проверим такие  $a, b$ :  $a = 5, b = 3$

$a+b = 8$

$a^2 - 6ab + b^2 = 25 - 6 \cdot 15 + 9 = (a-b)^2 - 4ab = 4 - 4 \cdot 15 =$   
 $= 4(-14) = -8 \cdot 4$

$\Rightarrow \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = 8$

Ответ:  $m = 8$

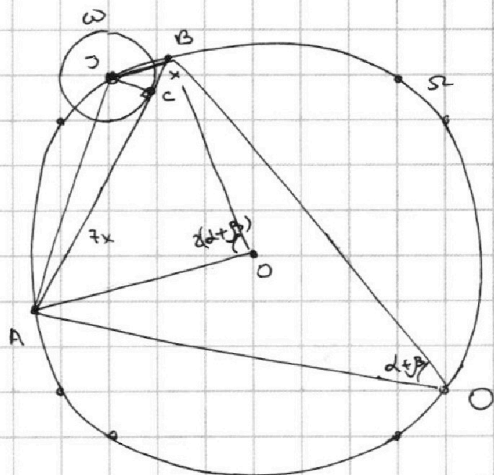
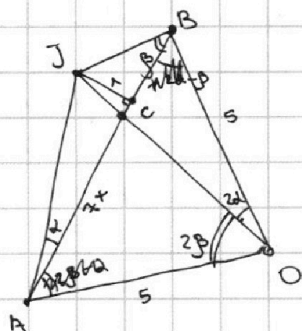
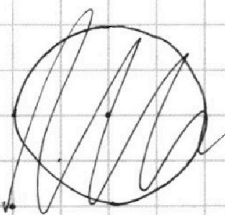
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1.  $AB$  - кас  $\Rightarrow \angle BCJ = \angle ACJ = \pi/2$
2.  $\angle BAJ = \angle BOJ = 2\alpha$  (впис. и центр. омпр на  $\widehat{BJ}$ )  
 $\angle ABJ = \angle JOA = 2\beta$  (впис. и центр. омпр на  $\widehat{AJ}$ )
3.  $AO = OB = 5$  - радиусы  $\Omega$   
 $JB = 1$  - радиус  $\omega$   
 $JO = 5$  - радиус  $\Omega$   
 $\Rightarrow \triangle JOA \sim \triangle BOJ - \beta \beta \Rightarrow \angle OJB = \angle OBJ, \angle JAO = \angle OJA$
4.  $\triangle ABO' -$  впис в  $\Omega \Rightarrow \frac{AB}{\sin(2\alpha + 2\beta)} = 10$

$$\begin{aligned} \text{в } \triangle JCB: \operatorname{tg} \beta \cdot x &= \operatorname{tg} \alpha \cdot 7x \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 7 \operatorname{tg} \alpha \\ \triangle JAC \quad \sin \beta \cos \alpha &= 7 \sin \alpha \cos \beta \\ \Rightarrow AB &= 10 (\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta) = 80 \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

5. ~~хзхз~~  $\triangle JAC: 1 = JA \sin \alpha$ ,  $\triangle JBA -$  впис. в  $\Omega$   
 $\Rightarrow JA = 10$

$$\begin{aligned} \Rightarrow JA &= 10 \sin \beta = 10 \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \sin \beta \\ 1 - \frac{JA^2}{100} &= \cos^2 \beta \Rightarrow \frac{100 - JA^2}{100} = \cos^2 \beta \\ \cos \beta &= \frac{\sqrt{100 - JA^2}}{10} = \frac{\sqrt{100 - \sin^2 \alpha}}{10} = \frac{\sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1}}{10 \sin \alpha} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

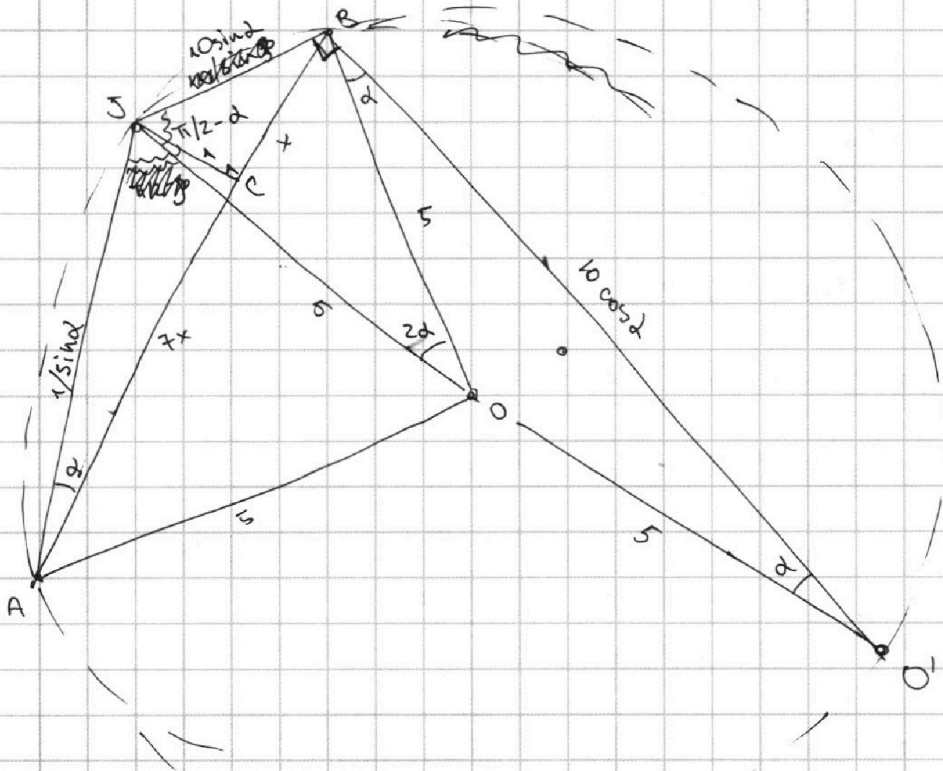
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 5. (сферический)

$$\Rightarrow \cos \beta \sin \alpha = \frac{\sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1}}{10}$$

$$\Rightarrow AB = 8 \sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1}$$



$$6. \triangle BOO'. \text{ по косинусам } 25 = 25 + 100 \sin^2 \alpha - 2 \cos(\alpha/2) \cdot 5 \cdot 10 \sin \alpha$$

$$100 \sin^2 \alpha = 100 \sin^2 \alpha$$

$$6. \triangle JAC \sim \triangle JBO' (\angle O' = \angle A, \angle B = \angle C)$$

$$\Rightarrow \frac{10 \cos \alpha}{7x} = \frac{10 \sin \alpha}{1} \Rightarrow 7x = 10 \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow AB = \frac{8}{7} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\Rightarrow AB = \frac{8 \operatorname{tg}^2 \alpha}{7} = 8 \sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1}$$

$$7 \operatorname{tg}^2 \alpha = 7 \sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{7 \sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1}}{10 \cos \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = 49 (100 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

$$1 + 48 \cos^2 \alpha = 4900 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 4900 (1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha$$

4/12

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6. (продолжение)

$$\begin{cases} 1 + 48\cos^2\alpha = 4900\cos^2\alpha - 4900\cos^4\alpha \\ 4900\cos^4\alpha - 4852\cos^2\alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$AB = \frac{8}{7\operatorname{tg}\alpha} = 8\sqrt{100\sin^2\alpha - 1}$$

$$7\operatorname{tg}\alpha \sqrt{100\sin^2\alpha - 1} = 1$$

$$\frac{7^2\sin^2\alpha(100\sin^2\alpha - 1)}{1 - \sin^2\alpha} = 1$$

$$(7 \cdot 10)^2 \sin^4\alpha - 7^2 \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$70^2 \sin^4\alpha - 48 \sin^2\alpha + 1 = 0$$

$$D = 6^2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 70^2 = 2^8 \cdot 3^2 + 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 =$$

$$= 2^4 (2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{48 \pm \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 70^2} \approx 0, \in [0; 1]$$

$$\sin^2\alpha = \frac{2^4 \cdot 3}{2^3 \cdot 7^2 \cdot 5^2} \pm \frac{\sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{12 + \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2}$$

$$AB = 8 \sqrt{100 \frac{12 + \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2} - 1}$$

$$AB = \frac{8}{7} \sqrt{424 + \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2} - 49} = \frac{8}{7} \sqrt{\sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2} - 25}$$

$$2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 160 - 16 = 144$$

$$5^2 \cdot 7^2 = 25 \cdot 49 = 1250 - 25 = 1225$$

$$\Rightarrow 2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2 = 1369 \approx 37^2$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 1369 \\ \hline 1369 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$AB = \frac{8}{7} \sqrt{\sqrt{1369} - 25}$$

$$\text{Ответ: } AB = \frac{8}{7} \sqrt{\sqrt{1369} - 25}$$

5/12

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 10

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

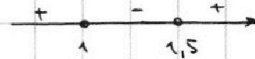
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$  ОДЗ:  $(x-1)(2x-3) \geq 0$   
 $\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$



2.  $a = 2x^2 + 2x + 1 \quad | \Rightarrow \quad a + b = 2x^2 - 5x + 3$   
 $b = 2 - 7x$   $x \in \mathbb{R}(-\infty; 1] \cup [1.5; +\infty)$   
 $2x^2 + 2x + 1 > 0$ , м.к.  
 $\mathbb{D} < 0, \mathbb{Z} > 0$

$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \quad | \uparrow^2$  м.к. по ОДЗ  $a+b \geq 0, a \geq 0$

$a+b+a-2\sqrt{a^2+ab} = b$

$a = \sqrt{a^2+ab} \quad | \uparrow^2$ , м.к. по ОДЗ  $a+b \geq 0, a \geq 0 \Rightarrow a^2+ab \geq 0$

$a^2 = a^2 + ab$

$ab = 0$

3.  $ab = 0 \Rightarrow (2x^2 + 2x + 1)(2 - 7x) = 0$

\*  $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$ , м.к.  $\mathbb{D} < 0$  и  $\mathbb{Z} > 0$

$\Rightarrow 2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} < 1 \Rightarrow$  подходит по ОДЗ

Ответ:  $x = 2/7$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

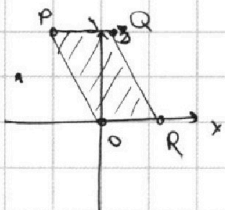
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1.  $O(0,0)$   
 $P(-12; 24)$   
 $Q(3; 24)$   
 $R(15; 0)$



~~Для~~ Зададим прямые,  
которые ограничивают  
кар-ш

$$PQ: y = 24$$

$$OR: y = 0$$

$$PO: y = -2x$$

$$RQ: y = -2x + 30$$

2. Зададим условия того, что точка  $M(x, y) \in PQRO$

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 24 \\ -2x \leq y \leq -2x + 30 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y \in [0; 24] \\ 2x + y \in [0; 30] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} y \in [0; 24] \\ x \in [0; 15] \\ 2x + y \in [0; 30] \end{aligned}$$

3.  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12, x_i, y_i \in \mathbb{R}$

$$y_1, y_2 \in [0; 24]$$

$$2x_1 + y_1, 2x_2 + y_2 \in [0; 30]$$

$$\Rightarrow 2x_1 + y_1 + 12 = 2x_2 + y_2 \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1 + y_1 \in [0; 18] \\ 2x_2 + y_2 \in [12; 30] \end{aligned}$$

$$\text{н.к. } y_i \in [0; 24] \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1 \in [0; 18] \Rightarrow x_1 \in [0; 9] \\ 2x_2 \in [0; 30] \Rightarrow x_2 \in [0; 15] \end{aligned}$$

4. н.к.  $x_1 \in [0; 9]$  Рассмотрим все значения  $x_1$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

3.  $y + 2x = k$  - задает прямую  $\parallel PO \parallel QR$ ,

которая пересекает  $Ox$  в  $(k/2; 0)$

$$\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = (2x_2 + y_2) - (2x_1 - y_1) = k_2 - k_1 = 12$$

Заметим, что  $k \in [0; 30]$ , н.к. крайнее

прямые  $PO$  и  $QR$  и  $k_2 - k_1 \in [0; 30]$

$\Rightarrow$  пар  $(k_2; k_1)$  всего 18 штук

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4. Для которой  $k = y + 2x$

Существует всего 12 точек удовлетворяющих условию, т.к.  $y \in [0, 24]$

существует всего 12  
точек координат, которых  
целые числа

т.к.  $\frac{k-y}{2} = x$

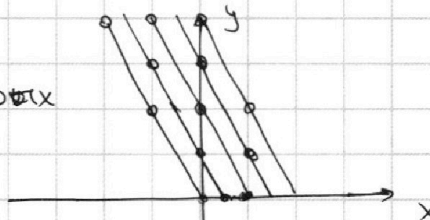
$\Rightarrow$  если при  $y, x \in \mathbb{Z}$

то при  $y, + 2k, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}$

а при  $y, + 2n-1, n \in \mathbb{Z}, x \notin \mathbb{Z}$

~~то  $k \in \mathbb{Z}$~~

$\Rightarrow$  нам подходит половина все  $y \in \mathbb{Z}$



5. Подходящих нам пар  $(k_2, k_1)$  всего 18 (н.3)

Для каждой  $k$  можно найти 12  $(y, x)$  пар (н.4)

$\Rightarrow$  пару  $(k_2, k_1)$  можно задать  $12^2$  парами

$(x, y)$  (различными)

Всего таких пар 18  $\Rightarrow$  всего пар  $(x, y) = 12^2 \cdot 18$

$$n = 12^2 \cdot 18 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^5 = 6^4 \cdot 2 = 36^2 \cdot 2 = 2376 \cdot 2 = 4752$$

Ответ:  $3^4 \cdot 2^5 = 4752$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 36 \\ \hline 216 \\ + 216 \\ \hline 2376 \end{array}$$

8/12

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax - y + 10b = 0$$

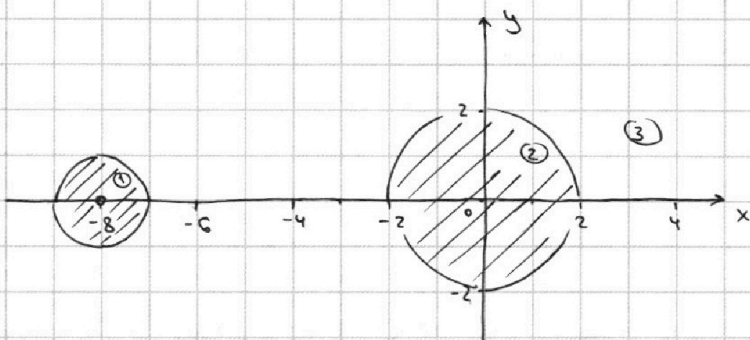
$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

1. Построим

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

1.  $(x+8)^2 + y^2 = 1$  - окр-ть  $\omega_1(( -8, 0), 1)$

2.  $x^2 + y^2 = 4$  - окр-ть  $\omega_2((0, 0), 2)$



2. Расставим знаки методом областей

1)  $(-8, 0)$ :  $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = -1 \cdot (8^2 - 4) \leq 0$  - подходит

2)  $(0, 0)$ :  $(8^2 - 1) \cdot (-4) \leq 0$  - подходит

3)  $(-3, 0)$ :  $(25^2 - 1)(9 - 4) > 0$  - не подходит

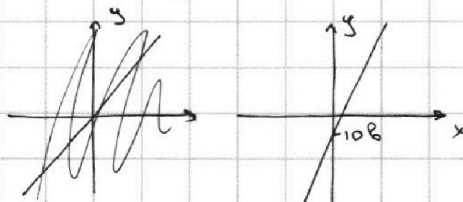
Подходящие области заштрихуем

3.  $ax - y + 10b = 0$

$y = ax + 10b$  - прямая

т.к. проходящая  $z/3$

$(0; 10b); (-10b/a; 0)$

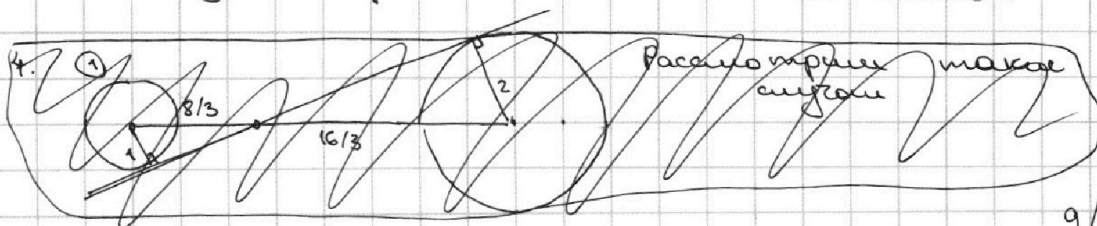


Заметим, что кр

кол-во решений системы = кол-ву ~~т.к.~~ пересечений  
прямой  $y = ax + 10b$  с графиком из п. 2

т) крайний случай, когда прямая кас.

т.к. там 2 круга равно 2 решения существует,  
когда ~~т.~~ прямая касается обоих кругов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

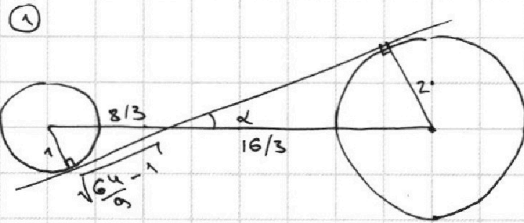
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



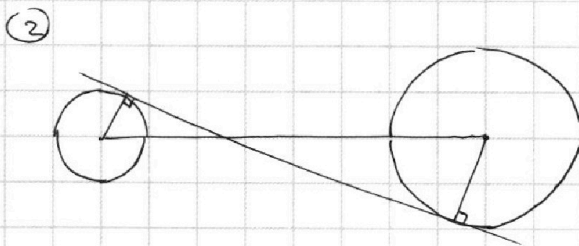
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



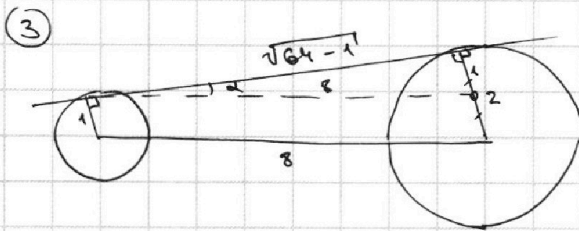
4. Рассмотрим все такие ситуации



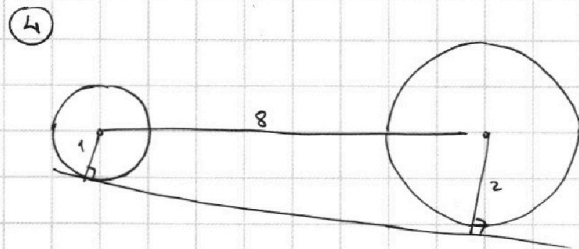
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{8/3} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{3}{\sqrt{64-9}} = \frac{3}{\sqrt{55}} \\ a &= \frac{3\sqrt{14}}{28} \end{aligned}$$



$$a = -\frac{3\sqrt{14}}{28}, \text{ т.к. ситуация симметрична к 4.1}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= a \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}} \\ a &= \frac{\sqrt{7}}{21} \end{aligned}$$



$$a = -\frac{\sqrt{7}}{21}, \text{ т.к. ситуация симметрична к 4.3}$$

Ответ:  $a \in \left\{ -\frac{3\sqrt{14}}{28}; -\frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{3\sqrt{14}}{28} \right\}$

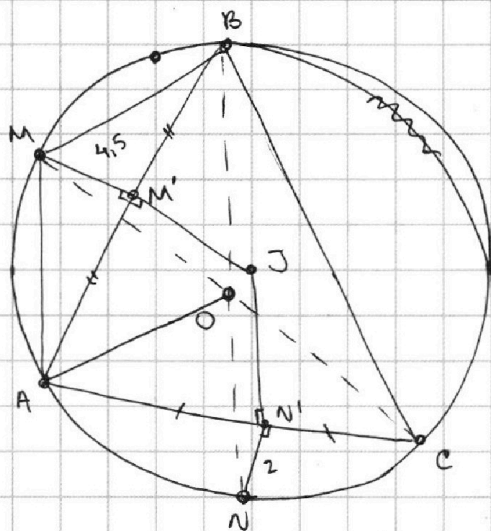
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

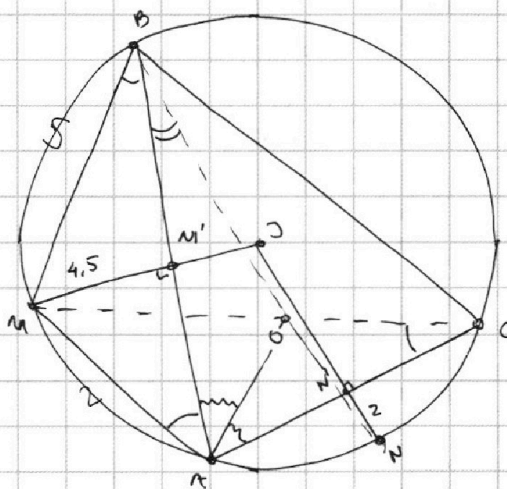
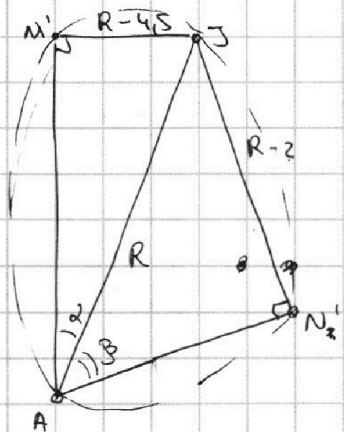
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1.  $BN$  - диаметр сечения  $\angle ABC$  м.к.  $\checkmark AN = \checkmark CN$   
 $\neq$  и  $\angle ABN$  и  $\angle NBC$  - впис. оугр.  
на  $\checkmark AN$  и  $\checkmark CN$   
аналогично  $MC$  - диаметр сечения  $\angle BCA$   
 $MC \cap BN = O$  - центр впис. окр.  
 $\Rightarrow AO$  - ось.
2.  $\checkmark AM = \checkmark BM \Rightarrow MA \Rightarrow MB$   
 $\Rightarrow \triangle MAB$  - равносторонний  $\Rightarrow MM'$   
 $\Rightarrow \angle BAM = \angle MBA$  - впис. оугр.  
на  $\checkmark AM$  и  $\checkmark BM$   
 $\Rightarrow MM'$  - высота, медиана  
и диаметр сечения  $\angle M$

3. м.к.  $J$  - центр впис. окр.-ти аналогично  $NN'$  - высота,  
 $\Rightarrow$  по п.2  $JN' \perp AC$ ,  $JM' \perp BA$  медиана, диаметр сечения  
 $\Rightarrow \angle M'AN' = \angle M'BN'$   $M' \in (JM')$   
 $N' \in (JN)$  (м.к.  $\angle JN'A + \angle AN'N = \pi$  и с  $M'$  аналогично.)

4.  $M'JN'A$



м.к.  $\angle M' + \angle N' = \pi \Rightarrow$  вокруг  $M'JN'A$  можно описать  
окружность с радиусом  $R/2$  и диаметром  $AJ$

$$\frac{\sin \alpha}{R-4.5} = \frac{1}{R} \Rightarrow \sin \alpha = 1 - \frac{4.5}{R} \quad \sin \beta = 1 - \frac{2}{R}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{(R-4.5)(4-2R)}{R^2} + \frac{(R-2)(4.5^2)}{R^2 - 9R}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{R(R-4.5) \cdot 4(1-R) + (R-2) \cdot 4.5(4.5-2R)}{R^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 5. \triangle ABM: MB &= 2R \sin \angle A & | \Rightarrow 4,5 = 2R \sin^2 \angle A \\ \triangle AMM' &: \sin \angle A = \frac{4,5}{MA} = \frac{4,5}{MB} \end{aligned}$$

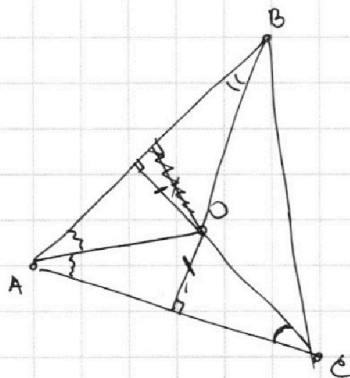
$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle A &= \angle B = \angle MCA \text{ (т. опир. на равные дуги и впис.)} \\ \Rightarrow \sin^2 \angle C/2 &= \frac{4,5}{2R} = \frac{9}{4R} = \sin^2 \angle MCA \end{aligned}$$

$$\text{аналогично } \sin^2 \angle B/2 = \frac{1}{R} = \sin^2 \angle NBA$$

6. т.к.  $O$  - г. впис. окр.  $\Rightarrow AO$  - бис. -ка угла  $A$   
пусть  $\angle MCA = \angle C$ ,  $\angle NBA = \angle B$

$$\angle OAC = \angle OAB = \angle A$$

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= \pi/2, \quad \sin^2 \angle B/2 = 1/R \\ \sin^2 \angle C &= 9/4R \end{aligned}$$



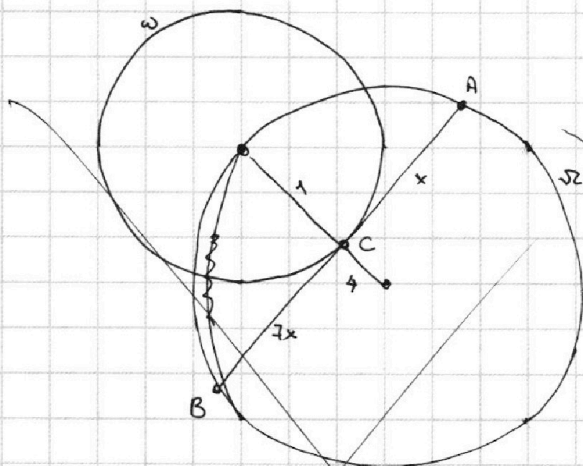
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

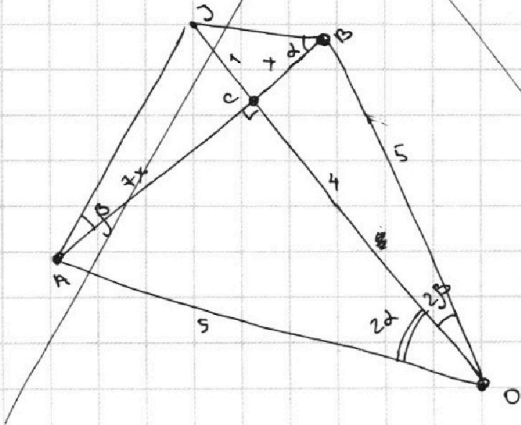
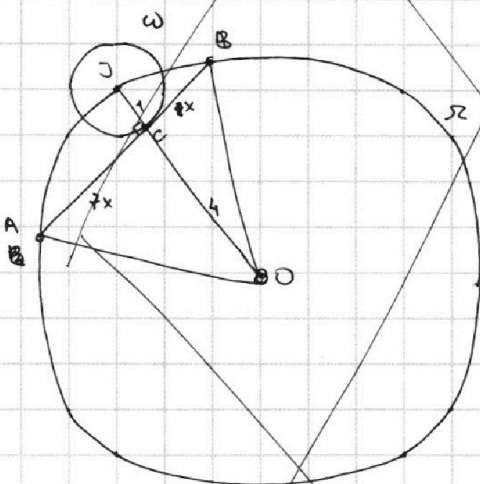
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- ~~$\angle JCA = \angle K_2$ , м.к.  $AB$  - кас~~  
 1.  $\angle C = \pi/2$ , м.к.  $AB$  - кас.  
 2.  $\angle JBA$  - впис. опираем. на  $\overset{\frown}{AJ}$   
 ~~$\angle JCA$~~   $\angle JOA$  - центр. опир. на  $\overset{\frown}{AJ}$   
 $\Rightarrow 2\angle JBA = \angle JOA = 2\alpha$   
 аналогично  $\angle BOJ = 2\angle BAJ = 2\beta$   
 3.  $OB = OA = 5$ , м.к. радиусы  $R$   
 $JC = 1$ , м.к. радиус  $r$   
 $OC = JO - JC = 4$ , м.к.  $JO$  - радиус  $R$   
 радиус  $r$   
 4.  $\triangle BCO$ : п/у  $BO^2 = OC^2 + BC^2$   
 $25 = 16 + x^2 \Rightarrow x = 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~128~~ 32

$$5 + 3 = 8$$

$$a^2 + b^2 - 6ab = (a-b)^2 - 4ab = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4(1-15) = 4 \cdot 14 = 8 \cdot 7$$

① Решена  $\rightarrow 4$

② ~~Доказать~~, что если  $(a, b) = 1$ ,  $(a+b; b^2) = 1$

④ Решена  $\rightarrow 5$

⑥ Решена  $\rightarrow 5$

③ Решена, но ответ не красивый

⑤ Решена  $\rightarrow 5$

$$\begin{array}{r} 1369 \overline{) 23} \\ \underline{128} \phantom{0} \\ 115 \\ \underline{115} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 230 \\ \underline{23} \\ 207 \end{array}$$

$$(a, b) = 1 \Rightarrow ak + bu = 1$$

$\Downarrow$

$$(a, b^2) = 1$$

$$(p_1 p_2 \dots p_n) \neq q_1 q_2 \dots q_k$$

$$(p_1 p_2 \dots p_n + q_1 \dots q_k; (q_1 q_2 \dots q_k)^2)$$

$$(a+b; b^2) = (a, (b-1)b)$$

$$(a+b; 8b^2) = (a, (8b-1)b) = 8b-1$$

~~$$(5, (8 \cdot 3 - 1) \cdot 3) = 5; 23 \cdot 3$$~~

$$(5, (8 \cdot 3 - 1) \cdot 3) = 5; 23 \cdot 3$$

или

$$a+b;$$

$$8; 8 \cdot 9$$

$$a, b : c$$

$$nc, kc$$

~~$$kc-d$$~~

$$(a+b; (8b-1)b - a)$$

$$\begin{array}{r} 1369 \overline{) 7} \\ \underline{7} \phantom{0} \\ 66 \\ \underline{66} \\ 39 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \underline{17} \\ 8 \\ \underline{56} \\ 8 \\ \underline{136} \end{array}$$

$$1 + 48 \cos^2 \alpha = 4900 (1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha$$

$$\begin{array}{r} 1369 \overline{) 17} \\ \underline{8} \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ \underline{8} \\ 9 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = \frac{8}{7 \sin \alpha} = 10 \sin \alpha$$