



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Рассмотрим число  $A$ . Оно имеет вид  $\overline{aaab}$ , где  $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ , ("0" не может быть первым цифровым же моментом)

$$A = 10^3 \cdot a + 10^2 \cdot a + 10 \cdot a + a = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$$

III. к ( $A \cdot B \cdot C$ ) - квадрат и  $a \leq 9$ ,  $C < 100$ , необходимо найти такой  $B: 101$ , иначе ( $A \cdot B \cdot C$ ) - не квадрат.

Пусть  $B = b \cdot 101$ , где  $b \in \{1, 2, \dots, 9\}$  (если  $b \geq 10$ , то  $B$  - четырёхзначное число;  $b \neq 0$  можно исключить больше), также  $B = b \cdot 101 = \overline{b0b}$ . III. кaura из цифр  $B$  равна ибо  $B = 101$

Аналогично получаем, что  $C = c \cdot 11$ , где  $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$  и также получаем, что  $C = \overline{cc}$  и получаем, что  $C = 55$

$$(A \cdot B \cdot C) = (a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 55) = (101 \cdot 11)^2 \cdot (a \cdot 5) - \text{квадрат}$$

значит  $(a \cdot 5)$  - квадрат и  $a \in \{1, \dots, 9\}$ , значит  $a = 5$

$$\text{Значит } A = 5555$$

Ответ:  $(5555, 101, 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad k = \frac{1}{x} - \epsilon \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{y+x+1}{xy} \quad \Rightarrow \quad \frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$k = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq 3 \\ y \neq -3 \end{array} \right.$$

$$(y+x+1) \cdot ((x-3) \cdot (y+3) - xy) = 0 \quad (1)$$

$$(1): \quad (y+x+1) \cdot (xy - 3y + 3x - y - xy) = 0$$

$$\Downarrow y+x+1 > 0 \quad (y > 0; x > 0)$$

$$x - y - 3 = 0$$

$$x - y = 3$$

$$M = x^3 - y^3 - xy = (x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2) - xy = 3 \cdot (x^2 + xy + y^2) - xy =$$

$$= 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3 \cdot (x-y)^2 = 3 \cdot 9 = 27 \quad (\text{успоминается квадрат трехчлен при } x=7)$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \text{ a) } (\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \sin \pi x = 2 \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos \pi x$$

$$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \left[ \sin\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \sin \pi x - \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos \pi x \right] = 0$$

$$1^{\circ} \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\pi x + \pi y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}}$$

$$2^{\circ} \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \neq 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \sin \pi x = \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos \pi x$$

$$\frac{1}{2} \left( \cos\left(\pi \cdot \frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{3\pi x - \pi y}{2}\right) + \cos\left(\frac{-\pi x - \pi y}{2}\right) \right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi x - \pi y}{2}\right) = 0 \quad \text{значит решений нет}$$

$$\cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) \neq 0 \quad \Rightarrow x, y \neq 0$$

$$x + y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = \pi + 2\pi n - x, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $(x; 2\pi n - x)$ , где  $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$

$$0^{\circ} \arccos \frac{a}{r} - \arccos \frac{b}{r} < 2\pi$$

Пусть  $0 \leq \arccos \cos \alpha \leq \pi$ , где  $|b| \leq 1$ , то

$\arccos \frac{a}{r} - \arccos \frac{b}{r} \leq 2\pi$ , значит имеем систему

$$\left| \frac{a}{r} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{b}{r} \right| \leq 1$$

$\frac{a}{r} - \frac{b}{r} \neq -2$  (т.к.  $"= -2"$  невозможно для  $\frac{a}{r} \in [-1, 1]$  и  $\frac{b}{r} \in [-1, 1]$ )



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -9 \leq x \leq 9 & (1) \\ -9 \leq x \leq 9 & (2) \\ \frac{x}{3} + \frac{2}{3} = -2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) : \\ (2) : \end{cases} \quad \begin{cases} -9 \leq x \leq 9 \\ -9 \leq 2x+1-x \leq 9 \end{cases}$$

2x+1-x — члены, если x-члены, и наоборот. Поэтому

1 отрезок  $[-9, 9]$  5-ч. и 9-члены

1 отрезок  $[-9, 9]$  9-ч. и 2x+1-x члены

Если x-члены, то 2x+1-x может равняться только  
членами из отрезка  $[-9, 9]$  и наоборот.

Всего решений 2:  $5 \cdot 10 + 5 \cdot 9 = 50 + 55 = 95$

По условию (3) таких не подходит одно парк:  $(-9, -9)$ , оно  
выбрано из условия из а), поэтому  $95 - 1 = 94$

Ответ: 94



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

4. Пусть общее количество билетов будет  $N$

$a$  - количество билетов, выигравших в начале лотереи

$$\frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} - \text{вероятность в начале лотереи}$$

$$\frac{4+a}{N} \cdot \frac{4+a-1}{N-1} - \text{вероятность в конце лотереи}$$

Задача:

$$3, 5 \cdot \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} = \frac{4+a}{N} \cdot \frac{(4+a)-1}{N-1}$$

$$12 \cdot 3 = (4+a) \cdot (3+a)$$

$$a^2 + 7a + 12 - 12 = 0$$

$$a^2 + 7a - 3 = 0$$

$$(a-3)(a+10) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow a=3 \\ a>0 \end{array} \right.$$

$$4+3=7$$

Ответ: 7



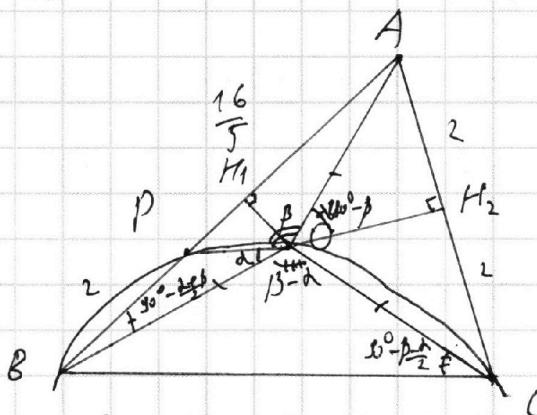
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.



1) D. n  $\angle BOC$ :

$$BO = OA = OC = R; OH_1 \perp BA$$

$\triangle BOA$  - равнобедр.

$S_{\triangle BOC}$  ?

$\Rightarrow OH_1$  - медиана, биссектриса, а также  
биссектриса  $\angle BOA$

$OK_L$  - медиана, биссектриса, биссектриса  $\angle AOC$

$$2) \angle BOP = \alpha; \angle POA = \beta$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{BP}{PA} = \frac{S_{BPO}}{S_{PAO}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot BO \cdot PO}{\frac{1}{2} \sin \beta \cdot AO \cdot PO} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{5}{8}$$

$$\angle ABO = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2} = 90^\circ - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\angle BCO = \frac{1}{2} \angle BPO = \frac{1}{2} (\angle BOP + \angle PO) = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} + 2 = 90^\circ - \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\angle BOC = 180^\circ - 2 \cdot (\angle BCO) = \beta - \alpha$$

$$\angle AOC = 360^\circ - (\angle BOA + \angle BOC) = 360^\circ - (\alpha + \beta - \alpha) = 360^\circ - 2\beta$$

$$\angle AOH_2 = \frac{\angle AOC}{2} = 180^\circ - \beta$$

$$\angle AOH_1 = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \frac{3}{R} = \sin(\angle AOM_2) = \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$$

$$\frac{\frac{16}{5} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} \rightarrow \sin(\angle AOM_1) = \sin\left(\frac{2\alpha\beta}{2}\right)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{2\alpha\beta}{2}\right)}{\sin \beta} = \frac{26}{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{26}{20} \cancel{\sin \beta} & \quad \sin^2 \frac{2\alpha\beta}{2} = \frac{7 - \cos(2\alpha\beta)}{2} \\ \cancel{7 - \cos(2\alpha\beta)} & \quad \left(\frac{26}{20}\right)^2 \cdot \sin^2 \beta = \frac{26^2}{20^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sin^2 \beta = \\ & = \frac{13^2}{20^2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(2\alpha\beta)) \end{aligned}$$

$$\angle NOA + \angle AOM_1 = \beta + 180^\circ - \beta = 180^\circ \Rightarrow \text{угол } \angle AOM_1 - \text{один}$$

$$\text{угон} : \cos \angle A = \frac{\cancel{2}}{\cancel{16} \cdot \cancel{2}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{73} \cdot \cancel{2}} = \frac{\cancel{10}}{\cancel{73} \cdot \cancel{2}}$$

$$\sin^2 A = 1 - \frac{10^2}{73^2} = \frac{10^2 - 100}{73^2} = \frac{69}{73^2} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{69}}{73}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin A \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{69}}{73} \cdot 9 \cdot \frac{26}{5} = \frac{9}{5} \cdot \sqrt{69}$$

$$\cos A = \frac{\cancel{2}}{\cancel{73} \cdot \cancel{2}} = \frac{10}{73} = \frac{5}{8}$$

$$\sin^2 A = 1 - \frac{25}{64} = \frac{64 - 25}{64} = \frac{39}{64} \Rightarrow \frac{\sqrt{39}}{8} = \sin A$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin A \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot 9 \cdot \frac{26}{5} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

$$\text{Ответ: } \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \begin{cases} (x - 2 \cos 2) \cdot (y - 2 \sin 2) \geq 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 \leq 9 \quad (2) \end{cases}$$

1)  $x^2 + y^2 = 9$  — окружность с радиусом 3, центр  $x^2 + y^2 = 9$

ГМТ ~~на~~ вдали от этого круга с центром  $O(0,0)$

$0 = x - 2 \cos 2$  и  $0 = y - 2 \sin 2$  — прямые параллельные оси ординат и они обе одна

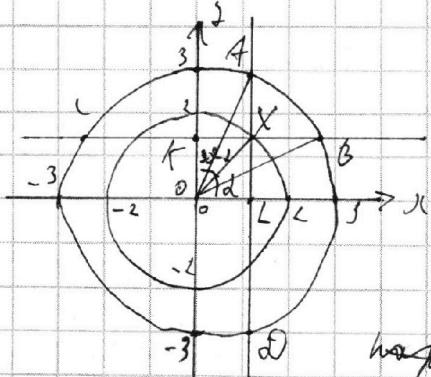
$x = 2 \cos 2 \Rightarrow x, y$  — окружность с радиусом 2. Точка

такой окружности имеет центр  $O(0,0)$ )

(1), чтобы это было верно надо небольшую, чтобы

$$\begin{cases} x - 2 \cos 2 \geq 0 \\ y - 2 \sin 2 \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 2 \cos 2 \leq 0 \\ y - 2 \sin 2 \leq 0 \end{cases}$$

2) Всего 2 окружности на координатной плоскости.



Для начала находим

Чтобы узнать, что  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

Однако если  $\max(\theta)$  не при этом

это может исправить путем

назначения направления переходов

Угол  $\alpha$

$$x - 2 \cos 2 = 0$$

$$y - 2 \sin 2 = 0$$

выполнен на окружности с радиусом

I-

I-

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1	2	3	4	5	6	7	СТРАНИЦА
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<u>2</u> из <u>3</u>				

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Уб.  $\angle ABD = \alpha$ . Рассмотрим  $\triangle ABD$  (изображение)

Пусть  $AD \cap BC = X$ ;  $\angle AXD = \beta$ ;  $\angle CXD = 90^\circ$  (из-за изображения)

тогда  $\cos \alpha = \frac{AB}{AD}$ ,  $\cos \beta = \frac{AD}{DC}$  (изображение)  $\Rightarrow 1 - 2 \cos^2 \alpha = 0$   
 $1 - 2 \cos^2 \beta = 0$

но  $\angle ABD = \alpha$  и  $\angle ADB = \beta$  — изображение и  
 находим искомые выражения:  $\frac{2\pi \cdot 3}{2} = 3\pi$

3) Пусть  $\angle XAO = K$ ;  $\angle XDO = L$ . Всегда  
 имеем  $AL = LD$  и  $CK = KB$

Пусть  $\angle AOL = \varphi$

$$AO \cdot \cos \varphi = OX \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \varphi = \frac{2}{3} \cos \alpha$$

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha \quad \Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}$$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$AD = 2AL = 2 \cdot 3 \cdot \sin \varphi = 6 \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}$$

Пусть  $\angle BOA = \beta$

$$BO \cdot \cos \beta = OX \cos(90^\circ - \varphi)$$

$$\cos \beta = \frac{2}{3} \sin \alpha$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha \quad \Rightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$OB = 2LB = 6 \cdot \sin \beta = 6 \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_M = AB + CD + CB + AD = 3\pi + 6 \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{9}{3} \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 - \frac{9}{3} \sin^2 \alpha} \right)$$

$$\leq \left[ \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right] \leq 3\pi + 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2 - \frac{9}{3}(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{2}} =$$

a + b > 0

$$= 3\pi + 12 \cdot \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{18-9}{2 \cdot 3}} = 3\pi + 12 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = (3\pi + 4\sqrt{7})$$

Домножим неравенства  $\sqrt{1 - \frac{9}{3} \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{3} \sin^2 \alpha}$

$$\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{n}{2}\pi$$

Ответ:  $3\pi + 4\sqrt{7} - \max(A(M))$ ;  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{n}{2}\pi$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Это можно ли разуметь наоборот, что  
если одна из верхних в трех же можно, то  
и та, а значит на четырех (однозначно)  
одинаково.

Покажу, что  $L_0 \parallel T_0$  — разуметь это означает  
 $OT \cdot K \angle L - \text{ср. нер. и } OT \text{ симметрично}$   
одинаковых, то зная  $L_0$  — разуметь не  
различие верхние основные  $OT$  не разуметь  
и для  $T_0$ , зная  $L_0 \parallel T_0$ .

Вернемся к первому рисунку: из равенства  
 $T_0 = L_0 + CO$  — основа  $\Rightarrow CO$  — неизвестно  $\Rightarrow$   
 $\angle L = C + 1$   
 $A_0 = OB$   $\Rightarrow CO \parallel LB$  (как ср. д. параллель  $LB \parallel$ )  
 $\angle L = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ , т.е.  $\angle L = \angle COB$ .

Из  $CL \perp$  оба предыдущих равенства  $\Rightarrow L =$   
и  $BL \perp$  между же разные  
 $\Rightarrow \angle (BO \text{ верхней основной}) = 90^\circ$ , следовательно это нере-  
ально. Ответ:  $90^\circ$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



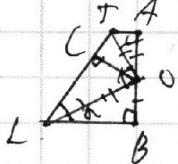
- |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

7. Угол между двумя радиусами, проведёнными верхним основанием, равен между собой. Верхнее, как и нижнее основание являются правильными многоугольниками. Для начала, рассмотрим окружность  $\omega$ . В эту окружность, она касается прямой основания в точке  $D$ , а также касается у основания прямой линии  $AB$  с центром  $O$ .

Нер. к стоящее основание. Всегда ли можно соединить две из этих точек  $A$  и  $B$  основания и образовать новый угол?



$A, B$  можно соединить с основанием.

$C$  — с общ. углом

$L$  — основание нер. нер к радиусам

$O$  — диаметр

основания

Пл. к основанию  $\Rightarrow \angle LCO + \angle LBO = \angle COB + \angle TAO = 180^\circ$ ,  
но окружность  $COB$  и  $TAO$  имеют одинаковую окружность, а углы  $\angle COB$  и  $\angle TAO$  — смежные углы, т.к.  $CO \perp TA$ , а значит  $\angle COB = 80^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1      2      3      4      5      6      7      СТРАНИЦА  
\_\_\_\_\_ из \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\alpha \cdot 1111 = \alpha \cdot 11 \cdot 101$$

cos 2, sin 2

$$\sin\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi x - \pi y}{2}\right) \cdot \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi - t\delta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi + t\delta}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi - t\delta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi + t\delta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos 2\beta$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{2} = \frac{1 - \cos 2\beta}{2}$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{2}$$

$$\frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \beta} = \frac{20}{20} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 1 \Rightarrow \beta = \alpha$$

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3} \cos^2 \varphi$$

$$\cos(\text{dep}) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \sin\beta \sin\alpha + \cos\beta \cos\alpha \Rightarrow \sin\beta \sin\alpha + \cos\beta \cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$3-1 \quad 148^\circ \cdot \left( \sin \theta \text{ steps} \right) \quad \text{6.a. step. } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$$

73<sup>2</sup>



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

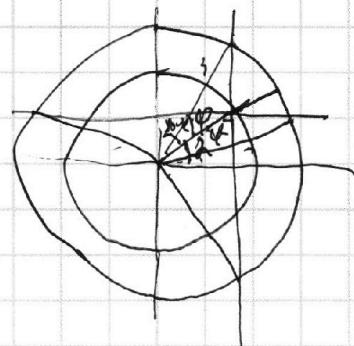
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{r}{R} \cos^2 \alpha$$