



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-14;42)$ ,  $Q(6;42)$  и  $R(20;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна  $90$ ,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен  $5$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из условия:

$$\begin{cases} ab = k_1 \cdot 2^8 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ bc = k_2 \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac = k_3 \cdot 2^{18} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{cases} \quad k_1, k_2, k_3 - \text{некоторые натуральные} \\ \text{коэффициенты}$$

Перемножив уравнения получим:

$$a^2 b^2 c^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{3+14+18} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$abc = \sqrt{k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{21} \cdot 3^{20} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{15}$$

$$\text{Если } a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{k_1 k_2 k_3} = n \sqrt{15}, \text{ где } n \in \mathbb{N} \\ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$$

$$abc = n \cdot 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

Очевидно, что чем меньше  $n$ , тем меньше  $abc \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Наименьшей } abc \text{ при } n=1 \Rightarrow abc_{\min} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

**МФТИ**



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5}{2}\pi - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

~~$$6x = \frac{4}{2}\pi$$~~

$$6x = \frac{4}{2}\pi$$

$$x = \frac{2}{6}\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{6 ОДЗ}$$

Проверка:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$5 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + 2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = 5 \arcsin(\cos(\frac{\pi}{3}))$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{3}$ .

~~$$\text{ОДЗ: } -\frac{\pi}{2} \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$+\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} + 15x \leq \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{ при любых } x \Rightarrow$$~~

~~$$\text{2 неравенства не выполняются}$$~~

ОДЗ:  $-1 \leq \cos x \leq 1$  - выполняется при любых  $x$ .

$$\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \quad \text{п.к. } \arcsin(\cos(\frac{\pi}{2} - x))$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 36) = 0 \end{cases}$$

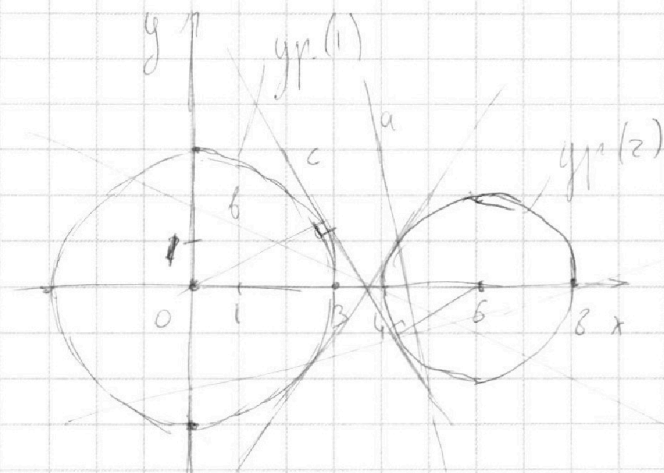
Второе уравнение эквивалентно совокупности:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (1) \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Это уравнение окружностей.} \\ (1) \text{ вершина } (0; 0) \quad R=3 \\ (2) \text{ вершина } (6; 0) \quad R=2 \end{array}$$

Изобразим их на графике:



Чтобы система имела  
4 решения, прямая  
 $ax + 2y - 3b = 0$   
должна пересекать обе  
окружности при  
каком-то  $b$ .

Очевидно, что если модуль условного коэффициента  
прямой больше <sup>либо равен</sup> модулю условного коэффициента  
касательной (прямые  $a$  и  $c$ ) к обеим окружностям, то  
пересечь прямую  $c$  обеими окружностями невозможно  
при любом  $b$ . Если модуль меньше, то пересечение  
возможно (прямая  $b$ ).



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

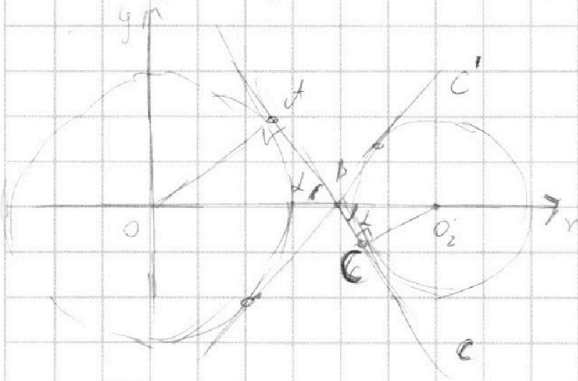
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(продолжение)

Найдем угловой коэффициент касательной к  $\sigma$  и  $\sigma'$



Проведем радиусы в точку касания  
Тогда  $\triangle OAB \sim \triangle BCO_2$  по углам:  
1) вертикальные  $\angle$   
2) прямые  $\angle OAB$  и  $\angle O_2CB$

$$\text{Тогда } \begin{cases} OB = AO = \sqrt{9} = 3 \\ O_2B = O_2C = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

$$OB + BO_2 = OO_2 = 6$$

$$\begin{cases} 2OB = 3O_2B \\ OB + O_2B = 6 \end{cases} \Rightarrow OB + \frac{2}{3}OB = 6$$

$$\frac{5}{3}OB = 6$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \frac{OB}{O_2B} = OB = \frac{18}{5}$$

$$= \frac{3}{5} = \frac{15}{25} = \frac{5}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow \text{угловой коэф. } \sigma \text{ } k = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}}$$

В силу симметрии относительно  $OO_2$  (оси  $Ox$ ) угловой коэф.  $\sigma'$ :  $k' = \operatorname{tg} \beta = \frac{5}{\sqrt{11}}$

Преобразуем уравнение  $ax + 2y - 3z = 0$ ?

$$2y = 3z - ax \Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + 3z$$

Пусть скажем  $z = 1$

$$|-\frac{a}{2}| < \frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow -\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}, \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\frac{-10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y} 2(3^{11}) - 8 \end{cases}$$

ОДЗ:  $x > 0, x \neq 1$   
 $y > 0, 5y \neq 1$   
 $y \neq \frac{1}{5}$

$$\begin{cases} \sqrt{\log_3^4 x + 6 \log_x 3} = \frac{1}{2} \log_x 3^5 - 8 \\ \sqrt{\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3} = \frac{1}{2} \log_{5y} 3^4 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0 \\ \log_3^4 (5y) + \frac{7}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0 \end{cases} \text{ вычтем из первого второе:}$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 (5y) + \frac{7}{2} (\log_x 3 + \log_{5y} 3) = 0$$

$$(\log_3 x + \log_3 (5y)) (\log_3 x - \log_3 (5y)) (\log_3^2 x + \log_3^2 (5y)) + \frac{7}{2} \left( \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 (5y)} \right) = 0$$

$$(\log_3 x + \log_3 (5y)) \left( (\log_3 x - \log_3 (5y)) (\log_3^2 x + \log_3^2 (5y)) + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x \cdot \log_3 (5y)} \right) = 0$$

$$\log_3 (5xy) = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

Ответ:  $\frac{1}{5}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

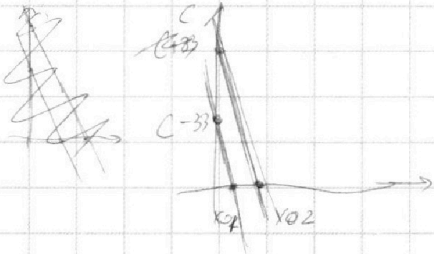
$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33 \quad (1)$$

$3x_2 + y_2 = 3x_1 + y_1 + 33 \rightarrow$  т.е. эту условию (1) удовлетворяют любые две точки лежащие на прямой вида:

$$3x_1 + y_1 + C + 33 = 0 \Rightarrow y_1 = -3x_1 - C - 33$$

$$3x_2 + y_2 + C = 0 \Rightarrow y_2 = -3x_2 - C$$

~~и могут быть~~ и могут быть различными при различных значениях свободного члена  $C$ .



как видно из рисунка

$$\left. \begin{aligned} x_{01} &= \frac{C-33}{3} = \frac{C}{3} - 11 \\ x_{02} &= \frac{C}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_{02} - x_{01} = 11 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  прямые, на которых лежат

точки, удовлетворяющие условию (1) можно получить параллельным переносом одной из них на 11 вдоль оси  $Ox$ .

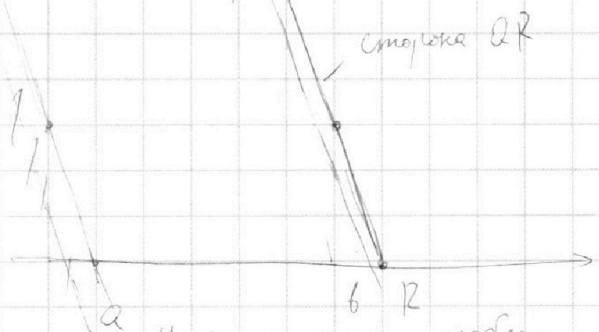
Заметим также, что две точки  $O$  и  $P$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{42 - 0}{-14 - 0} = -3 \Rightarrow \text{угловой коэффициент стороны } OP \text{ и } QR$$

равен  $-3$ . ~~как и прямые~~ Легко заметить, что  $PQ$  и  $OR$

параллельны  $Ox$ .

Рассмотрим плоскость вблизи точки  $R$ .



Точки, удовл. усл. (1) для  $QR$  лежат на прямой  $a \parallel QR$  и сдвинутой на 11 единиц влево вдоль  $Ox$ .

На  $QR$  лежат 15 точек с целыми координатами, на  $a$  (в пределах  $PQ$  и  $RO$ ) тоже. Поскольку усл. (1) выполн.

Налицо для любых точек  $QR$  и  $a$ , то всего пар  $15 \cdot 15 = 225$ .  
(см. следующий лист)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Е (продолжение)

Если мы построим пару прямых параллельных переносом  $QR$  и  $a$  на единицу влево вдоль  $Ox$ , где не очевидно какое ~~число~~ пар точек тоже 225.

Повторив такую операцию 9 раз, получим, что прямая в которую перенесли прямая  $a$  совпадет с прямой  $OP \Rightarrow$  при дальнейшем переносе точки не будут лежать внутри  $OPQR \Rightarrow$  всею пар прямых такого вида 10  $\Rightarrow$  на них лежит  $225 \cdot 10 = 2250$  пар точек.

Но, если мы сдвинем  $QR$  и  $a$  на  $\frac{1}{3}$  влево вдоль  $Ox$ , то получим прямые так же параллельные друг другу точки с целыми координатами, причем лежащих внутри  $PQR$  будет по 14 на каждой прямой, т.е.  $14 \cdot 4 = 136$  пар.

Из рассуждений, аналогичных рассуждениям для  $a$  и  $QR$ , получим, что таких пар ~~прямых~~ прямых 9  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  пар точек  $9 \cdot 136 = 1764$ .

$$\begin{array}{r} 136 \\ \cdot 9 \\ \hline 1764 \end{array}$$

Если мы и это семейство прямых сдвинем на  $\frac{1}{3}$  влево вдоль  $Ox$ , то получим полностью аналогичное ему, содержащее еще 1764 пар точек.

Сдвинув их еще на  $\frac{1}{3}$  получим, что они перейдут в прямые сдвинутые относительно  $QR$  на целое число, т.е. уже рассмотренное семейство.

Мы двинули прямые на  $\frac{1}{3}$  вдоль  $Ox$ , т.к. это эквивалентно их сдвигу вдоль  $Oy$  на 1, т.е. если сдвинуть прямую содержащую ~~какую~~ точки с целыми координатами, то и на полученной прямой такие точки найдутся.

Итоговое кол-во пар точек:  $2250 + 1764 + 1764 = 5778$

$$\begin{array}{r} 2250 \\ + 1764 \\ + 1764 \\ \hline 5778 \end{array}$$

Ответ: 5778.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3 \log_3^5 x + 2 \log_3 x + \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_3^4 5y + 2 \log_3 5y = \frac{11}{2} \log_3 5y - 8$$

$$\log_3^4 5y + \frac{7}{2} \log_3 5y + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_3 x + 8 = 0$$

$$\log_3^5 5y + 8 \log_3 5y - \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + \frac{7}{2} = 0$$

~~log~~

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y + \frac{7}{2} (\log_3 x + \log_3 5y) = 0$$

$$(\log_3^2 x - \log_3^2 5y)(\log_3^2 x + \log_3^2 5y) + \frac{7}{2} \left( \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y} \right) = 0$$

$$(\log_3 x + \log_3 5y) (\log_3^4 x - \log_3^4 5y) (\log_3^2 x + \log_3^2 5y) + \frac{7}{2 \log_3 x \cdot \log_3 5y} = 0$$

$$\log_3^5 xy = 0$$

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

$$\log_a a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\log_3^5 x + \log_3^5 5y + 8 \log_3^5 xy = 0$$

~~log~~

$$\log_3^4 x + \log_3^3 x \log_3 5y + \log_3^2 x \log_3^2 5y +$$

$$a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4 + 8 = 0$$

$$(a-b)(a^2 + b^2) + \frac{7}{2ab} = 0$$

$$a^3 + ab^2 + ba^2 - b^3 + \frac{7}{2ab} = 0$$

$$2a^4 b + 2a^3 b^2 + 2a^2 b^3 - 2ab^4 + 7 = 0$$

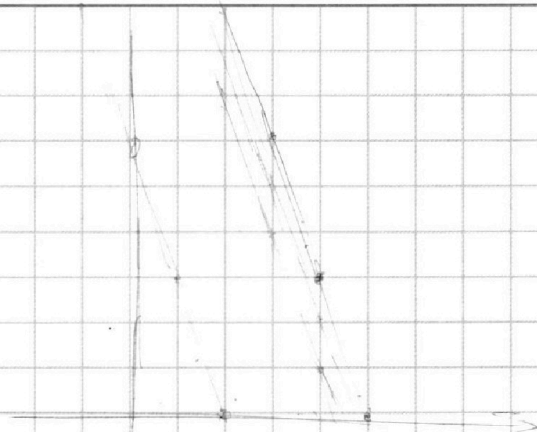
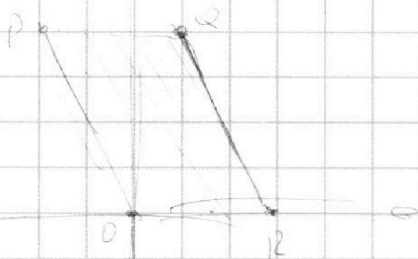
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3x_2 + y_2 = 3x_1 + y_1 + 33$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33 \quad 3x_2 + y_2 + C = 0 \quad y_2 = -C - 3x_2$$

$$y_2 - y_1 = 3(1 + x_1 - x_2) \quad 3x_1 + y_2 + C + 33 = 0 \quad y_1 = -(-3x_1 - 33)$$

$$14 \cdot 14 \cdot 9 + 13 \cdot 13 \cdot 8 + 13 \cdot 13 \cdot 8$$

$$\begin{cases} ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ abc = 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ ac = 2^{13} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{cases}$$

~~$$ab \cdot bc = ac \cdot b = 2^{23} \cdot 3^{23} \cdot 5^{23}$$~~
~~$$b = 2 \cdot 3 \cdot 5$$~~

$$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 = 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

~~$$a + ab^2 - ab^3 - b + \frac{7}{2ab}$$~~
~~$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$~~

$$2a^4 b + 2a^2 b^3 - 2a^2 b$$

$$(a-b)(a^2+b^2)$$

$$a^3 + ab^2 - a^2b - b + \frac{7}{2ab} = 0$$

$$2a^4 b + 2a^2 b^3 - 2a^3 b^2 - 2ab^4 + 7 < 0$$

~~$$2a^2 b^2$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 3 = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 2 = \frac{|6a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \quad \begin{matrix} a=2 \\ b=2 \\ c=-36 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a^2+1 \\ 36 \\ (6a-3b)^2 = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 3a^2+12=9b^2 \\ 7a^2+8=6a^2-36ab+9b^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 6a-3b \\ (3b)^2=3a^2+12 \\ (6a-3b)^2=2a^2+8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 18b^2=(36a^2-36ab+9b^2) \\ 108a^2-108ab+9b^2=0 \\ 12a^2-12ab+b^2=0 \end{matrix}$$

$$7a^2-36ab+4=0 \quad \begin{matrix} 36 \\ \times 48 \\ 1288 \\ 144 \\ -1728 \\ 216 \\ 1672 \\ 45 \\ 167 \end{matrix} \quad \begin{matrix} b^2-12a \cdot b+4a^2=0 \\ D=144a^2-4a^2= \\ =96a^2 \\ \sqrt{D}=a\sqrt{96} \end{matrix}$$

$$b = \frac{7a^2+4}{36a} \quad \begin{matrix} 18 \\ \times 8 \\ 36 \\ 288 \end{matrix} \quad b = a(6 \pm \sqrt{24})$$

$$3a^2+12 = \frac{4(49a^4+56a^2+16)}{4 \cdot 36a^2} \quad 3b = 18a + 3\sqrt{24}a$$

$$6 \cdot 36 \cdot a^4 + 12 \cdot 4 \cdot 36a^2 = 49a^4 + 56a^2 + 16 \quad a^2(18+8\sqrt{6})^2 = a^2+12$$

$$167a^4 + 1672a^2 - 16 = 0 \quad (1672 - 16) = 1672^2 - 2 \cdot 1672 + 1$$

$$a^2 = \frac{12}{167} \quad a_1, a_2, a_3, a_4 = 8$$

$$a^5 + 8a + \frac{7}{2} = 0 \quad a^4 + \frac{7}{2}a + 8 = 0$$

$$b^5 + 8b - \frac{7}{2} = 0 \quad b^4 - \frac{7}{2}b + 8 = 0$$

$$\frac{8}{a_1} + \frac{8}{a_2} + \frac{8}{a_3} + \frac{8}{a_4} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{8}{b_1} + \frac{8}{b_2} + \frac{8}{b_3} + \frac{8}{b_4} = \frac{7}{2}$$



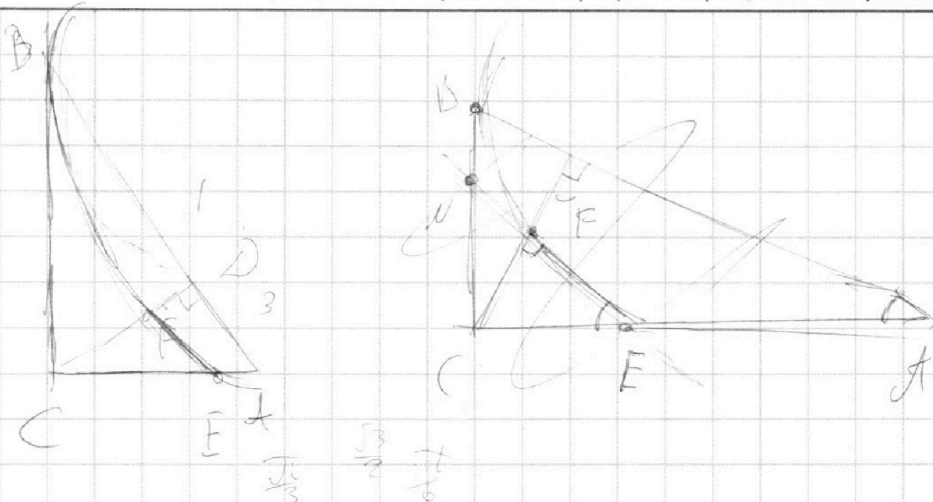
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\sqrt{1-x^2} = 6x$$

$$x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{3}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5}{6}\pi = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}\pi$$



$$\log_3^4 x + 6 \log_x^3 = \log_x^2 243 - 8$$

$$\log_3^4(3y) + 2 \log_{3y}^3 = \log_{3y}^2(3^{14}) - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x^3 = \frac{5}{2} \log_x^3 - 8$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x^3 + 8 = 0$$

$$\log_3^2 x \cdot \log_x^2 3 + \frac{7}{2} \log_x^3 + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x > 0 & x \neq 1 \\ 3y > 0 & y \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} + 8 = 0$$

$$\log_3^5 x + 8 \log_3 x + \frac{7}{2} = 0$$

$$15 + 8t + \frac{7}{2} = 0$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$\log_a b \cdot \log_a a = \log_a a \log_a b = \log_a b$~~

$\log_a b = \log_a a^{\log_a b} = \log_a b$

~~$\log_a b$~~   $\log_2 8 = 3$

~~$\log_a a = \log_a a = 1$~~   $\log_2 2 = 1$

$ax + by - 3b = 0$

$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$

$x^2 + y^2 = 9$

~~$x^2 + y^2$~~   $x^2 - 12x + y^2 = -32$

$(x - 6)^2 + y^2 = 4$

$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$1 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

~~$A^2 + B^2 = C^2$~~

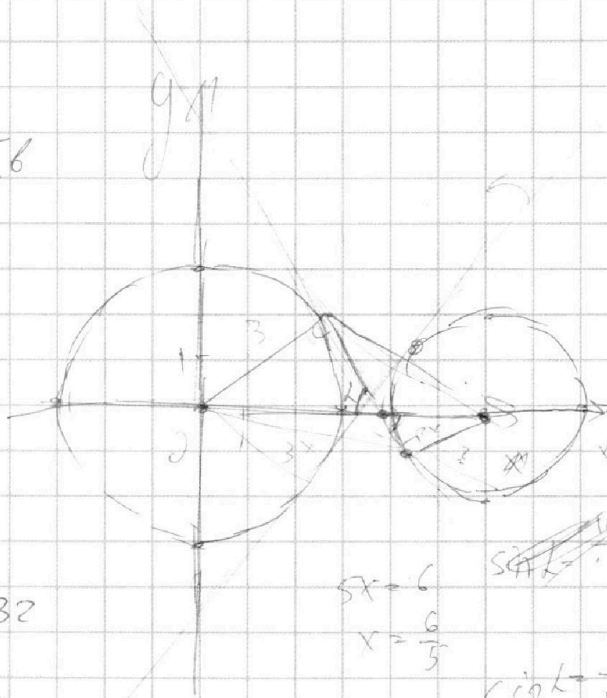
~~$y = -\frac{Ax + C}{B}$~~

~~$-x + \sqrt{B^2}$~~

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$\tan \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}}$

$OE \left( -\frac{5}{\sqrt{11}} ; \frac{5}{\sqrt{11}} \right)$



$5x = 6$   
 $x = \frac{6}{5}$   
 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$   
 $= \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

