



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

21

Дано: $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

Найти: abc - наим.

$$\begin{cases} ab = h \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc = m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{cases}$$

зде $h, m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} b = \frac{k}{a} \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \quad (1) \\ c = \frac{m}{b} \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \quad (2) \\ a = \frac{n}{c} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \quad (3) \end{cases}$$

$$(2) = (3) \quad \frac{m}{b} \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} = \frac{n}{a} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$b = \frac{m}{n} \cdot a \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-22}$$

$$(1), \quad \frac{m}{n} \cdot a \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-22} = \frac{k}{a} \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$\frac{m}{n} \cdot a^2 = \frac{k}{n} \cdot 2^{20} \cdot 3^{15} \cdot 5^{34}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = \sqrt{\frac{kn}{m} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{34}} = \\ = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{17} \sqrt{\frac{kn}{m} \cdot 3}$$

Запомни, 270

$$abc = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{17} \underbrace{\sqrt{\frac{kn}{m} \cdot 3}}_a \cdot m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} = \\ = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \underbrace{\sqrt{knm \cdot 3}}_b = \\ = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{knm \cdot 3}$$

т.к. $abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{knm \cdot 3} \in \mathbb{N}$
(но yet $a, b, c \in \mathbb{N}$)

т.к. \sqrt{abc} -натур $\Rightarrow \sqrt{knm \cdot 3}$ -натур

$\Rightarrow \sqrt{knm \cdot 3} = 3$, при $k=3$ или $n=3$ или $m=3$

$$\text{Тогда } abc = 2^{17} \cdot 3^{27+1} \cdot 5^{34}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$12m = 16\pi - 4\pi k \quad | : 4$$

$$3m = 4\pi - \pi k$$

$$m = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi k}{3}, \pi \leq m < 2\pi$$

$$\pi \leq \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi k}{3} < 2\pi \quad | : \pi$$

$$1 \leq \frac{4}{3} - \frac{k}{3} < 2 \quad | \cdot 3$$

$$3 \leq 4 - k < 6 \quad | -4$$

$$-1 \leq -k < 2$$

$$-2 < k \leq +1, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1 \quad m = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \quad x = -2\pi + \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

$$k = 0 \quad m = \frac{4\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$k = 1 \quad m = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi \quad x = 2\pi + \pi = 3\pi$$

Ответ: $-2\pi; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$8m = 4\pi + 4\pi k \quad | :8$$

$$m = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad 0 \leq m < \pi$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} < \pi \quad | - \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq 1 + \frac{k}{2} < 2 \quad | -1$$

$$-1 \leq k < 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1 \quad m = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = -2\pi + 0 = \boxed{-2\pi}$$

$$k = 0 \quad m = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0 + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

II 3 и 4 случая, $\pi \leq m < 2\pi$

$$10(m - \frac{3\pi}{2}) = \pi - 4\pi k - 2m \quad | \uparrow$$

$$10m - 15\pi = \pi - 4\pi k - 2m$$

$$12m = +16\pi - 4\pi k$$

$$m = 2\pi - \frac{\pi k}{2}$$

$$\pi \leq 2\pi - \frac{\pi k}{2} < 2\pi \quad | : \pi$$

$$1 \leq 2 - \frac{k}{2} < 2 \quad | -2$$

$$-1 \leq -\frac{k}{2} < 0$$

$$0 < \frac{k}{2} \leq 1 \quad | \cdot 2$$

$$0 < k \leq 2, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 1 \quad m = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 1 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} = \boxed{\frac{7\pi}{2}}$$

$$k = 2 \quad m = 2\pi - \frac{\pi \cdot 2}{2} = \pi \Rightarrow x = 2 \cdot 2\pi + \pi = 5\pi$$

Ответ: $-2\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; 5\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$10 \operatorname{arcsin}(\cos x) = \pi - 2k$$

Решение $m = x \% 2\pi \Rightarrow x = h \cdot 2\pi + m, h \in \mathbb{Z}$
(m - остаток x от деления на 2π)

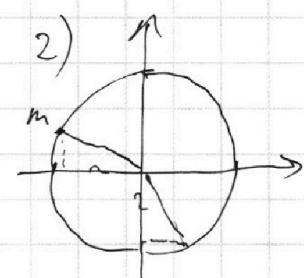
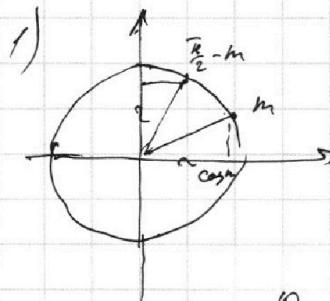
Нужно, чтобы $\cos x = \cos m$

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = \operatorname{arcsin}(\cos m)$$

Решение в 4 шага

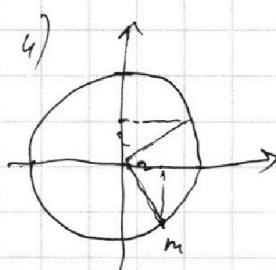
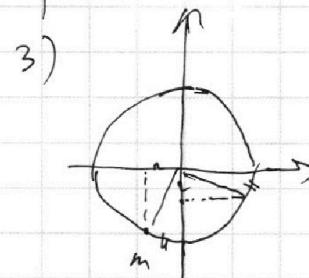
1) $m \in I_1$

$$\operatorname{arcsin}(\cos m) = \frac{\pi}{2} - m$$



2) $m \in I_2$

$$\operatorname{arcsin}(\cos m) = \frac{\pi}{2} - m$$



3) $m \in I_3$

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsin}(\cos m) &= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{2} - m\right) = \\ &= m - \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

4) $m \in I_4$

$$\operatorname{arcsin}(\cos m) = m - \frac{3\pi}{2}$$

$$10 \operatorname{arcsin}(\cos x) = \pi - 2k$$

$$10 \operatorname{arcsin}(\cos m) = \pi - 2(h \cdot 2\pi + m)$$

Также

I 1 и 2 (уголы) $0 \leq m < \pi$

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - m \right) = \pi - 4\pi h - 2m$$

$$5\pi - 10m = \pi - 4\pi h - 2m$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 3y = ax + 4b$$

$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ - наклонная прямая $\frac{a}{3} = \operatorname{tg} \alpha$ $\frac{4}{3}b = \text{бесц}$
 $\alpha = 30^\circ$ - угол наклона

$$(2) : \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad | \quad x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0$$

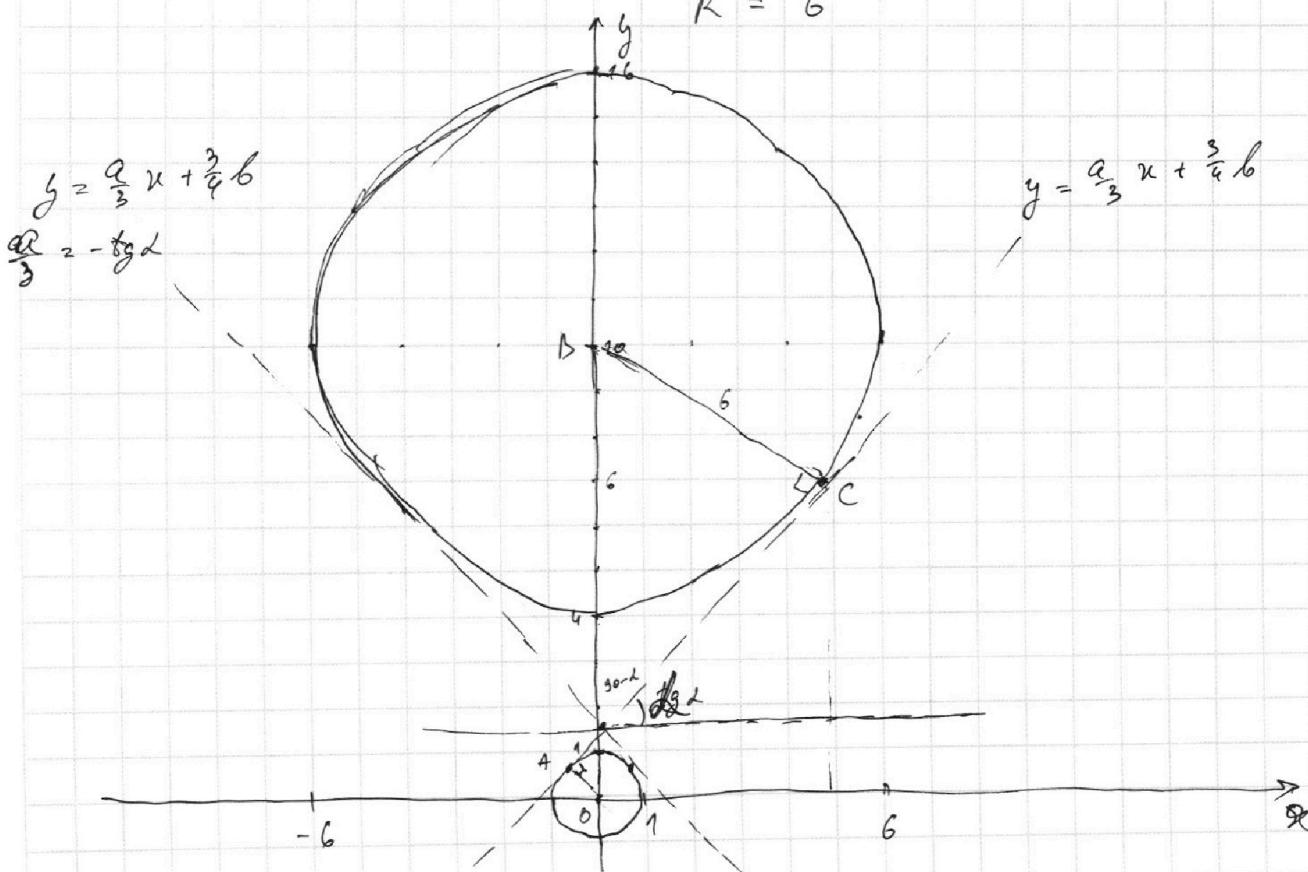
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{окр-1} \quad | \quad y^2 - 20y + 100 + x^2 - 100 + 64 = 0$$

(окр-1) - центр

$$R = 1$$

$$| \quad x^2 + (y - 10)^2 = 36 \quad \text{окр-2} \\ | \quad (0; 10) \quad \text{центр}$$

$$R = 6$$



Проведли вектор \vec{OC} , нашлем $\angle -$ угол наклона



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

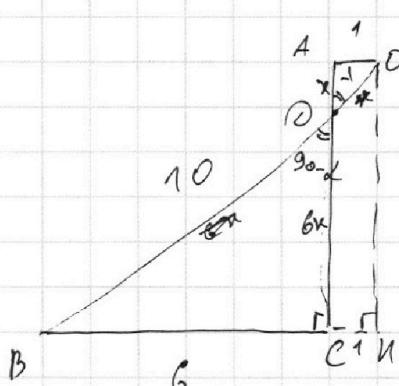
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Т.к. система имеет 4 решения \Rightarrow

Каждое значение a , для которого нет таких
считается
уравнений не может иметь 4 решения.



$$OB = 20$$

$$OK = AC = \sqrt{OB^2 - BK^2} \quad (1)$$

$$BK = BC + CK = 6 + 1 = 7$$

$$(2) \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$$

Задача 2, $\triangle BCD \sim \triangle OAD$ \Rightarrow

($\angle BDC = \angle ADO$ - верт, но 2-я фигура
 $\angle BCD = \angle OAD = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \frac{BC}{AO} = \frac{AD}{BD} = \frac{x}{6} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{6}{7} \Rightarrow \text{из 16} \quad AD = 6x \quad BD = x$$

~~$$OB = BD + OD = 6x + x = 7x = \sqrt{51} \cdot 10$$~~

$$AD = AC = AD + CD = 4x = \sqrt{51}$$

$$x = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$DC = 6x = \frac{6\sqrt{51}}{7}$$

Тогда, $\operatorname{tg} \angle BDC = \operatorname{tg}(90 - \alpha) = \frac{BC}{DC} = \frac{6 \cdot 4}{6\sqrt{51}} = \frac{4}{\sqrt{51}}$

$$\operatorname{ctg}(90 - \alpha) = \frac{\sqrt{51}}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{51}}{4}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{3} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

Тогда система имеет 4 решения
может

$$\frac{a}{3} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \quad \text{и} \quad \frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$$

$$a < -\frac{3\sqrt{51}}{7}$$

$$\text{Ответ: } a > \frac{3\sqrt{51}}{7}; a < -\frac{3\sqrt{51}}{7}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3 \quad (1)$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} ODZ: & \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases} & \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(1): Замена: $\log_5(2x) = a$, c из ODZ $a \neq 0$

$$\log_5^4 2x = a^4$$

$$\log_{2x} 5 = \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{1}{a}$$

$$\log_{8x^3} 625 = \log_{(2x)^3} 5^4 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \frac{1}{a} = \frac{4}{3a}$$

$$a^4 - 3 \cdot \frac{1}{a} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{a} - 3 \quad | \cdot a \neq 0$$

$$a^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3a$$

$$a^5 + 3a = 4 \frac{1}{3}$$

(2): Замена: $\log_5 y = b$, c из ODZ $b \neq 0$

$$\log_5^4 y = b^4$$

$$\log_5 5 = \frac{1}{\log_5 y} = \frac{1}{b}$$

$$\log_{y^3} 0,2 = \frac{1}{3} \log_y \frac{1}{5} = -\frac{1}{3} \log_5 5 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b^4 + 4 \cdot \frac{1}{b} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b} - 3 \quad | \cdot b \neq 0$$

$$b^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3b$$

$$b^5 + 3b = -4 \frac{1}{3}$$

$$+ \begin{cases} a^5 + 3a = 4 \frac{1}{3} \\ b^5 + 3b = -4 \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\overline{a^5 + b^5 + 3(a+b) = 0}$$

$$\text{Запишем, что } (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) =$$

$$= a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 + a^3b - a^2b + ab^3$$

$$- a^2b^4 + b^5 = a^5 + b^5$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 3(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3) = 0$$

$$a+b = 0 \quad | \quad \frac{a^5 + b^5}{a+b} + 3 = 0 \quad a+b \neq 0$$

$$\log_5 2x + \log_5 y = 0 \quad | \quad \text{бужение}$$

$$\log_5(2xy) = 0 \quad | \quad (a^5 + b^5) \text{ и } (a+b)$$

сокращают на знако \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{a^5 + b^5}{a+b} > 0 \Rightarrow$$

$$\text{Тогда } \frac{a^5 + b^5}{a+b} + 3 \geq 0$$

реш нет

Ответ: $\frac{1}{2}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4 + 3 = 0$$

$$a^4 + 2a^2 b^2 + b^4 - a^2 b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 - ab((a+b)^2 - 2ab) + 3 = 0$$

$$\underline{((a+b)^2 - 2ab)^2 - (ab)^2 - ab((a+b)^2 - 2ab) + 3 = 0}$$

$$(a+b)^2 = s \quad ab = p$$

$$(s - 2p)^2 - p^2 - p(s - 2p) + 3 = 0$$

$$s^2 - 4ps + 4p^2 - p^2 - ps + 2p^2 + 3 = 0$$

$$s^2 - 5ps + 5p^2 + 3 = 0$$

$$s^2 - 4ps + 4p^2 - ps + p^2 + 3 = 0$$

$$(s - 2p)^2 + p^2 - 2ps + 1 + 2 + ps = 0$$

$$(p - 1)$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a+b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^4 + a^2 b^2 + b^4 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$\cancel{a^4 + -2a^2b^2 + b^4 + 3a^2b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0}$$

$$(a^2 - b^2)^2 + \cancel{3a^2b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0}$$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 + 2ab(a^2 + b^2) + a^2b^2 - 2a^2b^2$$

$$- 3ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2 + ab)^2 - 2a^2b^2 + 3(-ab(a^2 + b^2) + 1) = 0$$

$$\underbrace{(a^2 + b^2 - 2ab + ab)^2}_{c} - 2(ab)^2 + 3(-ab(a^2 + b^2 - 2ab) + 1) = 0$$

$$(c^2 - p)^2 -$$

$$a^4 + b^4 + ab(-a^2 + ab - b^2) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab(a^2 - ab + b^2) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab((a+b)^2 + ab) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab(a+b)^2 - a^2b^2 + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - a^2b^2 + b^2 - (a^2 + b^2)(g + 1)g - (a^2 + b^2)(g + 1)g = 0$$

$$a^4 + b^4 - (a^2 + b^2)(g + 1)g - (a^2 + b^2)(g + 1)g = 0$$

$$0 = g + 1g - (g + 1)g - (a^2 + b^2)^2$$

$$0 = g + 1g - (g + 1)g - a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$

$$0 = g + 3g - g + 2g - a^4 - 3b^4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.



Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$h \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = \frac{m}{n} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-7} \cdot 5^{-22} \cdot a^2 - \frac{39}{22}$$
$$a^2 = \frac{m}{n} \cdot 2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{48} 34$$
$$a = 3 \cdot 2^5 \cdot 5^{17} \sqrt{\frac{6n}{m} + 3}$$

~~$$b = \frac{h \cdot 2^{16} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12} \cdot m}{8n \cdot 2^{80} \cdot 3^{25} \cdot 5^{34}} = \frac{m}{n} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-7} \cdot 5^{-22}$$~~

~~$$c = \frac{h \cdot 2^{16} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12}}{8n \cdot 2^{80} \cdot 3^{25} \cdot 5^{34}}$$~~

$$abc = a \cdot \frac{m}{n} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-7} \cdot 5^{-22} \cdot b \cdot \frac{m}{n} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{35}$$
$$= a \cdot m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{13} =$$

$$= am \cdot 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{-17} \cdot 3^7 \cdot 2^7 \cdot 5^{17} \sqrt{\frac{6n}{m} + 3}$$

$$m \sqrt{\frac{6n}{m} + 3} \rightarrow mn$$

$$\sqrt{6nm \cdot 3} \rightarrow mn$$

$$\text{RECTG } \cos x = a$$

$$\sin x = \pm \sqrt{1-a^2} \Rightarrow$$

$$\text{ARC sin}(\cos x)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + a^2 = 1$$

$$a = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

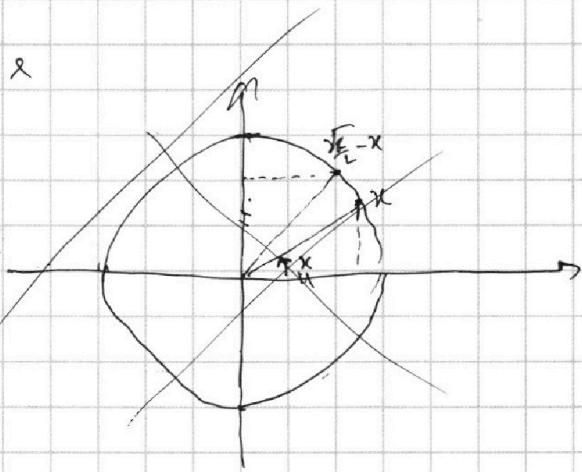
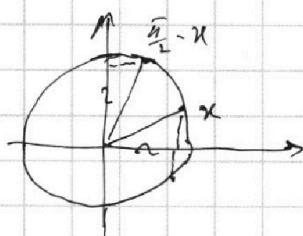
~ 3
 $10 \operatorname{arcsin}(\cos x) = \pi - 2x$

~~1) $x \in I_{\text{нр}}$~~

~~Расмотрим 4 слуг за x~~

~~1) $x \in I_{\text{нр}}$~~

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - x$$

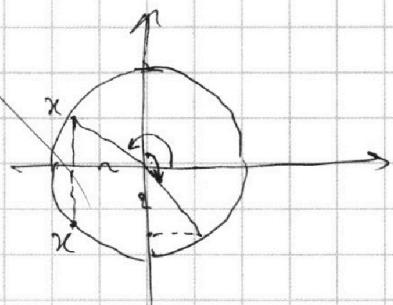


~~2) $x \in IV_{\text{нр}}$~~

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

~~3) $x \in II_{\text{нр}}$~~

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$



~~4) $x \in III_{\text{нр}}$~~

$$\operatorname{arcsin}(\cos x) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

~~No T.u.~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^4 + a^2 b^2 + b^4 - a^3 b - a b^3 + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 + a^2 b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ab) + 3 + a^2 b^2 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 3ab) + 3 + a^2 b^2 = 0$$

~~$$(a^2 + b^2)^2 - 3ab = h(3 + a^2 b^2)$$~~

$$(a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + b^2) + a^2 b^2 + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2 + ab)^2 - 3ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2 - ab)^2 + 3(-ab(a^2 + b^2)) = 0$$

$$(a^2 + b^2 - a^2 b^2)^2 + ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a+b} + 3 = 0 \quad / \cdot a+b \neq 0$$

$$a^3 + b^3 + 3(a+b) = 0$$

$$a^2 + b^2 = h$$

$$a^2 b = h$$

$$h^2 - mh + h^2 + 3 = 0$$

$$\frac{h^3 + h^3}{m+h} + 3 = 0$$

$$(a+b) \left(\frac{(a^2 + b^2)^3 + a^3 b^3}{a^2 + b^2 + ab} + 3 \right) = 0$$

$$a^3 + b^3 + (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ = a^3 - a^2 b + ab^2 + b^3 \\ = ab^2 + b^3$$

$$(a^2 + b^2)^3 + a^3 b^3 + 3(a^2 + b^2 + ab) = 0$$

$$\cos(\beta\pi) = \cos\pi = -1$$

$$3\pi - \pi = 2\pi$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$(h^3 + h^3)(h^2 - mh + h^2)$$

$$\arcsin\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{9}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{9-h^2}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9-h^2}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{9-h^2}}$$

$$\frac{10 \cdot \frac{\pi}{2}}{9} = \frac{5\pi}{9}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{5h}{3} = \frac{2 - 5h}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Задача: } \log_5 5 = \log_5 g = b \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{2} = 3h$$

Условие: $g \neq 1 \Rightarrow b \neq 0 \quad m = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{2}$

$$b^4 + 4 = -\frac{1}{3b} - 3 \quad b > 0 \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi h}{2} < \pi/2$$

$$b^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3b \quad 0 < 1 + h < 2$$

$$(1) \begin{cases} b^5 + 3b + 4 \frac{1}{3} = 0 \\ a^5 + 3a - 4 \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

$$a^5 + b^5 + 3a + 3b = 0$$

$$K = \frac{a^5}{2} \quad J = \frac{a^5 - b^5}{2}$$

$$J = \frac{b^5}{2} \quad (a+b)(a^4 - ab^3 - a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 +$$

$$(1): \quad b^2 a^5 + 3a + 4 \frac{1}{3} = 0 / :3$$

$$b^2 a^5 = \left(\frac{3a^5}{13}, \frac{1+3a}{13}, \frac{a^5}{3}, \frac{1}{13} \right)$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)^5 - 5ab^4$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - ab^3 + a^2b^2 - b^3) = (a+b)((a+b)^2 - 2ab - ab)$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^2b + ab^2 - b^3) =$$

$$= a^5 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4 = a^5 - b^4 = a^5 - b^4$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^2b + ab^2 - b^3 + b^4)$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^2b + ab^2 - b^3 + b^4)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

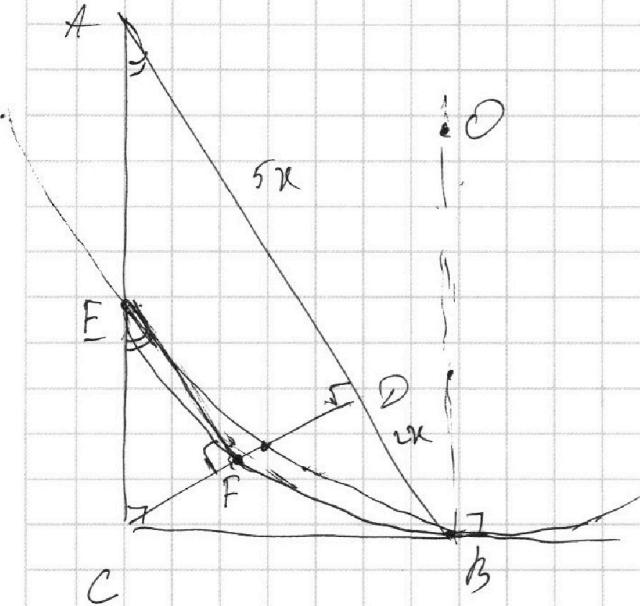
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD : DB = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Пусть } m = \frac{x}{\sin x}$$

$$\arcsin(\cos x) =$$

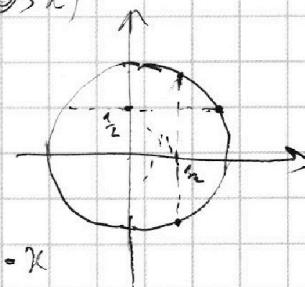
$$\frac{s_{AB}}{s_{BDF}}$$

$$= \arcsin(\cos m)$$

$$\arcsin(\cos x)$$

при $x \in I, IV$ и
 $x \in I$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \quad x \in IV \quad \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} + x$$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$(1) \text{ при } \cos x$$

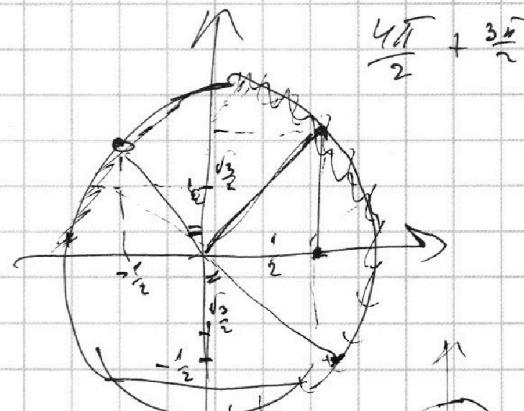
$$x \in I, III \quad x \in I$$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x \in II$$

$$\arcsin(\cos x) = x + \pi$$



$$x \in II$$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$\arcsin(\cos x) = -x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x$$

$$x \in III$$

$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{5\pi}{2} \quad \cos \frac{5\pi}{2} = 0$$

$$\arcsin(0) = 0$$

$$20 \cdot 0 = 0$$

$$\pi -$$

$$\cos(5x) = \cos^2 x = -1$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$-5\pi = \pi - 2 \cdot 5\pi$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \quad ab : 2^8 \cdot 3^{19} \cdot 5^{12}$$

$$bc : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$

abc наим - ?

$$\text{ДСТБ } | ab = 2^8 \cdot 3^{19} \cdot 5^{12} \quad (1)$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \quad (2)$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33} \quad (3)$$

$$(1) + (2) : b((a+c)$$

$$c((a+b)) \quad (1) \quad b = \frac{2^8 \cdot 3^{19} \cdot 5^{12}}{a}$$

$$a(b+c) \quad (2) : b = \cancel{2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}}$$

$$c = \frac{2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}}{b} = \frac{2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot a}{2^{18} \cdot 3^{19} \cdot 5^{12} \cdot a} =$$

$$(3) : c = \frac{2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}}{a} = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5 \cdot a^2$$

$$2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33} = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5 \cdot a^2$$

$$a^2 = 2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^4$$

$$(1) : b = \frac{2^8 \cdot 3^{19} \cdot 5^{12}}{a} \quad \text{L}$$

39
—
42

$$(2) : c = \frac{h \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}}{a}$$

$$(2) : b = \frac{m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}}{c} = \frac{m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot a}{h \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= a^5 - a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 + a b^4 + b^5 - a^3 b^2 + a^2 b^3$$

$$- a b^4 + b^5 = a^5 + b^5$$

$$(a+b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4) + 3(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4 + 3) = 0$$

$$a+b=0 \quad a^3(a-b) + a^2 b^2 + b^3(b-a) + 3 = 0$$

$$a^2 b^2 + 3 =$$

$$a^4 + b^4 + ab(-a^2 + ab - b^2) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 + -ab(a^2 - ab + b^2) + 3 = 0 \quad (1)$$

$$a^4 + b^4 - ab((a-b)^2 + ab) + 3 = 0$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^4 + b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3) =$$

$$= a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 - a^3 b - a^2 b^2 - a b^3 - b^4$$

$$a^4 + 2a^2 b^2 + b^4 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2) - a^2 b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(1-ab) - a^2 b^2 + 3 = 0$$

$$a^2 + b^2$$

$$\underline{a^4 + a^2 b^2 + b^4 + ab(a^2 + b^2) + 3 = 0}$$

$$a^4 + b^4 = (a-b)(a^3 + a^2 b + b^3) =$$

$$= a^4 - b^4$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2} =$$

$$3 = 4 - 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

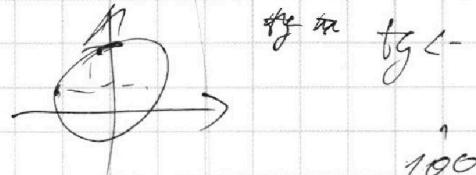


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$



$$\tan \alpha$$

$$1$$

$$-\frac{100}{3^6}$$

$$-\frac{64}{3^6}$$

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{3x^3} 625 - 3 \quad (1)$$

$$\log_5^4 g + 4\log_5 5 = \log_{g^3} 0,2 - 3 \quad (2)$$

$$\text{ODZ: } \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ g > 0 \\ g \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ g > 0 \\ g \neq 1 \end{cases}$$

$$x^2 + g^2 - 2 \cdot 20 \cdot g + 20^2 - 20^2 + 64 = 0$$

$$x^2 + g^2 - 40g + 64 = 0$$

$$x^2 + (g-20)^2 = 36$$

$$(0) \text{ eq} \Rightarrow x = 2$$

$$(1): \log_5 \log_{2x} 5 = \frac{1}{\log_5 2x}$$

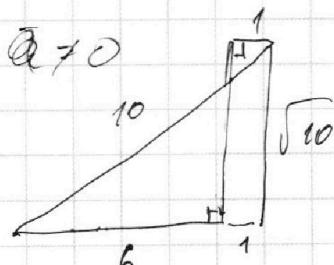
$$625 = 25^2 = 5^4$$

$$\log_{3x^3} 625 = \frac{1}{3} \log_{2x} 625 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_5 5 = \frac{4}{3}$$

Замена: $\log_5 2x = a$ из ODZ т.ч. $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow a \neq 0$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \quad | \cdot a \neq 0$$

$$a^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3a$$



$$(2): \log_5 5 = \frac{1}{\log_5 2}$$

$$\log_5 0,2 = \frac{1}{3} \log_5 \frac{1}{5} = -\frac{1}{3} \log_5 5 = -\frac{1}{3}$$