



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
- [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

- [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

⇒ минимальное $abc = 2^k \cdot 7^n$

тогда $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$, $bc = 2^{17} \cdot 7^{17}$, $ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$

и.к. это минимальное возможное

произведение

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 2^{20+17 \cdot 2} \cdot 7^{10+17+37} = 2^{10 \cdot 2 + 17 \cdot 2} \cdot 7^{10+27+2} = 2^{22 \cdot 2} \cdot 7^{32+2} = (2^{24} \cdot 7^{32})^2$$

$$abc = 2^{27} \cdot 7^{32}$$

Ответ: $2^{27} \cdot 7^{32}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \text{ И.в. } m - \text{ наибольшее и } a+b : m, a^2 - 6ab + b^2 : m \\ \Rightarrow m = \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2)$$

$$2. \text{ Найдем } \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = \cancel{2}m$$

$$\begin{array}{r} - a^2 - 6ab + b^2 \\ \hline - a^2 + ab \\ \hline - 7ab + b^2 \\ \hline - 7ab - 7b^2 \\ \hline 8b^2 \end{array} \quad \Rightarrow m = \cancel{\text{НОД}}(a) \\ \cancel{2}m = \text{НОД}(a+b; 8b^2)$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \exists x, k \in \mathbb{Z}: ax + kb = 1$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a, b^2) = 1$$

$$\text{НОД}(a+b, b^2) = 1 \Rightarrow \text{максимальный } m = \text{НОД}$$

$$m = \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = 8$$

$$3. \text{ Подберем такие } a, b: a = 5, b = 3$$

$$a+b = 8$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = 25 - 6 \cdot 15 + 9 = (a-b)^2 - 4ab = 4 - 4 \cdot 15 =$$

$$= 4(-14) = -8 \cdot 4$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = 8$$

Ответ: ~~2~~ $m = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

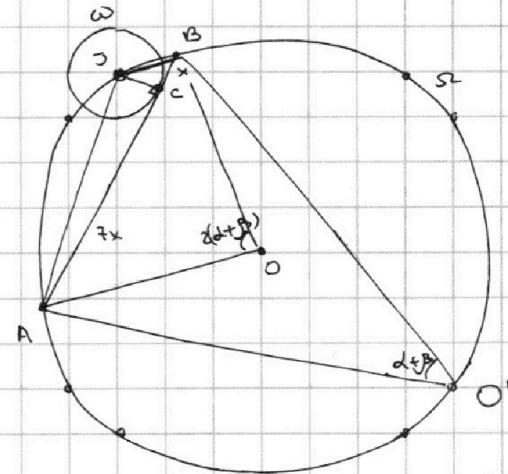
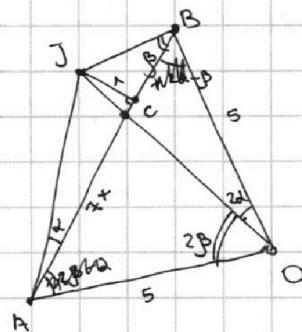
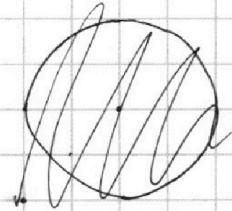
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1. AB - \text{кос} \Rightarrow \angle BCJ = ACJ = \pi/2$$

$$2. 2\angle BAJ = \angle BOJ = 2d \quad (\text{бисс. и центр. окруж. на } \angle BJ)$$

$$2\angle ABJ = \angle JOA = 2p \quad (\text{бисс. и центр. окруж. на } \angle AJ)$$

$$3. AO = OB = 5 - \text{радиусы } \mathcal{S}$$

$$JO = 1 - \text{радиус } \omega$$

$$JO = 5 - \text{радиус } \mathcal{S}'$$

$$\Rightarrow \triangle JOA \text{ и } \triangle BOJ - \text{пл} \Rightarrow \angle OJB = \angle OBJ, \angle JAQ = \angle JAF$$

$$4. \triangle ABO' - \text{бисс. в } \mathcal{S}' \Rightarrow \frac{AB}{\sin(2x+2p)} = 10$$

$$\begin{aligned} \text{в } \triangle JCB : \quad & \operatorname{tg} \beta \times = \operatorname{tg} 2 \cdot 7x \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 7 \operatorname{tg} 2 \\ & \sin \beta \cos 2 \Rightarrow 7 \sin 2 \cos \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AB = 10 (\sin \beta \cos 2 + \sin 2 \cos \beta) = 80 \sin \beta \cos \beta$$

$$5. \text{в } \triangle JAC : 1 = JA \sin d, \triangle JBA - \text{бисс. в } \mathcal{S}$$

$$\Rightarrow \frac{JA}{\sin p} = 10$$

$$\Rightarrow JA = 10 \sin p = 10 \sqrt{1 - \cos^2 p} \sin p$$

$$1 - \frac{JA^2}{100} = \cos^2 p \Rightarrow \frac{100 - JA^2}{100} = \cos^2 p$$

$$\cos p = \frac{\sqrt{100 - JA^2}}{10} = \frac{\sqrt{100 - \sin^2 p}}{10} = \frac{\sqrt{100 \sin^2 d - 1}}{10 \sin d}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

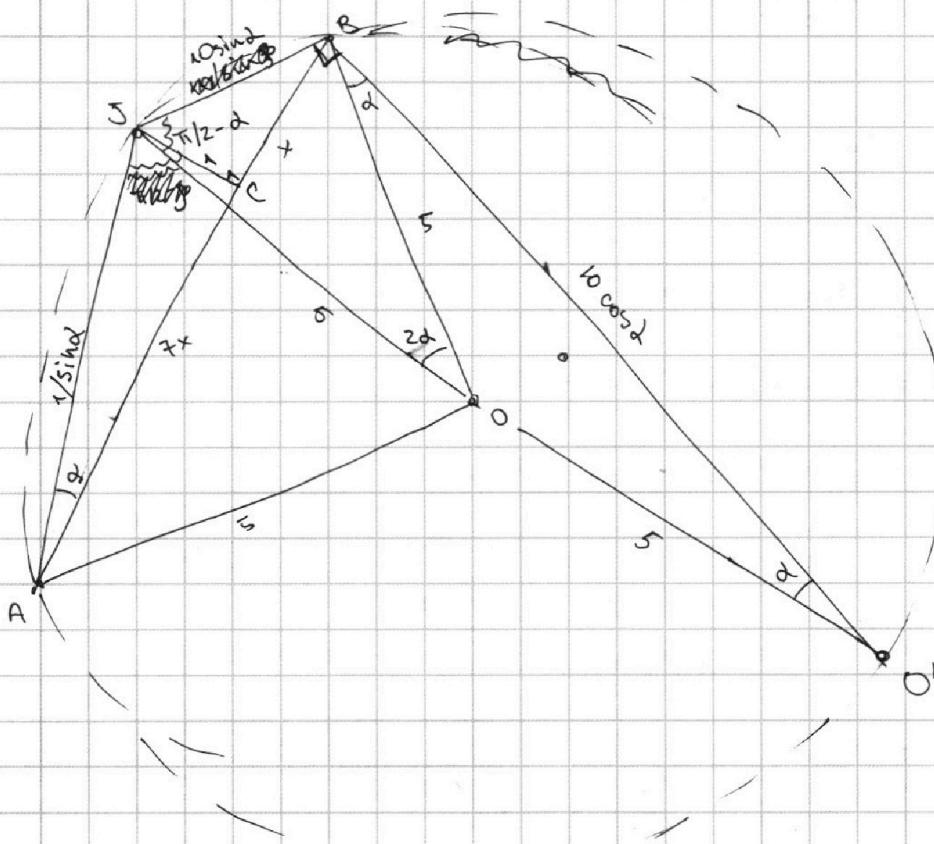
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. (наподобие 4)

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{100 \sin^2 \alpha - 1}{10}$$

$$\Rightarrow AB = 8\sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1}$$



$$6. \text{ Услуги косинуса} \quad 25 = 25 + 100 \sin^2 \alpha - 2 \cos(4\alpha - 2\alpha) \cdot 5 \cdot 10 \sin \alpha$$

$$100 \sin^2 \alpha = 100 \sin^2 \alpha$$

6. $\triangle AOC \sim \triangle BO'C$ ($\angle O' = \angle A$, $\angle B = \angle C$)

$$\Rightarrow \frac{10 \cos \alpha}{7x} = \frac{10 \sin \alpha}{1} \Rightarrow 7x = \tan \alpha \Rightarrow AB = \frac{8}{7} \tan \alpha$$

$$\Rightarrow AB = \frac{8 \tan \alpha}{7} = 8\sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1}$$

$$\frac{8 \tan \alpha}{7} = 8\sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{100 \sin^2 \alpha - 1} \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 49 (100 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

$$1 + 48 \cos^2 \alpha = 4900 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 4900 (1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha$$

4/12

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6. (найдите все)

$$1 + 48 \cos^3 d = 4900 \cos^2 d - 4900 \cos^4 d$$
$$4900 \cos^4 d - 4852 \cos^2 d + 1 = 0$$
$$\tan d = \frac{\sin d}{\sqrt{1 - \sin^2 d}} \Rightarrow \frac{\sin^2 d}{1 - \sin^2 d} = \tan^2 d$$
$$\sin^2 d = \tan^2 d - \tan^2 d \sin^2 d$$
$$\sin^2 d = \frac{\tan^2 d}{1 + \tan^2 d}$$
$$AB = \frac{8}{7 \tan d} = 8 \sqrt{100 \sin^2 d - 1}$$
$$7 \tan d \sqrt{100 \sin^2 d - 1} = 1$$

$$\frac{7^2 \sin^2 d (100 \sin^2 d - 1)}{1 - \sin^2 d} = 1$$

$$(7 \cdot 10)^2 \sin^4 d - 7^2 \sin^2 d = 1 - \sin^2 d$$

$$70^2 \sin^4 d - 49 \sin^4 d - 48 \sin^2 d + 1 = 0$$

$$D = 6^2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 70^2 = 2^8 \cdot 3^2 + 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 =$$
$$= 2^4 (2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2)$$

$$\sin^2 d = \frac{48 \pm \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 70^2} \approx 0.13, \quad \in [0, 1]$$

$$\sin^2 d = \frac{48 \pm \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2}$$

$$\sin^2 d = \frac{48 + \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2}$$

$$AB = 8 \sqrt{\frac{100 (12 + \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2}) - 1}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2}}$$

$$AB = \frac{8}{7} \sqrt{129 + \sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2} - 49} = \frac{8}{7} \sqrt{\sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2} - 25}$$

$$2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$$

$$5^2 \cdot 7^2 = 25 \cdot 49 = 1250 - 25 = 1225$$

$$\Rightarrow 2^4 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 7^2 = 1369 \approx 1371$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 5 \\ \hline 125 \\ 125 \\ \hline 1225 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 1369 \\ \times 13 \\ \hline 1369 \\ 1369 \\ \hline 18098 \end{array}$$

$$AB = \frac{8}{7} \sqrt{1369 - 25}$$

$$\text{Ответ: } AB = \frac{8}{7} \sqrt{1369 - 25}$$

5/12



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

42 82



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad \text{ОДЗ: } (x-1)(2x-3) \geq 0$$

$$\sqrt{(x-1)(2x-3)} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}$$



$$2. \begin{aligned} a &= 2x^2 + 2x + 1 \Rightarrow a+b = 2x^2 - 5x + 3 & x \in (-\infty, 1] \cup [1,5; +\infty) \\ b &= 2 - 7x & 2x^2 + 2x + 1 > 0, \text{ и.к.} \\ & & D \subset 0, 2 > 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b \quad | \uparrow^2 \text{ и.к. по ОДЗ } a+b \geq 0, a \geq 0$$

$$a+b + a - 2\sqrt{ab} = b$$

$$a = \sqrt{a^2 + ab} \quad | \uparrow^2, \text{ и.к. по ОДЗ } a+b \geq 0, a \geq 0 \Rightarrow a^2 + ab \geq 0$$

$$a^2 = a^2 + ab$$

$$ab = 0$$

$$3. ab = 0 \Rightarrow (2x^2 + 2x + 1)(2 - 7x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 \geq 0, \text{ и.к. } D \subset 0 \cup 2 > 0$$

$$\Rightarrow 2 - 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} < 1 \Rightarrow \text{нуждаем по ОДЗ}$$

Ответ: $x = 2/7$

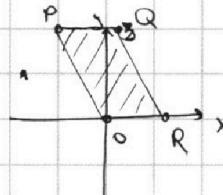


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $O(0,0)$
 $P(-12, 24)$
 $Q(3, 24)$
 $R(15, 0)$



Задачи прямые,
которые ограничивают
направления

$$\begin{aligned} PQ: \quad y &= 24 \\ OR: \quad y &= 0 \\ PO: \quad y &= -2x \\ RQ: \quad y &= -2x + 30 \end{aligned}$$

2. Задачи условия того, что точка $M(x, y) \in PQOR$

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 24 \\ -2x \leq y \leq -2x + 30 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y \in [0; 24] \\ 2x + y \in [0; 30]$$

$$\Rightarrow y \in [0; 24] \\ x \in \mathbb{R}; \\ 2x + y \in [0; 30]$$

3. $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12, \quad x_i, y_i \in \mathbb{R}$
 $y_1, y_2 \in [0; 24]$
 $2x_1 + y_1, 2x_2 + y_2 \in [0; 30]$
 $\Rightarrow 2x_1 + y_1 + 12 = 2x_2 + y_2 \Rightarrow 2x_1 + y_1 \in [0; 18]$
 $2x_2 + y_2 \in [12; 30]$
 $m.k. \quad y_i \in [0; 24] \Rightarrow 2x_1 \in [0; 18] \Rightarrow x_1 \in [0; 9]$
 $2x_2 \in [0; 30] \quad x_2 \in [0; 15]$
4. m.k. $x_1 \in [0; 9]$ Рассмотрим все значения x_1
~~x~~ 1) $x_1 = 0$

3. $y + 2x = k$ - задаем прямую $\parallel PO \parallel QR$,
которая пересекает OX в $(k/2; 0)$
 $\Rightarrow 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = (2x_2 + y_2) - (2x_1 - y_1) = k_2 - k_1 = 12$

Заметим, что $k \in [0; 30]$, m.k. крайнее
прямое PO и QR в $k_2 - k_1 = 12$
 \Rightarrow напр $(k_2; k_1)$ всего 18 штук

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



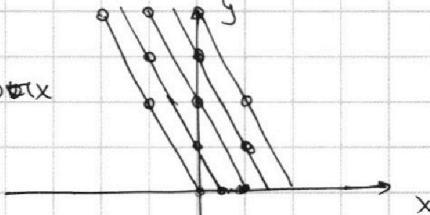
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Две катедры $k = y + 2x$

существует всего 12 парок координат, попарно различные числа, т.к. $y \in [0, 24]$

существует всего 12 парок координат, попарно различные числа

$$\text{т.к. } k = y = x$$



\Rightarrow если при $y_1, x \in \mathbb{Z}$

то при $y_1 + 2k, n \in \mathbb{Z} \quad x \in \mathbb{Z}$

а при $y_1 + 2n - 1, n \in \mathbb{Z}, x \notin \mathbb{Z}$

~~так~~

2) нам подходит попарно все $y \in \mathbb{Z}$

5. Подходящих пар (k_2, k_1) всего 18 (н.3)

Две катедры k можно найти 12 (y, x) пар (н.4)

2) пару (k_2, k_1) можно задать 12^2 арами

(x, y) (различными)

Всего таких пар 18 2) всего пар $(x, y) = 12^2 \cdot 18$

$$n = 12^2 \cdot 18 = 3^2 \cdot 24 \cdot 3^2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^5 = 6^4 \cdot 2 = 36^2 \cdot 2 =$$

$$= 2376 \cdot 2 = 4752$$

Ответ: $3^4 \cdot 2^5 = 4752$

$$\begin{array}{r} & 3 \\ \times & 36 \\ \hline & 36 \\ & \overline{36} \\ + & 216 \\ \hline & 216 \\ \hline & 2376 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

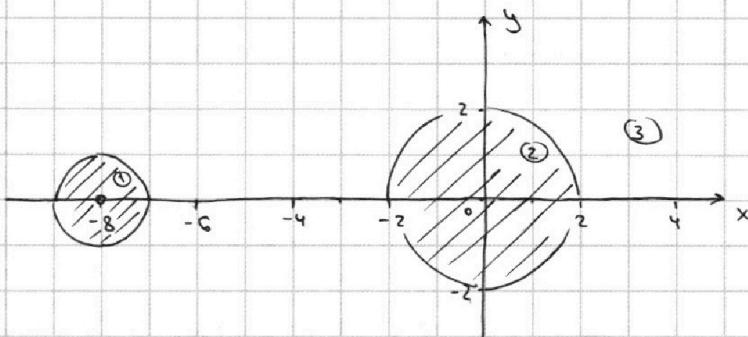
$$ax - y + 10b = 0$$
$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

1. Построим

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$$

1. $(x+8)^2 + y^2 = 1$ - окр-тие $\omega_1((-8, 0), 1)$

2. $x^2 + y^2 - 4 = 0$ - окр-тие $\omega_2((0, 0), 2)$



2. Рассмотрим точки методом областей

1) $(-8, 0)$: $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = -1 \cdot (8^2 - 4) \leq 0$ - подходит

2) $(0, 0)$: $(8^2 - 1) \cdot (-4) \leq 0$ - подходит

3) $(-3, 0)$: $(25 - 1)(9 - 4) > 0$ - не подходит

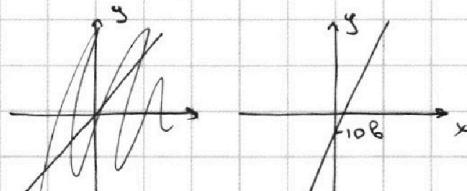
Подходящие области заштрихованы

3. $ax - y + 10b = 0$

$y = ax + 10b$ - прямая

протекающая $\frac{2}{3}$

$$(0; 10b); (-\frac{10b}{a}; 0)$$



Задание, что кр

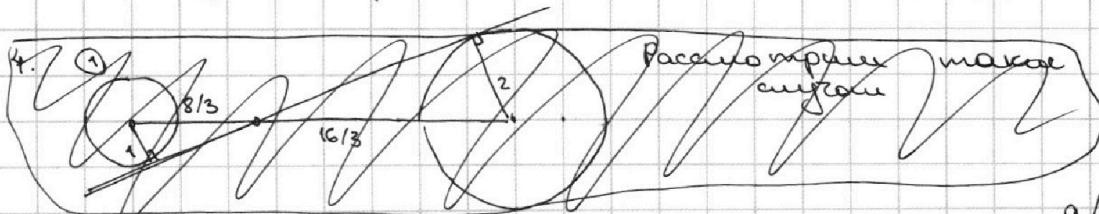
ко-во решений системы = ко-во ~~точек~~ пересечений

прямой $y = ax + 10b$ с графиком из n.2

2) крайний случай, когда прямая касается

н.к. того же круга ровно 2 решения существует,

когда ~~прямая касается обеих кругов~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



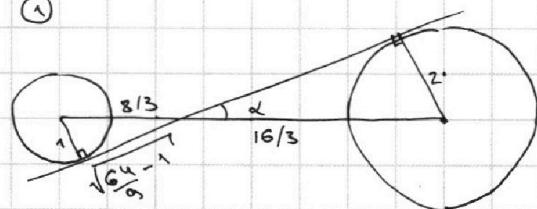
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Рассмотрим все такие ситуации

(1)

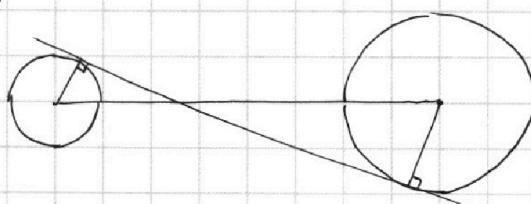


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{8}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{28}}{\sqrt{64 - \frac{9}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{56}}$$

$$a = \frac{3\sqrt{14}}{28}$$

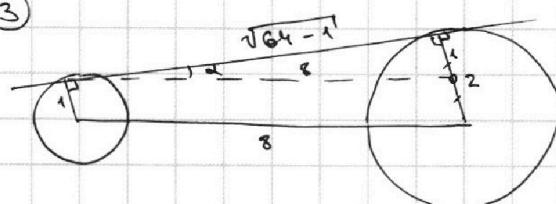
(2)



$$a = -\frac{3\sqrt{14}}{28}, \text{ т.к. ситуация}$$

симметрична к 4.1

(3)

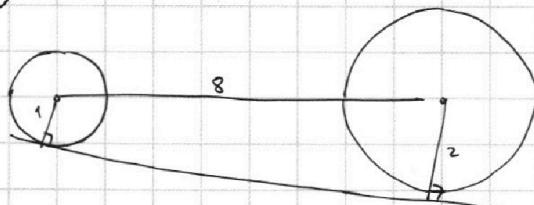


$$\operatorname{tg} \alpha = a$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$$

$$a = \frac{\sqrt{7}}{21}$$

(4)



$$a = \alpha - \frac{\sqrt{7}}{21}, \text{ т.к. ситуация}$$

симметрична к 4.3

Ответ: $a \in \left\{ -\frac{3\sqrt{14}}{28}; -\frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{3\sqrt{14}}{28} \right\}$

10/12

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

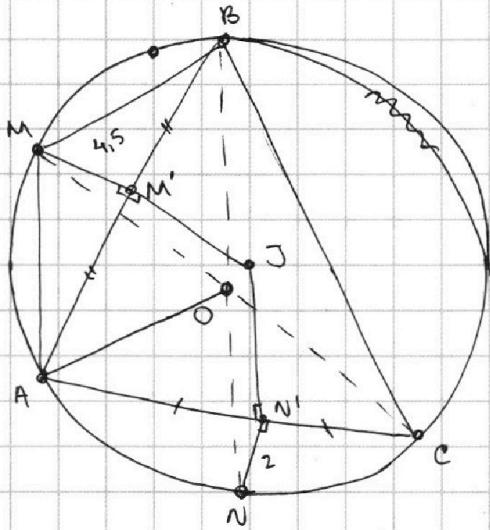
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. BN - бисс. са $\angle ABC$ и.к. $\angle AN = \angle CN$

$\Rightarrow \angle ABN = \angle NBC$ - вис. опир.
на $\angle AN$ и $\angle CN$

аналогично MC - бисс. са $\angle BCA$

$\angle MCN = \angle MCB$ - центр вис. окр.

$\Rightarrow \angle AOC$ - иск.

2. $\angle AM = \angle BM \Rightarrow MA = MB$

$\Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle PES \Rightarrow MM'$

$\Rightarrow \angle BAM = \angle MBA$ - вис. опир
на $\angle AM$ и $\angle BM$

$\Rightarrow MM'$ - высота, ~~биссектриса~~
и бисс. са $\angle MA$

3. и.к. J - центр вис. окр. иск.

$\Rightarrow \angle JN \perp AC, JM' \perp BA$

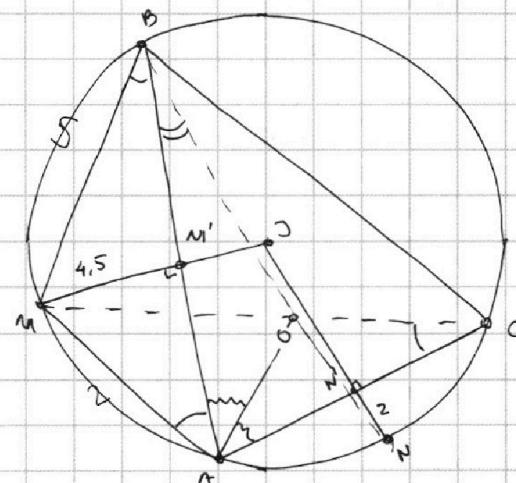
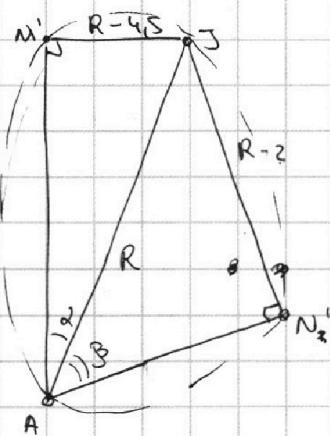
$\Rightarrow \angle JN' \perp NA$ (аналогично $M' \in (JM)$)

$N' \in (JN)$ (и.к. $\angle JN'A + AN'N = \pi$ и $\angle N'AN$ аналог.)

аналогично NN' - высота,

медиана, бисс. са $\angle NA$

4. $M'JN'A$



и.к. $\angle M' + \angle N' = \pi \Rightarrow$ бокруг $M'JN'A$ можно описать
окружностью с радиусом $R/2$ и диаметром AJ

$$\frac{\sin d}{R-4,5} = \frac{1}{R} \Rightarrow \sin d = 1 - \frac{4,5}{R} \quad \sin \beta = 1 - \frac{2}{R}$$

$$\sin d + \beta = \sin d \cos \beta + \sin \beta \cos d = \frac{(R-4,5)(4-2R)}{R^2} + \frac{(R-2)(4,5-2R)}{R^2 - 9R}$$

$$\sin d + \beta = \frac{R(6(R-4,5) \cdot 4(1-R) + (R-2) \cdot 4,5(4,5-2R))}{R^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5. \triangle ABM: M\bar{B} = 2R \sin \angle A \quad \text{(запись)} \quad \Rightarrow 4,5 = 2R \sin^2 \angle A$$

$$\triangle AMM' \Rightarrow \sin \angle A = \frac{4,5}{MA} = \frac{4,5}{MB}$$

$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle MCA$ (т. опир. на равные дуги и впис.)

$$\Rightarrow \sin^2 \angle C/2 = \frac{4,5}{2R} = \frac{9}{4R} = \sin^2 \angle MCA$$

аналогично $\sin^2 \angle B/2 = \frac{9}{4R} = \sin^2 \angle NBA$

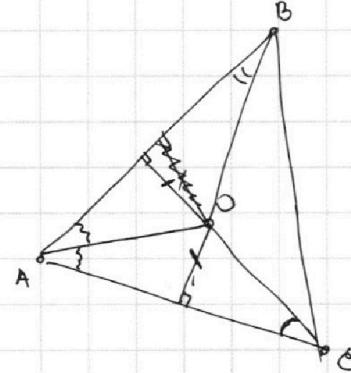
6. м.к. О - ц. вписан. окр. $\Rightarrow AO$ - бис-ка угла A

пусть $\angle MCA = \angle C$, $\angle NBA = \angle B$

$$\angle OAC = \angle OAB = \angle A$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi/2, \sin^2 \angle B/2 \angle B = 9/4R$$

$$\sin^2 C = 9/4R$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

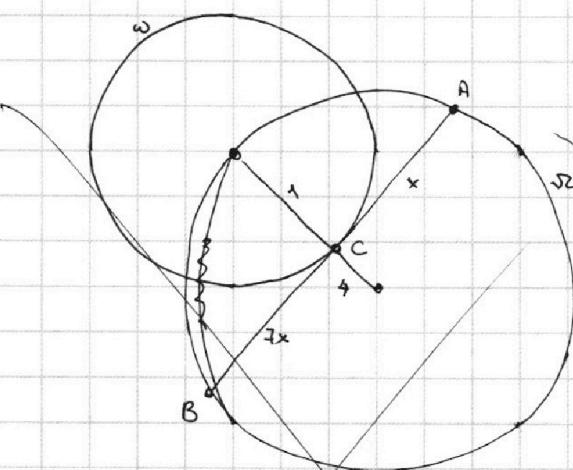
4

5

6

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. $\angle ACD = \pi/2$, т.к. AB - кас.

2. $\angle JBA$ - внис. опираем. на $\angle AJ$

~~∠JCA~~ - внис. опираем. на $\angle AJ$
 $\Rightarrow 2\angle JBA = \angle JCA = 2x$

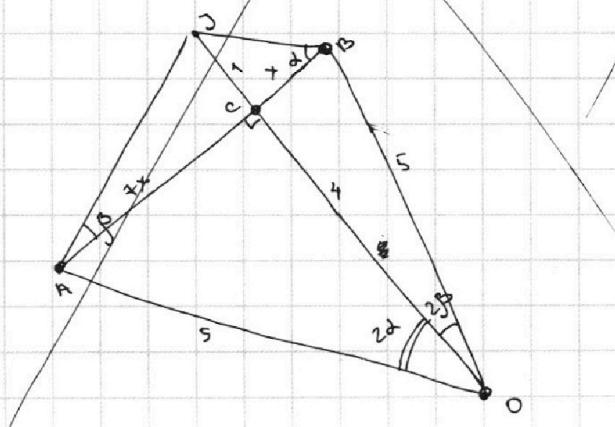
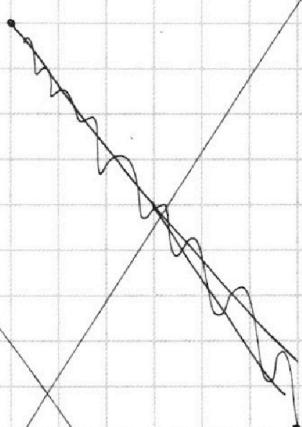
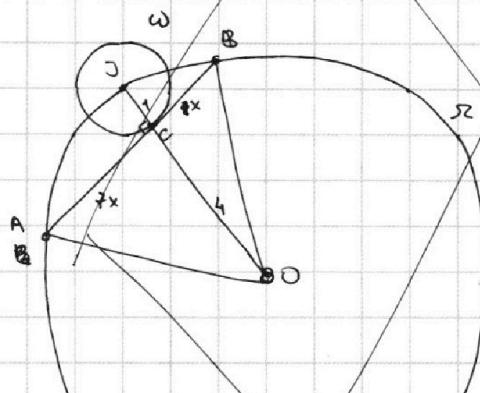
аналогично $\angle BDC = 2\angle BAJ = 2x$

3. $OB = OA = 5$, т.к. радиусы Ω

~~JC = 1~~, т.к. радиус ω

~~OC = JO - JC = 4~~, т.к. JO - ~~радиус~~
радиус Ω

4. $\triangle BCO$: $\text{н/у } BO^2 = OC^2 + BC^2$
 $25 = 16 + x^2 \Rightarrow x = 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

28 32

$$5 + 3 = 8$$

$$a^2 + b^2 - 6ab = (a-b)^2 - 4ab = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4(1-15) = 4 \cdot 14 = 8 \cdot 7$$

① Решена $\rightarrow 4$

② ~~Доказать~~, что если $(a,b) = 1$, $(a+b, b^2) = 1$

④ Решена $\rightarrow 5$

⑥ Решена $\rightarrow 5$

③ Решена, но ответ не красивый $\frac{195}{219}$

⑤ Решена $\rightarrow 5$

$$\begin{array}{r} 1369 \mid 23 \\ 128 \quad | 5 \\ \hline 230 \\ - 23 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(a,b) = 1 \Rightarrow ak + bn = 1$$

↓

$$(a, b^2) = 1$$

$$(p_1 p_2 \dots p_n) \nmid q_1 q_2 \dots q_k$$

$$\begin{array}{r} 1369 \mid 7 \\ 68 \quad | 19 \\ \hline 39 \\ - 39 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(p_1 p_2 \dots p_n + q_1 \dots q_k) \nmid (q_1 q_2 \dots q_k)^2$$

$$(a+b, b^2) = (a, (b-1)b)$$

$$(a+b, b^2) = (a, (8b-1)b) = 8b-1$$

~~2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100~~

$$(5, (8 \cdot 3 - 1) \cdot 3) = 5, 23 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 1369 \mid 17 \\ 11 \quad | 12 \\ \hline 26 \\ - 26 \\ \hline 0 \end{array}$$

$a+b;$

$8; 8 \cdot 9$

$$a, b : c \quad (a+b; (8b-1)b-a)$$

nc, kc

~~нед.~~

$$\begin{array}{r} 1369 \mid 7 \\ 66 \quad | 613 \\ \hline 39 \\ - 39 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$1 + 48 \cos^2 \alpha = 4900 (1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha$$

$$\begin{array}{r} 1369 \mid 17 \\ 8 \quad | 136 \\ \hline 56 \\ - 56 \\ \hline 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AB = \frac{8}{7\operatorname{tg} \alpha} = 10 \sin \alpha$$