



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

☒ [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF . $\frac{BD}{EF} = ?$ *2-я тема из сборника*

☒ [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

☒ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

☒ [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

☒ [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

☒ Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 . *7430*

☒ Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^9 3^{10} 5^{10} \cdot x$$

$$ac = 2^{19} 3^{18} 5^{30} \cdot y$$

$$bc = 2^{14} 3^{13} 5^{13} z$$

$$\left. \begin{array}{l} ab \\ ac \\ bc \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2^9 \\ 2^{19} \\ 2^{14} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3^{10} \\ 3^{18} \\ 3^{13} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 5^{10} \\ 5^{30} \\ 5^{13} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right\} \quad abc = 2^{42} 3^{47} 5^{53} xyz$$

$$\text{Тогда } abc = \sqrt[5]{2^{42} 3^{47} 5^{53}} xyz$$

Наше значение будет прав. при настл. $x, y, z \in N$

$$47 \text{ и } 53 \text{ нет. } \Rightarrow xyz = 3 \cdot 5$$

$$\text{Тогда } abc = 2^{21} 3^{21} 5^{24}, \text{ т.к. } abc : 5^{30} \Rightarrow \text{Ordet } 2^{21} 3^{21} 5^{30}$$

$$\text{Ordet: } 2^{21} 3^{21} 5^{30}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^{21} \\ 3^{21} \\ 5^{30} \end{array} \right\} \begin{array}{l} > 2^{19} \\ > 3^{18} \\ > 5^{30} \end{array} \left. \begin{array}{l} > 2^{14} \\ > 3^{13} \\ > 5^{13} \end{array} \right\} \begin{array}{l} > 2^9 \\ > 3^{10} \\ > 5^0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{подходит}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

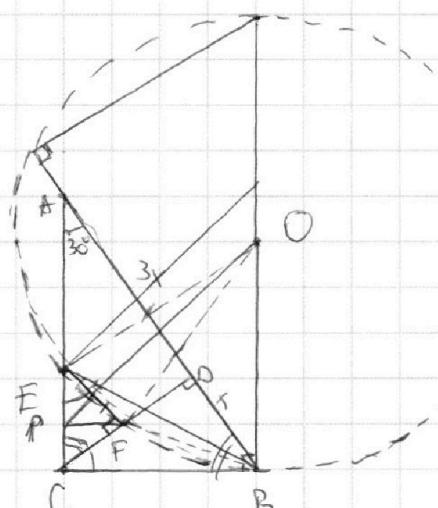
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $AB \parallel EF$

$$AD = 3x$$

$$DB = x$$

$$\angle ACB = 90^\circ$$

$$CD \perp AB$$

Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$

Решение:

$EF \parallel AB, CD \perp AB \Rightarrow EF \perp CD$

$$CD^2 = 3x \cdot x \quad \text{но cb. бас. } B \perp \Delta$$

$$CD = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x \Rightarrow \operatorname{tg} \angle ABC = \frac{CD}{DB} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$$

$$S_{ABC} = \frac{CD \cdot AB}{2} = \frac{\sqrt{3}x \cdot 4x}{2} = 2\sqrt{3}x^2$$

$$S_{CEF} = \frac{EF \cdot CF}{2} = \frac{EF \cdot (\operatorname{tg} 30^\circ \cdot EF)}{2} = \frac{EF^2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}EF^2}{6}$$

т.к. $\triangle AOC \sim \triangle EFC$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}x^2}{\sqrt{3}EF^2} = 12 \left(\frac{x}{EF} \right)^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{3x}{EF} \right)^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{AE}{CE} \right)^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{2\sqrt{3}x}{CE} \right)^2$$

Рычаг $AE = a$; $CE = AC - a$

$$AC = \frac{CP}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{3}x \quad BC = \frac{1}{2} \cdot 4x = 2x$$

По т. косинусов в $\triangle ECB$ и $\triangle AEB$:

~~$$(2\sqrt{3}x)^2 + (2x)^2 - EB^2 = (2\sqrt{3}x - a)^2 + (2x)^2 - EB^2$$~~

$$EB^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot \cos 30^\circ$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(2\sqrt{3}x-a)^2 + (2x)^2 = (4x)^2 + a^2 - 2 \cdot 4x \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Гр. 2 из 2

$$4x^2 - 4\sqrt{3}ax + a^2 + 4x^2 = 16x^2 + a^2 - 4\sqrt{3}ax$$

$$16x^2 + a^2 = 16x^2 + a^2$$

Угол между кас. и хордой $\angle CBE$ равен половине

ан. на \angle к центру

$$\cos \angle CBE = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + CE^2}}$$

Po T. кас. $\triangle EOB$: $EB^2 = OB^2 + OE^2 - 2 \cdot OB \cdot OE \cdot \cos(\angle OEB)$

$$\begin{aligned} EB^2 &= R^2(1 - \cos(\angle OEB)) = 2R^2(1 - \cos^2 \angle CBE) \\ &= 2R^2 \left(2 - \frac{4x^2}{4x^2 + CE^2}\right) \end{aligned}$$

При этом $EB^2 = 4x^2 + CE^2$

$$4x^2 + CE^2 = VR^2 - \frac{8R^2 x^2}{4x^2 + CE^2} \quad | \times (4x^2 + CE^2)$$

$$8x^4 + 8x^2 CE^2 + CE^4 = 8x^2 R^2 + 4R^2 CE^2 \quad | \cancel{8x^2 R^2}$$

$$CE^2 = t$$

$$t^2 + 6x^2 t + 8x^4 - 4R^2 t = 0$$

$$D = (8x^2 - 4R^2)^2 - 4 \cdot 8x^4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$\checkmark 3$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\text{Решение } t = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin t) = t$$

$$\arcsin(\sin t) = \begin{cases} t + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ \pi - t + 2\pi k & \text{т.к. } \cos k\pi = \pm 1 \text{ для } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5t + 10\pi k = t \\ 5\pi - 5t + 10\pi k = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = -10\pi k \\ 6t = 5\pi + 10\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2,5\pi k \\ t = \frac{5}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi k \\ x + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \\ x = \frac{4}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi k \end{cases}$$

Одно: $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$
 $x = \frac{4}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi k \quad | \quad t \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда при $a \in \left(-\frac{5}{\sqrt{11}}, \frac{5}{\sqrt{11}}\right)$ будут существовать, при которых
система будет иметь 4 реш.

Ответ: $a \in \left(-\frac{5}{\sqrt{11}}, \frac{5}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad \text{или} \quad (x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4) = 0$$

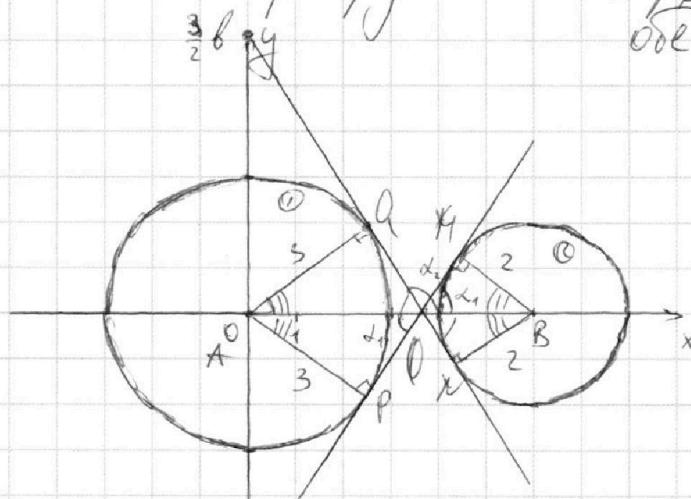
$$x^2 + y^2 = 9 \quad \textcircled{1}$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4 \quad \textcircled{2}$$

dep. c pag. 3

окр. с pag. 2

9 реш. \Rightarrow пресл
одн окр. в 2 точках
кааждую



$$ax + by - 3b = 0 \Rightarrow by = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b - \text{ур. видж } kx + b - \text{прямой}$$

вр. B видж на лесномолек. прямой, кр. a - на угол накл.

Тогда наайде кривые a, при всех a леж в пучности
интервале наайдется b.

$$\arctg(a) \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi) \quad \angle_2 = 2\pi - \angle_1$$

$$\sin \angle_1 = \frac{2}{OB} = \frac{3}{AO} \Rightarrow \frac{AO}{OB} = \frac{3}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow AO = \frac{3b}{5} \\ AB = 6 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow OB = \frac{12}{5} \\ \end{array} \right.$$

~~$$2^2 + MO^2 = \frac{144}{25}$$~~

$$MO^2 = \frac{144 - 100}{25} = \frac{44}{25} \Rightarrow MO = \frac{2}{5}\sqrt{11}$$

$$\tg \angle_1 = \frac{2}{MO} = \frac{2}{\frac{2}{5}\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Решение } a = \log_3 x ; \quad b = \log_3 5y$$

$$a^4 + \frac{b}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a} - 8$$

$$a^4 = \left(\frac{5}{2} - 6\right) \cdot \frac{1}{a} - 8 = -3,5 \cdot \frac{1}{a} - 8 = -\frac{4}{2a} - 8$$

$$a^4 = -\frac{4}{2a} - 8 \mid \times a$$

$$a^5 = -\frac{4}{2} - 8a$$

$$(a^5)' = 5a^4 \Rightarrow a^5 \text{ - монотонна}$$

$$\left(-\frac{4}{2} - 8a\right)' = -8 \Rightarrow \text{многоточие}$$

Тогда существует только 1 реш. при $a < 0$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{b} - 8$$

$$b^4 = \frac{4}{2} \cdot b - 1 - 8 \mid \times b$$

$$\begin{cases} b^5 = \frac{4}{2} - 8b \\ a^5 = -\frac{4}{2} - 8a \end{cases} \Rightarrow \text{т.к. реш. eq., то } a = -b \Rightarrow \log_3 x = -\log_3 y$$

для $y \neq 0$

$$b^5 = -\frac{4}{2} + 8b$$
$$b^5 = \frac{4}{2} - 8b$$

$$\text{Тогда } xy = 3^{\log_3(xy)} = 3^{\log_3 x + \log_3 y} = 3^0 = 1$$

$$\text{Ответ: } xy = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$$

$$\text{Т.к. } 3(x_2 - x_1) \div 3; 33 \div 3; \text{ ТО } (y_2 - y_1) \div 3$$

$$y_2 \equiv y_1$$

Тогда $y_2 - y_1 = 0; 3; 6; 9; \dots; 42$ - всего 15 вариантов

$y_2 - y_1 = 0; -3; -6; -9; \dots; -42$ - всего 15 вариантов

сумм. 29

т.к. 0 б.

$$\text{Тогда } x_2 - x_1 = 11 + \frac{y_2 - y_1}{3} = 11 \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm 14$$

одных 29.

Но $x_2 - x_1$ не больше $20 - (-14) = 34$ и не меньше $-14 - 20$

$$34$$

$$-34$$

$y_2 - y_1$ не больше 42 и не меньше -42

Тогда бар. сост. пары $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ 29 штук

Однако ~~такие~~ ^{бар.} $y_2 - y_1 = 42$, и ~~такие~~ ^{такие} сумм. можно
исп. только 6 ~~пар~~ $2 \cdot (20 - 3) = 34$ пар,

аналогично для других пар. Но для $y_2 - y_1 = 0$ нет
пар, так что 420 случаев. Тогда суммарно

$$34 \cdot 28 + 420 = \underline{\underline{1342}}$$

Ответ: 1342

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

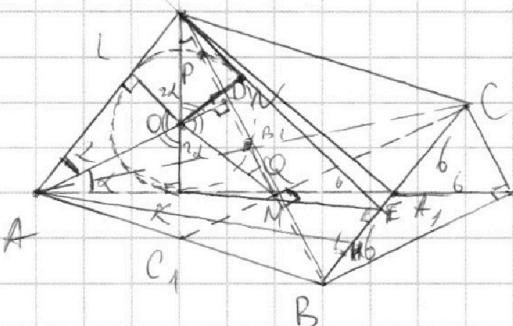


$$SP = 14Q$$

$$S_{ABC} = 90$$

$$SA = BC = 12$$

S



$$\triangle ALD \cong \triangle AKD \text{ (no 2 unq. u c)} \Rightarrow AL = AK$$

$$AS = AK = 12$$

$$\text{Тогда } MA_1 = \frac{1}{2} AM = 6 \Rightarrow MA_1 = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \angle BAC - \text{односторонн}$$

$$AA_1 = MA_1 + AM = 18$$

$$\text{Нес. делит треуг. на 2 равнобед. трапеи} \Rightarrow S_{CC_1B} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 45$$

$$S_{CC_1B} = \frac{BB_1 \cdot CC_1}{2} = \frac{2 BB_1 \cdot CC_1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3} BB_1 \cdot CC_1$$

$$\text{Тогда } BB_1 \cdot CC_1 = 3 \cdot 45 = 135$$

$$\text{Тогда } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 135 = 2430$$

$$\text{5) } SN = 4, NO \perp BCS, R = 5 = ON = OL = OK = OP = OQ$$

V.K. $\triangle SDO \cong \triangle MDO$, т.о. A, O, D - коллинеарные

$$\frac{\angle A}{2} = 2 \quad \sin \angle = \frac{LO}{OA} = \frac{SD}{AS} = \frac{1}{2} GM$$

$$\angle LOS = \angle KOM = \frac{360^\circ - 4(90^\circ - 2\angle)}{2} = 180^\circ - 180^\circ + 2\angle = 2\angle$$

$$\sin \angle = \sin \angle OSD = \frac{OD}{OS} = \frac{SD}{AS}$$

$$\tan \angle = \frac{OL}{AL} = \frac{OD}{AS} = \frac{OS}{AS}$$

V.K. SL, SN - кас. к окруж., т.о.
 $SL = SN$; $\angle USO = \angle VSO = 90^\circ - 2\angle$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle SOK = 90^\circ - 90^\circ + 2\alpha = 2\alpha$$

$$\tan \angle SOK = \frac{SK}{SO} = \frac{4}{5}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{4}{5}$$

$$2\alpha = \arctan \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha = t$$

$$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{16}{25} \Rightarrow t^2 = \frac{16}{25} - \frac{16}{25}t^2$$

$$\frac{41}{25}t^2 = \frac{16}{25}$$

$$t^2 = \frac{16}{41}$$

$$t = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}} \quad \cos 2\alpha = \sqrt{\frac{25}{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{SK}{SA} = \frac{SK}{12} = \frac{4}{\sqrt{41}} \Rightarrow SK = \frac{48}{\sqrt{41}}; \quad AK = SA \cdot \cos 2\alpha = \frac{60}{\sqrt{41}}$$

~~Решение задачи № 1~~

$$\triangle AA_1K \sim \triangle KEA_1 \Rightarrow \frac{KE}{AA_1} = \frac{KA_1}{AA_1}$$

$$KE = \frac{KA_1}{AA_1} \cdot AA_1 = \frac{AA_1 - AK}{AA_1} \cdot AA_1 = \left(1 - \frac{60}{\sqrt{41}}\right) \cdot 15 = \left(1 - \frac{10}{3\sqrt{41}}\right) 15 = \\ = \left(\frac{3\sqrt{41} - 10}{3\sqrt{41}}\right) \cdot 15 = \frac{15\sqrt{41} - 50}{\sqrt{41}} = 15 - \frac{50}{\sqrt{41}}$$

$$\text{Тогда гл. угол при } BC = \angle SEK = \arctan \left(\frac{SK}{KE} \right) = \\ = \arctan \left(\frac{48}{\sqrt{41}} \cdot \frac{\sqrt{41}}{15 - \frac{50}{\sqrt{41}}} \right) = \arctan \left(\frac{48}{15\sqrt{41} - 50} \right)$$

~~Ответ:~~ 1) 2430
2) $\arctan \left(\frac{48}{15\sqrt{41} - 50} \right)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



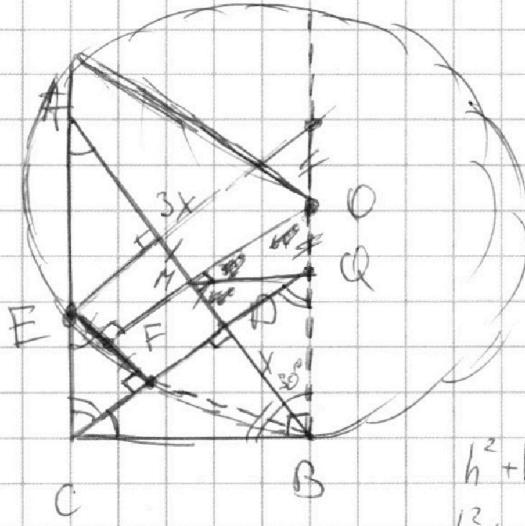
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EF$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$

$$\begin{matrix} S_{ABC} \\ S_{EFF} \end{matrix}$$

$$h^2 + (3x)^2 = AC^2$$

$$h^2 + x^2 = CB^2$$

$$AB^2 = 2h^2 + 10x^2$$

$$16x^2 = 2h^2 + 10x^2$$

$$2h^2 = 6x^2$$

$$h = \sqrt{3}x \quad h^2 = 3x^2$$

$$AC^2 = 12x^2$$

$$CB^2 = 4x^2$$

$$S_{ABC} = \frac{4x - \sqrt{3}x}{2} = 2\sqrt{3}x^2$$

$$\frac{x + \frac{1}{2}EF}{x} = \frac{R}{BC}$$

$$\angle AOD = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30^\circ$$

$$S_{EFF} = \frac{EF \cdot CF}{2} = \frac{EF^2 \cdot \tan 30^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} EF^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{EFF}} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}x^2}{\sqrt{3}EF^2} = 12 \left(\frac{x}{EF}\right)^2 = 12 \left(\frac{BQ}{2QO}\right)^2 = 3 \left(\frac{BQ}{QO}\right)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \quad | :5$$

$$\arcsin(\cos x) = \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \right)$$

$$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$$

$$\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$$

$$\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{2} \pm 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad (1 \pm 5)x = 2\pi + 10\pi k$$

$$6x = \frac{2\pi}{1 \pm 5} + \frac{10\pi}{1 \pm 5} k$$

$$x_1 = -2\pi +$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \quad 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \underset{\text{1}}{\cancel{\cos \frac{\pi}{2}}} + \underset{\text{1}}{\cancel{\sin \frac{\pi}{2}}} \cos x = \cos x$$

$$\log_3^4(5y) \neq 2 \log_3 y \quad 3 = \frac{17}{2} \log_3 y \quad 3 - 8$$

$$a = \log_3 5y$$

$$a^4 + 2a^{-1} = 5,5a - 8/x a$$

$$a^5 + 2 = \frac{11}{2}a^2 - 8a$$

$$5y \neq 17 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{5} \\ y > 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } S_{CC_1B} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{MB \cdot CC_1}{2}$$

$$30 = MB \cdot CC_1$$

$$CC_1 = \frac{90}{MB} = \frac{90}{\frac{2}{3}BB_1} = \frac{270}{2BB_1}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot BB_1 \cdot \frac{135}{BB_1} = 2430$$

$$\begin{array}{r} \times 135 \\ 18 \\ \hline 1980 \\ 135 \\ \hline 2430 \end{array}$$

9 10 10

14 13 13

19 18 30

42 41 53

~~HOK(ab; ac) / HOK(ac; bc)~~

9 10 10
2 3 5

$$abc^2 = HOK(ab; ac; bc) \cdot HOD(ab; ac; bc)$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{5} \\ \cancel{2} \cancel{3} \cancel{5} \\ 2 \quad 3 \quad 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{5} \cancel{4} \cancel{6} \\ \cancel{2} \cancel{3} \cancel{5} \cancel{4} \cancel{6} \\ 0,5 + 0,18 = 0,39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 62 \\ 80 \\ 213 \\ \hline 82 \end{array} \quad \begin{array}{r} 84 \\ 46 \\ \hline 38 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 28 \\ \hline 272 \\ 68 \\ \hline 952 \end{array}$$

$$272 + 46 = 318$$

$$952 + 46 = 998$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

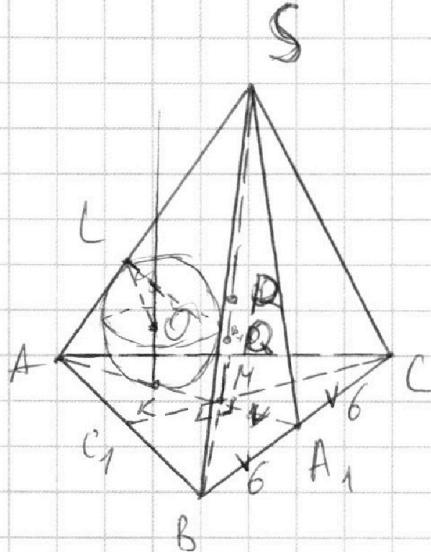
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



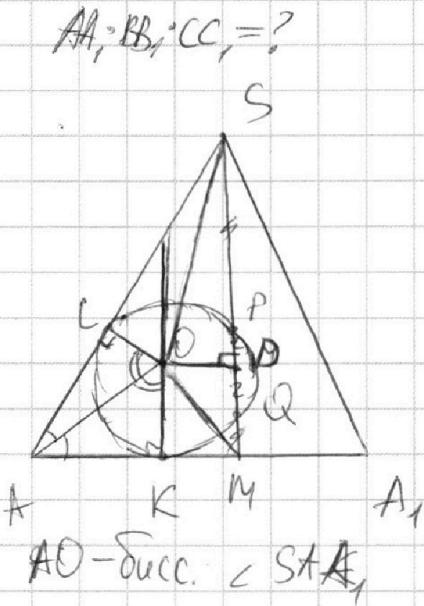
$$SP = MQ$$

$$S_{\triangle ABC} = 90$$

$$SA = BC - 12$$

$$\frac{BC \cdot h}{2} = 90 \Rightarrow h = \frac{90}{6} = 15$$

$$\frac{60}{18} = \frac{10}{3}$$



$$SD = DM \Rightarrow DS = DM$$

↑ (из п-ктн д)

$$OD \perp PQ \quad SL = MK$$

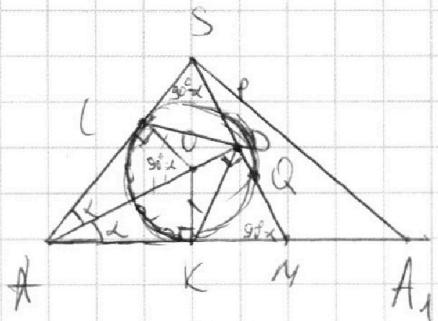
$$AL = AK$$

$$AL = AK$$

$$AM = AS$$

Тогда AOD -комплимент, т.к. на дисс. про Δ

$$SA = 12 \Rightarrow AM = 12 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow AA_1 = 18$$

$$\underline{\underline{MA_1 = 6}}$$

$$\Rightarrow \angle BAC - \text{прямой}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда находитсѧ только 1 реш.
(т.к. $f(t) \leq g(t)$)

$$t^5 = \frac{5}{2}t^2 - 8t - 6$$

$$t=2: 32 = \frac{5}{2} \cdot 4 - 16 - 6$$

$$t=-1: -1 = \frac{5}{2} + 8 - 6$$

$$t=-2: -32 = \frac{5}{2} \cdot 4 - 16 - 6 = 0$$

$$t=4: 1024 = 40 - 16 - 6$$

$$f(1) = \frac{5}{2} - 8 - 6 = -\frac{15}{2}$$

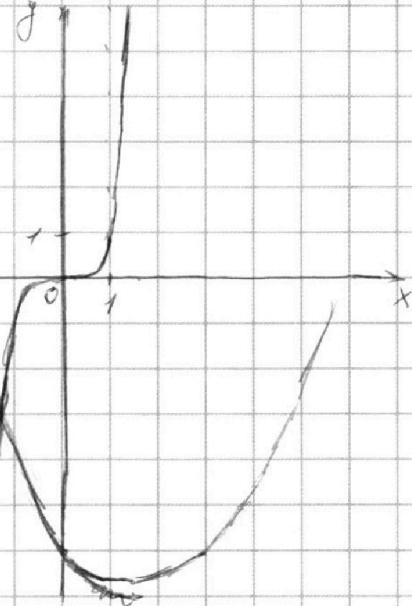
$$f(-1) = \frac{5}{2} + 2 = \frac{11}{2}$$

$$f(0) = -6$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - 10 = -\frac{75}{8}$$

$$t = -k$$

$$-k^5 = \frac{5}{2}k^2 + 8k - 6$$



~~$$3(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = 33$$~~

$$\alpha x + \beta y - 36 = 0 \Rightarrow y = 36 - \alpha x \Rightarrow y = \frac{36}{2} - \frac{\alpha x}{2} = -\frac{\alpha}{2}x + \frac{3}{2}\beta$$

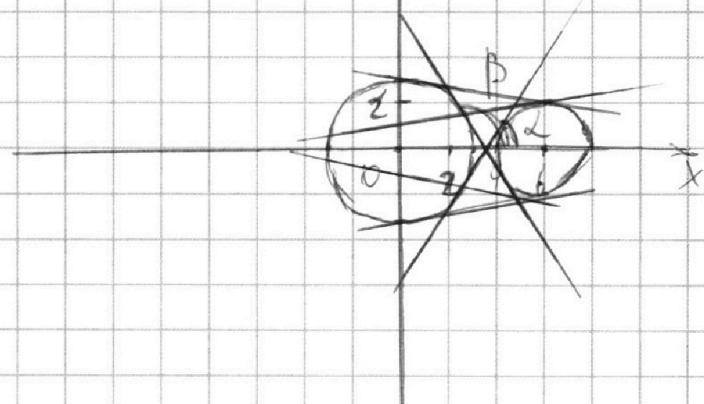
$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad (x-6)^2 + y^2 = 4$$

$$x=0 \quad y=\frac{3}{2}\beta$$

$$\arctg\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\arctg\alpha \neq \alpha; \beta$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^9 3^10 5^{10}$$

$$bc : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac : 2^{15} 3^{18} 5^{30}$$

$$a = 2^x 3^y 5^z$$

$$c = 2^{19-x} 3^{18-y} 5^{30-z}$$

$$2^x 3^y 5^z \cdot b : 2^9 3^{10} 5^{10} \Rightarrow ac \cdot b^2 : 2^{13} 3^{23} 5^{23}$$

$$2^{19-x} 3^{18-y} 5^{30-z} : 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac \cdot b^2 : 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow acb^2 : 2^{23} 3^{23} 5^{30}$$

$$b^2 : 2^4 3^5$$

$$b : 2^2 3^3$$

$$\log_3^v x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \text{Однозначн.}$$

$$243 = 3^5 \cdot 3 = 3^6 = 3^5$$

$$t = \log_3 x$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2} t - 8 \quad | \times t$$

$$t^5 + 6 = \frac{5}{2} t^2 - 8t$$

$$f(t) = \frac{5}{2} t^2 - 8t + 6 \quad g(t) = t^5$$

$$-\frac{6}{20} = \frac{8}{5} \quad f\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{8}{5} - \frac{64}{5} - 6 = \frac{8 \cdot 4 - 8 \cdot 6}{5} - 6 = -\frac{8 \cdot 4}{5} - 6 = -0,64 - 6 = -6,64$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

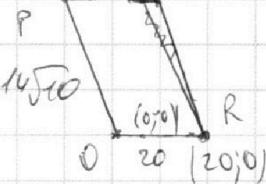
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1$$

$$3\Delta x + \Delta y$$

(-1, 42) Q (6, 42)



$$\text{т.е. } -\frac{4}{2} = 6a$$

$$a = -\frac{4}{16} \cancel{\Rightarrow} (q, 0)$$

1
42

$$\tan \alpha = \frac{-20}{42} = -\frac{10}{21}$$

$$\frac{26}{34} = \frac{13}{17} \Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{15}{14} \approx \frac{14}{18} = \frac{4}{9} = 0,48$$

$$14^2 + 42^2 = 4^2 \cdot 2^2 + 4^2 \cdot 6^2 = 4^2 \cdot 40 \Rightarrow PO = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{10} = 14\sqrt{10}$$

$$3 \cdot \Delta x + \Delta y = 33$$

$$\Delta y = 33 - 3\Delta x$$

$$3\Delta x : 3 \Rightarrow \Delta y : 3$$

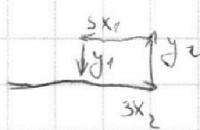
$$\Delta x \cdot \Delta y = 33\Delta x - 3\Delta x^2 \leq 34 \cdot 42$$

$$\Delta x \in 0;$$

$$11\Delta x - \Delta x^2 \leq$$

$$\frac{1}{4}(2\pi - \alpha) = \frac{\sin(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} =$$

$$= \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$



$$\text{След. } y_2 - y_1 = 0, \text{ т.о.}$$

$$x_2 - x_1 = 11$$

$$\text{т.е. } x_2 = 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0; -1; -2; -3 \rightarrow 10 \text{ вариантов.}$$

т.е. ~~если~~ если $y_2 = y_1$ — 420 вариантов

$$\text{След. } x_1 = x_2$$

$$a^5 + 8a = -\frac{4}{2}$$

$$\begin{aligned} y &\geq -\frac{10}{21}x \\ y &\leq -\frac{10}{21}x + 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &\leq 42 \\ y &\geq 40 \end{aligned}$$