



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- ✓ ① [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
- ✓ ② [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
- ✓ ③ [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
- ✓ ④ [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- ✓ ⑤ [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-14;42)$ ,  $Q(6;42)$  и  $R(20;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
- а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
- б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1  $ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$  ~~где~~ где  $k, m, n \in \mathbb{N}$   
 $bc = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$  из-за делимости  $ab$   $ac$  и  $bc$   
 $ac = n \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$  на соответствующие числа

$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow$  ~~все~~ степени включения любого  
простого множителя в  $abc^2$  больше чем в  $ac$

(то же самое с  $abc^2$  и  $ab$ ;  $a^2bc$  и  $bc$ )

тогда степень включения 5 в  ~~$abc^2$~~  хотя бы

30 т.к в  $ac$  она 30. тогда степень включения

5 в  $a^2b^2c^2$  хотя бы  $30+30=60$

также т.к  $a, b, c \in \mathbb{N}$  степень включения любого  
простого числа в  $a^2b^2c^2$  - чётна

отсюда

степень включения  $\_\_\_\_\_\_$  в  $a^2b^2c^2$  хотя бы  $\_\_\_\_\_\_$

2

$$9+14+19 = 42$$

3

$$10+13+18 = 41 \Rightarrow 42$$

5

60

итого  ~~$abc^2$~~   $a^2b^2c^2 = p^2 \cdot 2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{60}$  где  $p \in \mathbb{N}$

т.е.  $abc = p \cdot 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$  и данные в задаче условия достигаются при

$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{11}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^3$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{13}$$

значит минимум  $abc$  это  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Ответ: минимум  $abc$  это  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. Индекс у площади - треугольник у которого смотрим площадь  
окружность касается ВС в D и имеет

точки E и F  $\Rightarrow \angle FEB = \angle FBC$

$AB \parallel EF \Rightarrow \angle FEB = \angle EBA$

значит  $\angle EBA = \angle FBC$

в прямоугольном треугольнике ABC

$\angle EAB = \angle CAB = \angle DCB = \angle FCB$

$\left. \begin{array}{l} \angle EBA = \angle FBC \\ \angle EAB = \angle FCB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle BCF$

отсюда  $\frac{CF}{BC} = \frac{AE}{AB}$

CFD - прямая  
CEA - прямая  
FE || AD

$\triangle CEF \sim \triangle CAD$

$\frac{CF}{CE} = \frac{CD}{AC}$

$$\frac{CD \cdot CE}{AC \cdot BC} = \frac{AC - CE}{AB}$$

$$\frac{CD \cdot AB}{AC \cdot BC} = \frac{AC}{CE} - 1$$

в прямоугольном  $\triangle ABC$  с высотой CD

$\angle CAD = \angle DCB$

$\angle CDA = \angle ACB = 90^\circ$

$\triangle CAD \sim \triangle ABC$

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{CD \cdot AB}{AC \cdot BC} = 1$$

$$\frac{AC}{CE} = 2$$

$$\frac{CE}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CAD \Rightarrow S_{ACEF} = \frac{S_{\triangle CAD}}{4}$$

$\angle CAD = \angle DCB$

$\angle CDA = \angle CDB = 90^\circ$

$\triangle ACD \sim \triangle BCD$

$$S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2}$$

$$S_{BCD} = \frac{BD \cdot CD}{2}$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = \frac{AD}{BD} = 3$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACEF}} = \frac{S_{ACD} + S_{BCD}}{\frac{S_{ACD}}{4}} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{16}{3}$$

Ответ:  $\frac{S_{ABC}}{S_{ACEF}} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3. сделаем замену  ~~$x = \frac{\pi}{2} - t$~~   $t = \frac{\pi}{2} - x$   $x = \frac{\pi}{2} - t$ .

$$5 \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \pi - t$$

$$5 \arcsin(\sin(t)) = \pi - t.$$

~~$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$~~   $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$  т.е.  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$   $x \leq \pi$

$$t = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin p \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} \geq x + \frac{\pi}{2} \geq -\frac{5\pi}{2}$$

$$2\pi \geq x \geq -3\pi$$

~~$\frac{3\pi}{2} \geq x \geq \frac{\pi}{2}$~~

~~$\cos x \leq 0$~~   $\arcsin x < 0$   $\arcsin x < 0$   
 ~~$x \leq \frac{\pi}{2}$~~   $x + \frac{\pi}{2} > 0$

или  $\frac{3\pi}{2} \geq t \geq \frac{\pi}{2}$

$$\arcsin(\sin(t)) = \pi - t.$$

$$5\pi - 5t = \pi - t \quad t = \pi \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

или  $\frac{5\pi}{2} \geq t \geq \frac{3\pi}{2}$

$$\arcsin(\sin(t)) = t - 2\pi \quad 5t - 10\pi = \pi - t \quad t = \frac{11}{6}\pi \quad x = -\frac{4}{3}\pi$$

или  $\frac{7\pi}{2} \geq t \geq \frac{5\pi}{2}$   $\arcsin(\sin(t)) = 3\pi - t$

$$15\pi - 5t = \pi - t \quad t = \frac{7}{2}\pi \quad x = -3\pi$$

или  $t > \frac{7\pi}{2}$   $x < -3\pi$

или  $-\frac{\pi}{2} \geq t \geq -\frac{3\pi}{2}$   $\arcsin(\sin(t)) = -\pi - t$   $-5\pi - 5t = \pi - t$

$$t = -\frac{6\pi}{4} = -1,5\pi$$

или  $t < -\frac{3\pi}{2}$   $x < -2\pi$

$$x = 2\pi$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{3}$   $x = -\frac{\pi}{2}$   ~~$x = -\frac{5\pi}{6}$~~   $x = -\frac{4\pi}{3}$   $x = -3\pi$   $x = 2\pi$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

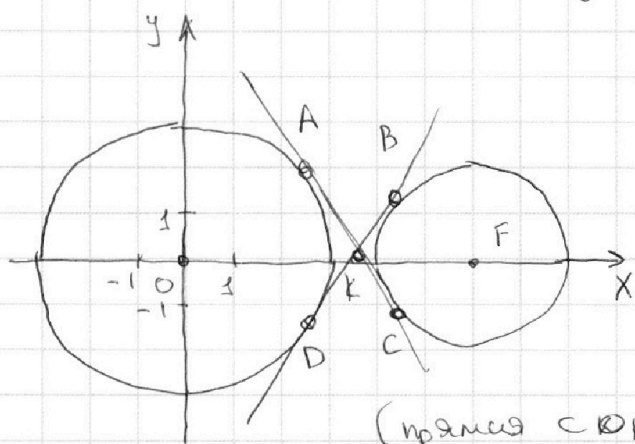
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



уч.

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ x^2+y^2-9=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + 1,5b \text{ - ур-ние прямой} \\ x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \\ \\ \text{ур-ния окружностей.} \end{matrix}$$

на координатной плоскости:



для прямой с тангенсом угла наклона в пределах между двумя внутренними касательными к окружностям можно подобрать такое  $b$ , что имеет 4 решения

(прямая с окружностью имеет максимум 2 пересечения, а надо 4 т.е по 2 с каждой окруж.)

AC:  $y=kx+c$   $x^2+(kx+c)^2=9$  -одно решение

$(k^2+1)x^2+2kcx+c^2-9=0$   $D = \sqrt{(2kc)^2 - 4(k^2+1)(c^2-9)} =$

$= \sqrt{-4 \cdot (c^2-9 - k^2 \cdot 9)} = 0$   $(k^2+1)9 = c^2$   ~~$c = \pm 3k$~~

~~аналогично для~~ BD:  ~~$k = \pm \frac{c}{3}$~~

$(x-6)^2+(kx+c)^2-4=0$   $D=0 = \sqrt{(2kc-12)^2 - 4(c^2+32)(k^2+1)}$   
 $x^2-12x+36-4+k^2x^2+2kxc+c^2=0$

$\sqrt{-\frac{2k}{48}c + 144 - 128k^2 - 128 - 4c^2} = 0$   $F$  и  $O$  - центры окруж.

~~справа~~  $OAK \sim \Delta KCF$  т.к  $FC \perp OA$   $\frac{OA}{FC} = \frac{3}{2} = \frac{OK}{KF}$

картинка симметрична относительно  $OX$ .  $\Rightarrow K$  на  $OX$

$OK+KF=6$  т.к  $F(6;0) \Rightarrow K(3,6;0)$   $k \cdot 3,6 + c = 0$

AC:  $k = \frac{5}{\sqrt{11}}$   $c = -\frac{18}{\sqrt{11}}$  BD:  $k = -\frac{5}{\sqrt{11}}$   $c = \frac{18}{\sqrt{11}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т.е. при

$$-\frac{5\sqrt{11}}{2} < -\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{2}$$

можно найти в теор., что будет 4 решения

$$\frac{10}{\sqrt{11}} > a > -\frac{10}{\sqrt{11}}$$

Ответ:  $\frac{10}{\sqrt{11}} > a > -\frac{10}{\sqrt{11}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 x +$$

$$\log_x^{-4} 3 + 6 \log_x 3 = 2,5 \log_x 3 - 8$$

$$\log_x^{-4} 3 + 6 \log_x 3 = 2,5 \log_x 3 - 8$$

замени  $\log_x 3 = a$

$$a^{-4} + 3,5a + 8 = 0 \rightarrow \text{график!}$$

$$y = a^{-4}$$

$$y = -8 - 3,5a$$

корень один

$$\log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3^4 - 8$$

$$\log_{5y}^{-4} 3 + 2 \log_{5y} 3 = 5,5 \log_{5y} 3 - 8$$

замена  $\log_{5y} 3 = b$

$$b^{-4} - 3,5b + 8 = 0 \text{ график!}$$

$$y = b^{-4}$$

$$y = 3,5b - 8$$

единств. корень

при этом если  $p$  - корень  $b^{-4} - 3,5b + 8 = 0$

то  $-p$  - корень  $a^4 + 3,5a + 8 = 0$

тогда

$$\log_{5y} 3 = -\log_x 3$$

$$\frac{\log x^3}{\log_{5y} 3} = \log_{5y} x = -1$$

$$(5y)^{-1} = x$$

$$x \cdot y = \frac{1}{5y} \cdot y = \frac{1}{5} = 0,2$$

Ответ:  $xy = 0,2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

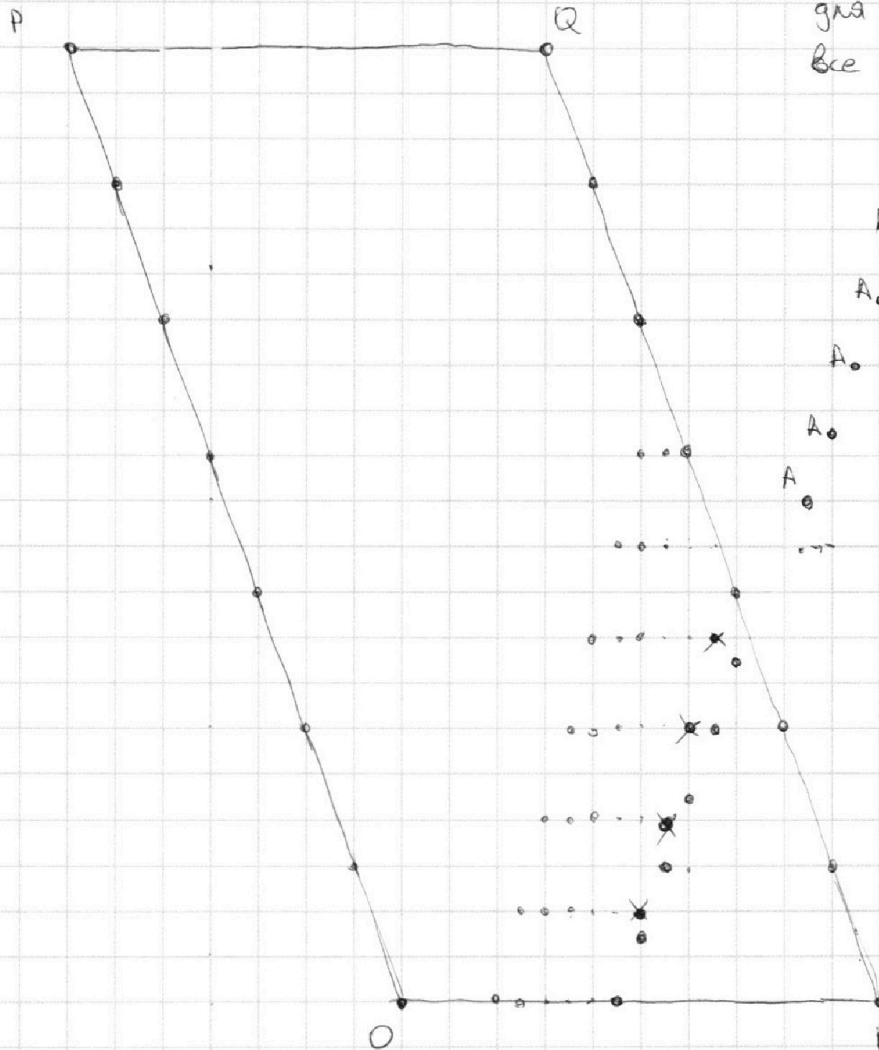
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



для каждой <sup>то</sup> ~~точки~~ возможного положения В будем  
находить <sup>количество</sup> ~~количество~~ всех возможных положений А и суммировать  
их  
поиск: (масштаб одна клетка это 2x2)



для точки В  
все возможные  
A: из-за  
натуральности  
координат  
и натуральности  
их разности

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$\Delta x \in \mathbb{N}, \Delta y \in \mathbb{N}$$

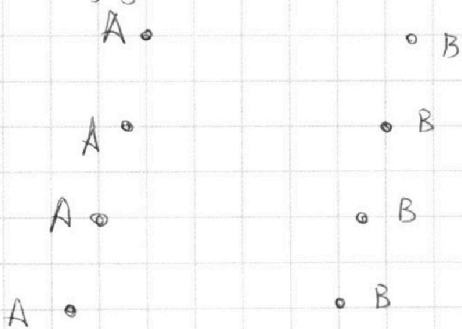
наклон  
сторон параллело-  
грамма -3:1

наклон  
положений  
А 3:1

из-за GMT А отн. В получим то для таких В  
А GMT А такое

для В в R с положением А.

будем сдвигать диагональ В  
влево и записывать кол-во  
А и В в полученных диагоналях.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

сдвиг по $x_i$	в параллелограмме			$\sum =$
	A	B	AxB	
0	6	1	6	6
1	<del>7</del> 8	1	<del>8</del> 7	13
2	<del>7</del> 6	2	14	27
3	8	2	16	43
4	8	3	24	67
5	9	3	27	94
6	9	4	36	130
7	10	4	40	170
8	10	5	50	220
9	11	5	55	275
10	10	6	60	335
11	11	6	66	401
12	10	7	70	471
13	11	7	77	548
14	10	8	80	628
15	11	8	88	716
16	10	9	90	806
17	11	9	99	905
18	10	10	100	1005
19	10	10	100	1105
20	9	11	99	1204
21	9	10	<del>88</del> 90	1294
22	8	11	88	1382
23	8	10	<del>77</del> 80	1462
24	7	11	77	1539
.	7	10	70	1609
1	6	11	66	1675
)	6	10	60	<del>1675</del>
	5	11	55	1750
	5	10	50	1840
	4	10	40	1880
	4	9	36	1916
	3	9	27	1943
	3	8	24	1983
	2	8	16	
	2	7	14	
	<del>1</del>	7	<del>7</del>	
	<del>1</del>	6	6	2010



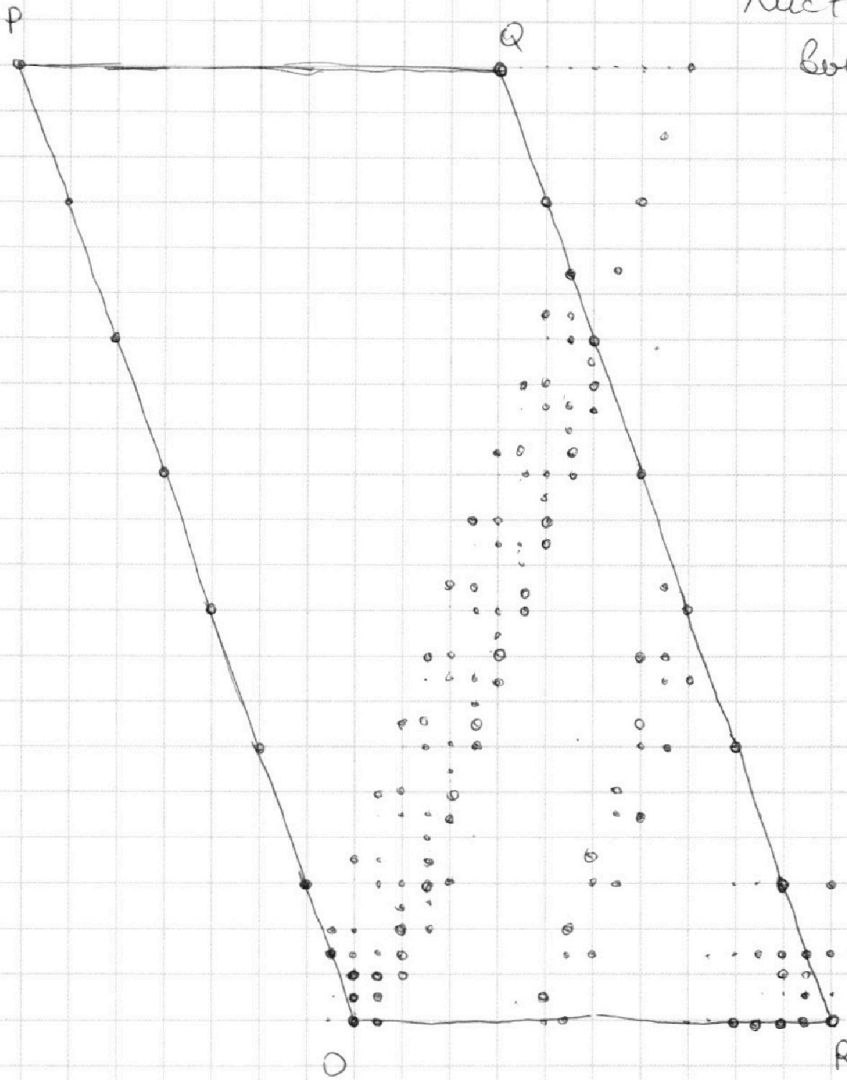
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Лист для  
вычисления  
A и B



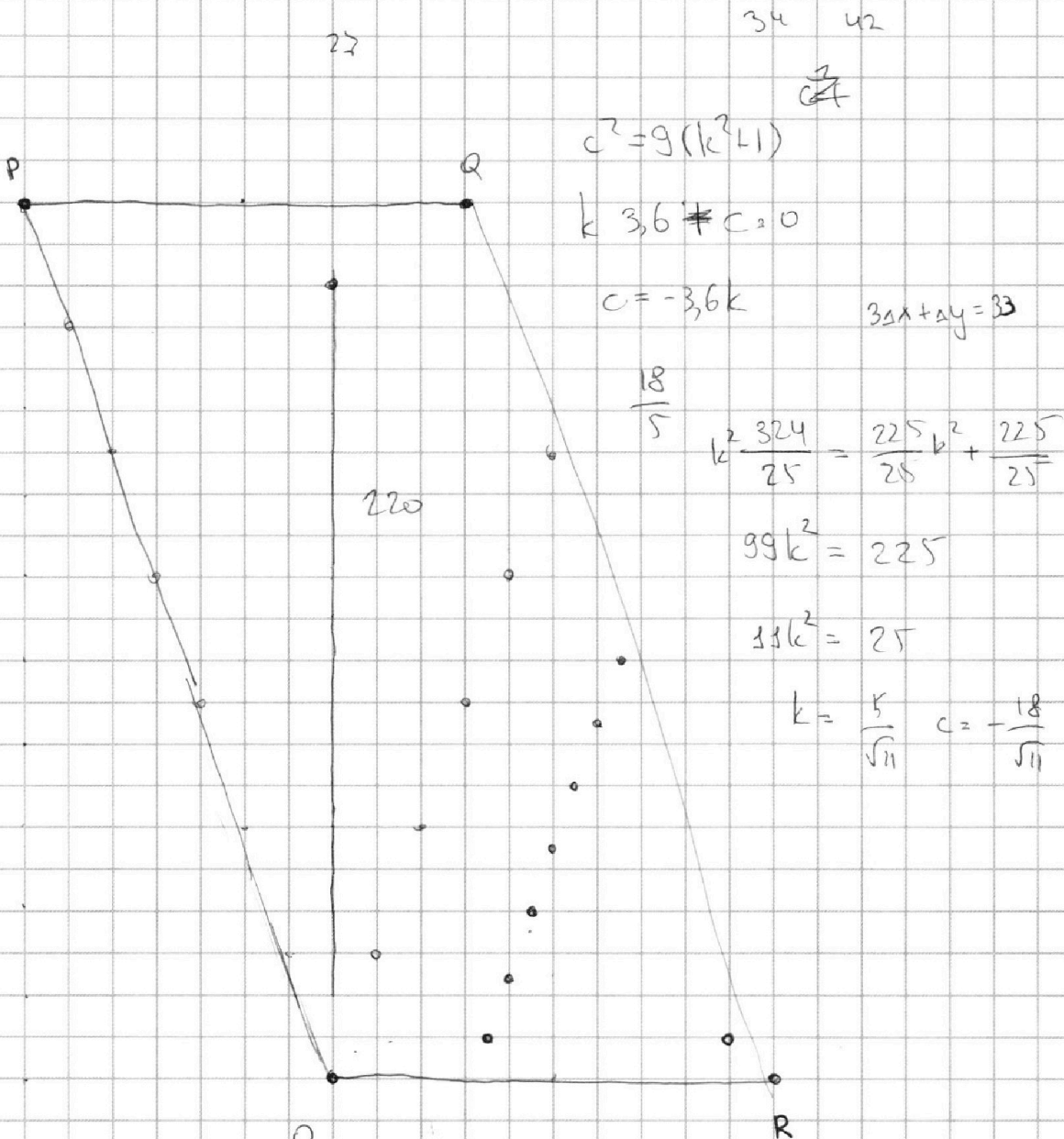
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$c^2 = 9(k^2 + 1)$$

$$k \cdot 3,6 \neq c = 0$$

$$c = -3,6k$$

$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$\frac{18}{5}$$

$$k^2 \frac{324}{25} = \frac{225}{25} k^2 + \frac{225}{25}$$

$$99k^2 = 225$$

$$11k^2 = 25$$

$$k = \frac{5}{\sqrt{11}} \quad c = -\frac{18}{\sqrt{11}}$$

$$x^2 - 12x + 36 - 4 +$$

$$\frac{25x^2 - 180x + 324}{11} = 0$$

$$x \cdot \sin \alpha = y \cdot \sin \beta$$

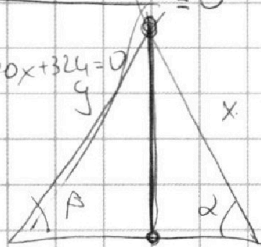
$$11x^2 - 132x + 396 - 44 + 25x^2 - 180x + 324 = 0$$

$$36x^2 - 312x + 676 = 0$$

$$9x^2 - 78x + 169 = 0$$

$$78$$

$$78^2 - 4 \cdot 9 \cdot 169$$



$$-78$$

$$19+$$





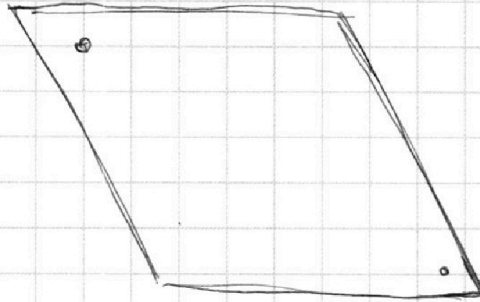
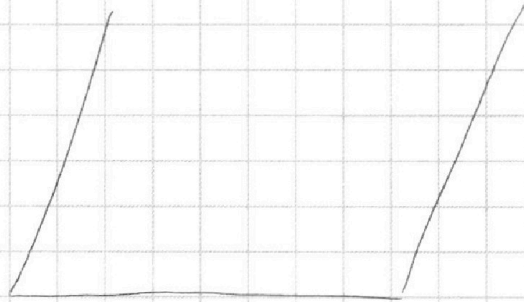
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3\Delta x + \Delta y = 33$$



A



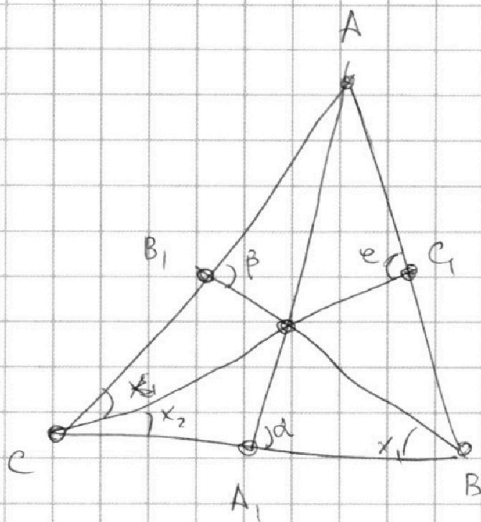
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = CC_1 \cdot \sin \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CC_1 \cdot \sin \epsilon$$

$$= AA_1 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AA_1 \cdot \sin \alpha$$

$$= BB_1 \cdot \sin \beta \cdot \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BB_1 \cdot \sin \beta$$

$$\frac{AC}{\sin \epsilon} = \frac{AB}{2 \sin \alpha}$$

sin

$$90 = CC_1 \cdot AC \cdot \sin \alpha =$$

$$= CC_1 \cdot BC \cdot \sin x_2 =$$

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \epsilon \cdot AB \cdot BC \cdot AC$$

$$\frac{BC}{\sin \epsilon} = \frac{AB}{2 \sin x_2} \quad \frac{BC}{\sin \beta} = \frac{AC}{2 \sin x_1}$$

$$S^2 = \frac{CC_1 \cdot BB_1}{4} \cdot BC \cdot \sin x_2 \cdot BC \cdot \sin x_1$$

$$\frac{1}{3} \frac{AA_1}{\sin x_1} = \frac{2}{3} \frac{BB_1}{\sin \alpha} \quad \sin \alpha = \frac{2 BB_1 \cdot \sin x_1}{AA_1} = \frac{2 CC_1 \cdot \sin x_2}{AA_1}$$

$$\frac{CC_1}{\sin x_1} = \frac{BB_1}{\sin x_2}$$

$$BB_1 \cdot \sin x_1 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

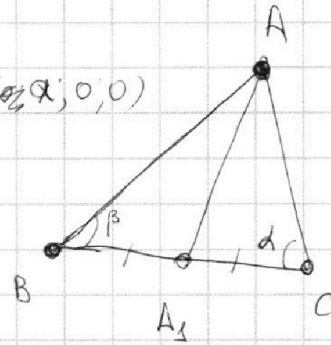
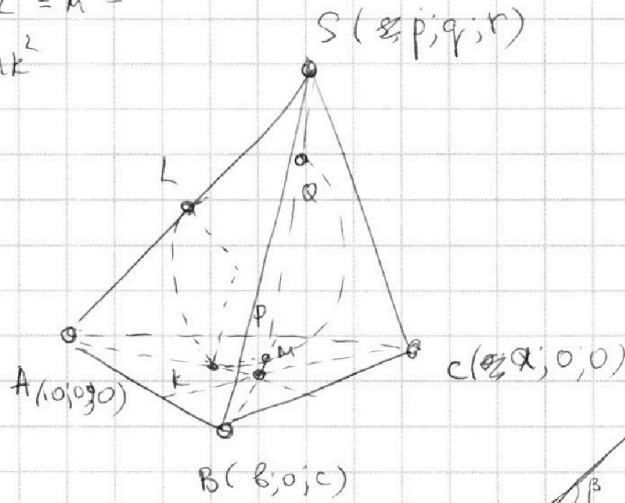
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



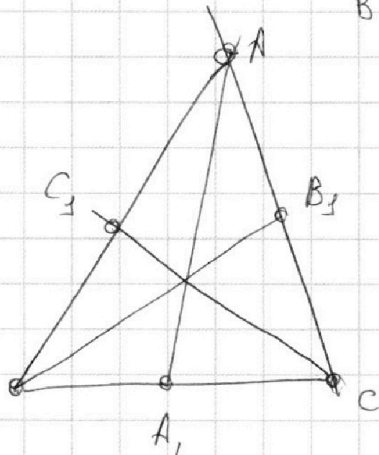
$$SO^2 - SL^2 = R^2 =$$

$$= OM^2 - MK^2$$

$$MK = SL$$

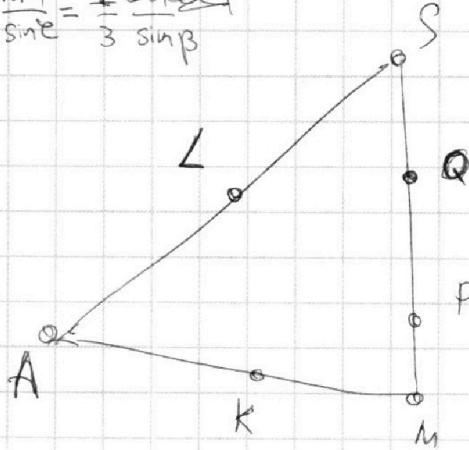
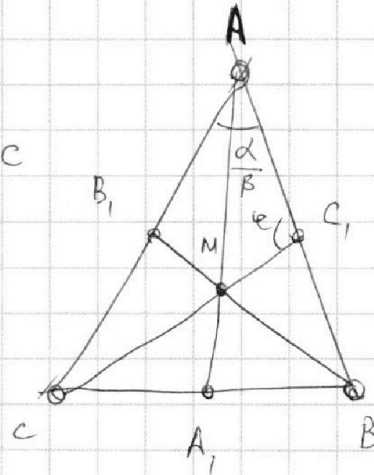


$$\frac{AA_1}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta}$$



$BB_1, B$

$$\frac{2 \cdot AA_1}{3 \sin \epsilon} = \frac{AC}{3 \sin \beta}$$



$$\frac{1}{2} \frac{AB \cdot CC_1}{2} \cdot \sin \epsilon$$

$$\frac{AB \cdot CC_1}{4} \cdot \sin \epsilon$$

$$\frac{AC}{\sin \epsilon} = \frac{CC_1}{\sin \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



8.

~~$\frac{x + \frac{\pi}{10}}{5} = 0$~~

3/11

$-\frac{4\pi}{3}$

~~8a~~  $\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$

$-\frac{\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$k = \frac{5}{\sqrt{11}}$   $c = -\frac{18}{\sqrt{11}}$

$\frac{5\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} + x \geq -\frac{5\pi}{2}$

$2\pi \geq x \geq -3\pi$

$\left(\frac{25}{11} + 1\right)g = \frac{(18)^2}{11}$

~~$x = \frac{\pi}{2}$~~

$\frac{5\pi}{3}$

$36 \cdot g = 18 \cdot 18$

$x = \frac{\pi}{2} - t$

$-3\pi$

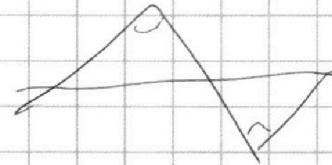
$\arcsin(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)) = \frac{\pi}{2} - t + \frac{\pi}{2}$

$16 - 4k^2 - 36k^2$

$5t = \pi - t$

$6t = \pi$

$\arcsin(\sin t)$



$\begin{cases} cx + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = \frac{a}{2}x - 1,5b \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$\frac{3}{2}$

$\frac{324}{25} - g = \frac{324 - 225}{25}$

$\frac{(18)^2}{25}$

3,6 2,4

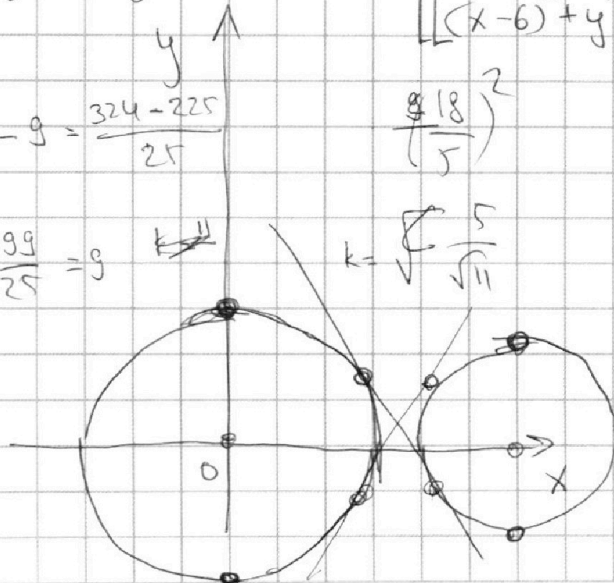
$\frac{99}{25} = g$

$k = \sqrt{\frac{5}{11}}$

$c = -3,6k$

$+3,6k^2 = 9k^2 + 9$

$g^2$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)  $ab = k \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$b = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$ac = n \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$abc^2 \geq ac$

684

$$\begin{array}{r} 396 \\ + 324 \\ \hline 720 \end{array}$$

$abc^2 = k_{min} \cdot 2^{42} \cdot 3^{60} \cdot 5^{60}$

$3x \cdot x$

$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

$y = \frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}$

$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{17}$

$b = 2^2 \cdot 3^3$

$c = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{13}$

$\frac{(5x-18)^2}{11} + (x-6)^2 = 44$

2)

A

$25x^2 - 180x + 324 + 4x - 132 = 44$

$36x^2 - 312x + 364 = 0$

$312^2 - 4 \cdot 36 \cdot 364 = 724$

$156^2 - 36 \cdot 364$

$78^2 - 9 \cdot 364$

$26^2 - 364$

396

$26$   
 $396 - 324$

E

D

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 26 \\ \hline 18 \\ 52 \\ \hline 78 \end{array}$$

C

B

C

B

~~CE/BC~~  
~~BC/AC~~

8

$\triangle CBF \sim \triangle AEB$

$\frac{CF}{BC} = \frac{AE}{AB}$

$\frac{CF}{CE} = \frac{CD}{AC}$

$\frac{CF \cdot CD}{AC \cdot BC} = \frac{AE}{AB}$

$\left(\frac{AC}{CE} - 1\right) = \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BC}$

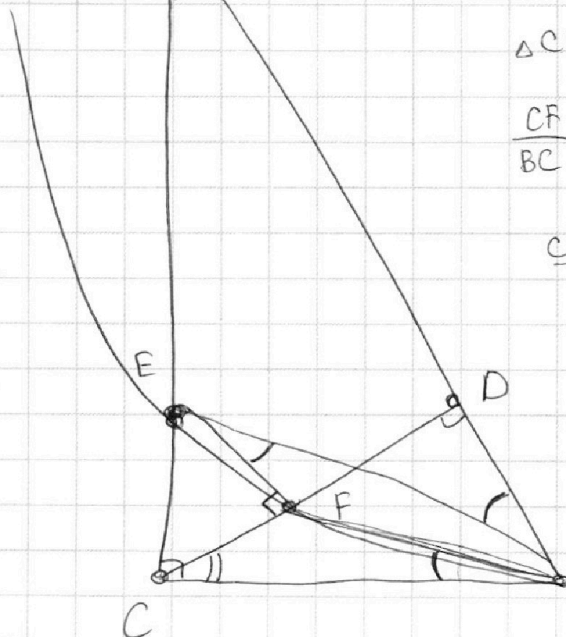
$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC}$

$\frac{AC}{CE} = 2$

$$\begin{array}{r} 156 \\ \times 52 \\ \hline 312 \\ 780 \\ \hline 8064 \end{array}$$

~~AD/DB~~

~~AD/AC = CD/BC~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x^3 = \log_3^4 (x^2 \cdot 3^5) - 8 \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_3 5y^3 =$$

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_3 3}$$

$$= \log_{25y}^2 (3^{11}) - 8$$

$$\log_x 3 = t$$

$$t^{-4} + 6t = 2,5t - 8$$

~~log~~

$$t^{-4} + 2t = 5,5t - 8$$

$$t^{-4} + 3,5t + 8 = 0$$

$\sqrt[3]{2}$

$$t^{-4} - 3,5t + 8 = 0$$

+3,5

-4 · t<sup>-5</sup>

~~log~~

log 81

9

2

$\sqrt[3]{2}$

$$\log_{5y} 3 = -\log_x 3$$

$$\frac{1}{\log_3 5y} = -\frac{1}{\log_3 x}$$

$$\log_{5y} x = -1$$

$$(5y)^{-1} = x$$

$$k \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} k$$

$$k^{-3} + 3,5k = k^{-3} + 7k = -8$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot 3,5$$

$$+\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot k^{-4} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot k + 8 = 0$$

$$k^{-4} - 7k + 8 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$36x^2 - 312x + 684 = 0$$

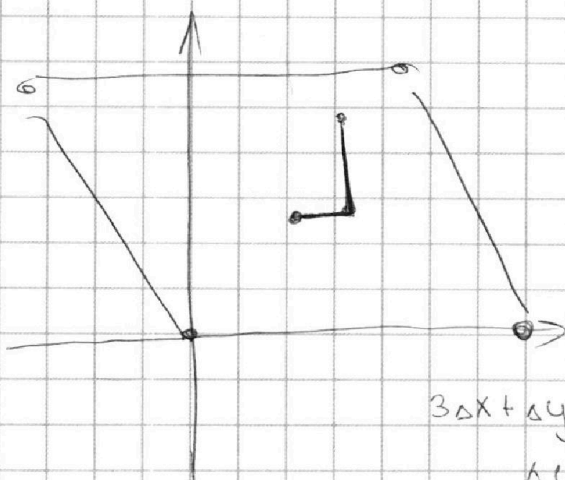
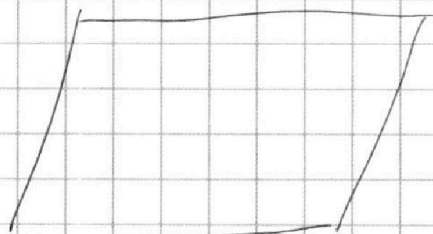
$$512^2 = 36 \cdot 4 \cdot 684$$

$$156^2 = 36 \cdot 684$$

$$\begin{array}{r} 156 \overline{) 6} \\ \underline{6} \phantom{0} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

$$6 \cdot 20 +$$

$$\begin{array}{r} x \ 26 \\ \underline{x \ 26} \\ 0 \end{array}$$



$$3\Delta x + \Delta y = 33$$

$$\Delta y = 3$$

$$\Delta y = 3k$$

$$k + \Delta x = 11$$

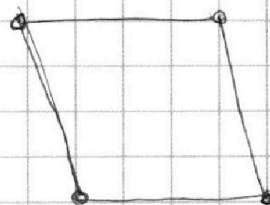
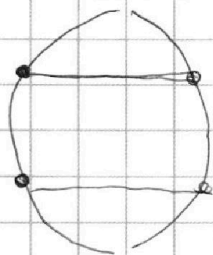
AB

$$y_2 = kx + b$$

$$(k+3)\Delta x = 33$$

$$\pi - (t - 2\pi)$$

$$t - 2\pi$$



$$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\pi - t$$

$$5\pi - 5t = \pi - t$$

$$\boxed{\pi = t}$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq t \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$t - 2\pi$$

$$5(\cancel{2\pi - t}) = \pi - t$$

$$6t = 8\pi$$

$$t = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\boxed{t = \frac{4\pi}{3}}$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq t \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{t}{\pi - t}$$

$$t - 2\pi$$

$$3\pi - b$$

$$\frac{12\pi}{2}$$

$$-\pi - t$$