



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



~ 1

Дано:  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

Найти:  $abc$  - наим.

$$1) \text{ Пусть } \begin{cases} ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\ bc = m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\ ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \end{cases}$$

где  $k, m, n \in \mathbb{N}$

$$\text{Тогда } \begin{cases} b = \frac{k}{a} \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} & (1) \\ c = \frac{m}{b} \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} & (2) \\ c = \frac{n}{a} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} & (3) \end{cases}$$

$$(2) = (3) \quad \frac{m}{b} \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} = \frac{n}{a} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$b = \frac{m}{n} \cdot a \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-22}$$

$$(1): \quad \frac{m}{n} \cdot a \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-22} = \frac{k}{a} \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$\frac{m}{n} a^2 = \frac{kn}{m} \cdot 2^{20} \cdot 3^{15} \cdot 5^{34}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = \sqrt{\frac{kn}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{34}} =$$
$$= 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{17} \sqrt{\frac{kn}{m} \cdot 3}$$

Заметим, что

$$abc = \underbrace{2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{17} \sqrt{\frac{kn}{m} \cdot 3}}_a \cdot \underbrace{m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}}_b =$$

$$= 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{m^2 \cdot \frac{kn}{m} \cdot 3} =$$
$$= 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{knm \cdot 3}$$

Т.к.  $abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{knm \cdot 3} \in \mathbb{N}$   
(нога  $a, b, c \in \mathbb{N}$ )

и т.к.  $\nexists abc$  - наим  $\Rightarrow \sqrt{knm \cdot 3}$  - наим  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{knm \cdot 3} = 3$ , при  $k=3$  или  $n=3$  или  $m=3$

Тогда  $abc = 2^{17} \cdot 3^{27+1} \cdot 5^{34}$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$12m = 16\pi - 4\pi k \quad /:4$$

$$3m = 4\pi - \pi k$$

$$m = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi k}{3}, \quad \pi \leq m < 2\pi$$

$$\pi \leq \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi k}{3} < 2\pi \quad /: \pi$$

$$1 \leq \frac{4}{3} - \frac{k}{3} < 2 \quad / \cdot 3$$

$$3 \leq 4 - k < 6 \quad / -4$$

$$-1 \leq -k < 2$$

$$-2 < k \leq +1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1 \quad m = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \quad \chi = -2\pi + \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

$$k = 0 \quad m = \frac{4\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \chi = 0 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$k = 1 \quad m = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi \quad \chi = 2\pi + \pi = 3\pi$$

Ответ:  $(-2\pi; \frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}) \cup (3\pi; \dots)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$8m = 4\pi + 4\pi k \quad /:8$$

$$m = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad 0 \leq m < \pi$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} < \pi \quad /: \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq 1 + k < 2 \quad /-1$$

$$-1 \leq k < 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1 \quad m = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = -2\pi + 0 = \boxed{-2\pi}$$

$$k = 0 \quad m = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0 + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

II 3 и 4 случаи,  $\pi \leq m < 2\pi$

$$10\left(m - \frac{3\pi}{2}\right) = \pi - 4\pi k - 2m$$

$$10m - 15\pi = \pi - 4\pi k - 2m$$

$$12m = 16\pi - 4\pi k$$

$$m = 2\pi - \frac{\pi k}{2}$$

$$\pi \leq 2\pi - \frac{\pi k}{2} < 2\pi \quad /:\pi$$

$$1 \leq 2 - \frac{k}{2} < 2 \quad /-2$$

$$-1 \leq -\frac{k}{2} < 0$$

$$0 < \frac{k}{2} \leq 1 \quad / \cdot 2$$

$$0 < k \leq 2, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 1 \quad m = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 1 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$$k = 2 \quad m = 2\pi - \frac{\pi \cdot 2}{2} = \pi \Rightarrow x = 2 \cdot 2\pi + \pi = 5\pi$$

Ответ:  $-2\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; 5\pi.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 3

$$\text{НО } \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

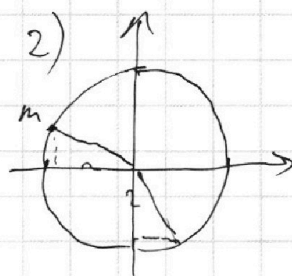
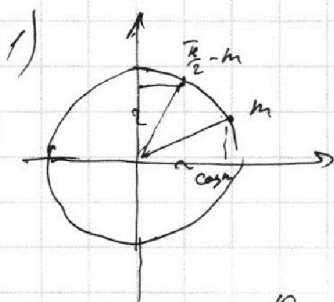
Пусть  $m = x \cdot 2\pi$   $\Rightarrow x = k \cdot 2\pi + m, k \in \mathbb{Z}$   
 ( $m$  - остаток  $x$  от деления на  $2\pi$ )

Получа ~~а~~  $\cos x = \cos m$   
 $\arcsin(\cos x) = \arcsin(\cos m)$

Реш 4 случая

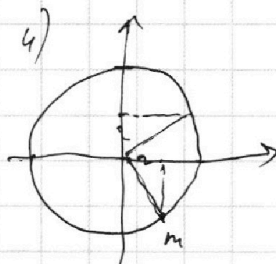
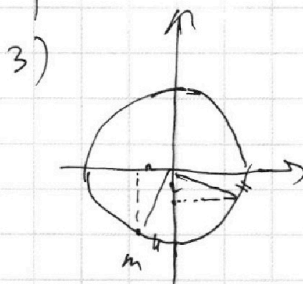
1)  $m \in \text{I}$

$$\arcsin(\cos m) = \frac{\pi}{2} - m$$



2)  $m \in \text{II}$

$$\arcsin(\cos m) = \frac{\pi}{2} - m$$



3)  $m \in \text{III}$

$$\arcsin(\cos m) = \frac{\pi}{2} - (m - \pi) = m - \frac{3\pi}{2}$$

4)  $m \in \text{IV}$

$$\arcsin(\cos m) = m - \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{НО } \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\text{НО } \arcsin(\cos m) = \pi - 2(k \cdot 2\pi + m)$$

НО

I 1 и 2 (углы  $0 \leq m < \pi$ )

$$\text{НО } \left(\frac{\pi}{2} - m\right) = \pi - 4\pi k - 2m$$

$$5\pi - 10m = \pi - 4\pi k - 2m$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 3y = ax + 4b$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \quad \text{— наклонная прямая}$$

*проходят через  $\frac{4}{3}b(0; \frac{4}{3}b)$   
 $\frac{a}{3}$  — угол наклона*

$$(2): \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad | \quad x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{— шарик} \quad | \quad y^2 - 20y + 100 + x^2 - 100 + 64 = 0$$

*окр-тб*

$(0; 0)$  — центр

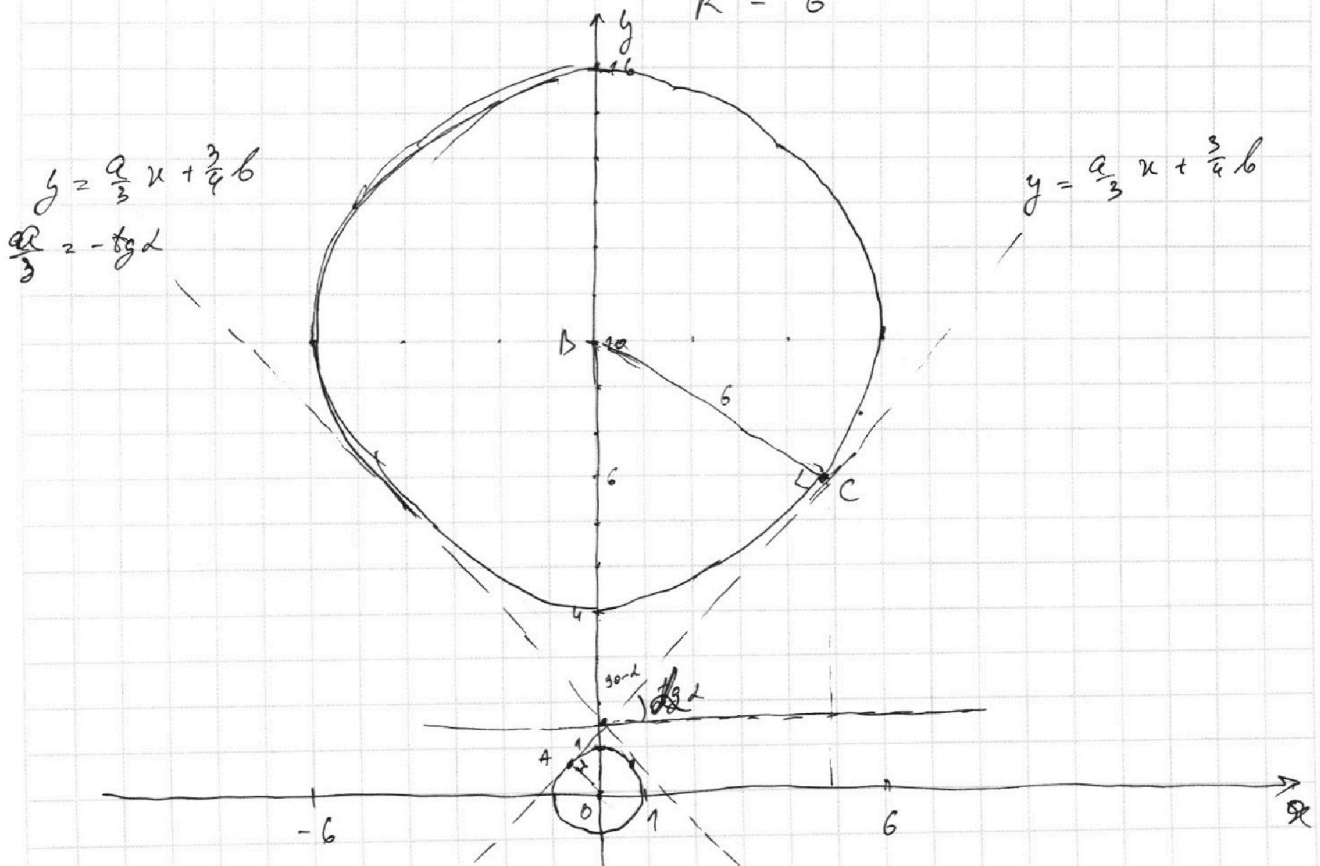
$$R = 1$$

$$x^2 + (y - 10)^2 = 36 \quad \text{— шарик}$$

*окр-тб*

$(0; 10)$  — центр

$$R = 6$$



Проведем внутр касат, найдем  $\alpha$  — угол наклона



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

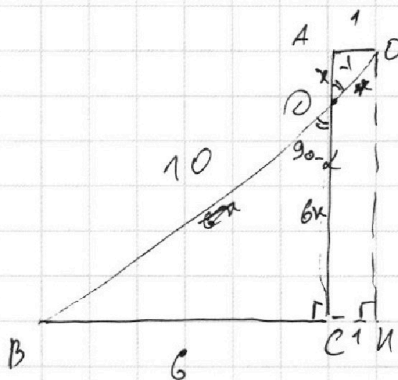


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Т.к. система имеет 4 решения  $\Rightarrow$~~

Каждое значение  $a$ , для которых нет таких  
систем  
уравнений не может иметь 4 решения.



$$OB = 20$$

$$OB = AC = \sqrt{OB^2 - BC^2} \quad (1)$$

$$BC = BC + \underbrace{CD}_{AO} = 6 + 1 = 7$$

$$(2) \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$$

Заметим, что  $\triangle BCD \sim \triangle OAD$   $\Rightarrow$   
 ( $\angle BDC = \angle ADO$  - верт, по 2-ум углам  
 $\angle BCD = \angle OAD = 90^\circ$ )

$$\Rightarrow \frac{BC}{AO} = \frac{AD}{OD} = k$$

$$\frac{AD}{OD} = \frac{6}{1} \Rightarrow \text{пусть } AD = 6x \quad OD = x$$

$$OB = BD + OD = 6x + x = 7x = \sqrt{51} \quad 10$$

$$AC = AD + CD = 7x = \sqrt{51}$$

$$x = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$OC = 6x = \frac{6\sqrt{51}}{7}$$

Тогда,  $\text{tg} \angle BDC = \text{tg}(90 - \alpha) = \frac{BC}{OC} = \frac{6 \cdot 7}{6\sqrt{51}} = \frac{7}{\sqrt{51}}$

$$\text{ctg}(90 - \alpha) = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{3} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

Тогда система <sup>может</sup> иметь 4 решения

$$\frac{a}{3} > \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$$

и

$$\frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$a > 3 \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$a < -3 \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\text{Ответ: } a > \frac{3\sqrt{51}}{7}; a < -\frac{3\sqrt{51}}{7}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x^3} 625 - 3 & (1) \\ \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3 & (2) \end{cases} \quad xy = ?$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

(1): Замена:  $\log_5(2x) = a$ , с зр ОДЗ  $a \neq 0$

$$\log_5^4 2x = a^4$$

$$\log_{2x} 5 = \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{1}{a}$$

$$\log_{2x^3} 625 = \log_{(2x)^3} 5^4 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{a} = \frac{4}{3a}$$

$$a^4 - 3 \cdot \frac{1}{a} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{a} - 3 \quad | \cdot a \neq 0$$

$$a^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3a$$

$$a^5 + 3a = 4 \frac{1}{3}$$

(2): Замена:  $\log_5 y = b$ , с зр ОДЗ  $b \neq 0$

$$\log_5^4 y = b^4$$

$$\log_y 5 = \frac{1}{\log_5 y} = \frac{1}{b}$$

$$\log_{y^3} 0,2 = \frac{1}{3} \log_y \frac{1}{5} = -\frac{1}{3} \log_y 5 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b^4 + 4 \cdot \frac{1}{b} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b} - 3 \quad / \cdot b \neq 0$$
$$b^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3b$$
$$b^5 + 3b = -4\frac{1}{3}$$
$$+ \begin{cases} a^5 + 3a = 4\frac{1}{3} \\ b^5 + 3b = -4\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$a^5 + b^5 + 3(a+b) = 0$$

Заметим, что  $(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) =$   
 $= a^5 - \cancel{a^4b} + \cancel{a^3b^2} - \cancel{a^2b^3} + ab^4 + \cancel{a^4b} - \cancel{a^3b^2} + \cancel{a^2b^3} - \cancel{ab^4} + b^5 = a^5 + b^5$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 3(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3) = 0$$

$$a+b = 0 \quad | \quad \frac{a^5 + b^5}{a+b} + 3 = 0 \quad a+b \neq 0$$

$$\log_5 2x + \log_5 y = 0$$

$$\log_5 (2xy) = 0$$

$$2xy = 1$$

$$|xy = \frac{1}{2}|$$

Заметим, что  $\frac{a^5 + b^5}{a+b}$  выражение

совпадает по знаку  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a^5 + b^5}{a+b} > 0 \Rightarrow$$

Тогда  $\frac{a^5 + b^5}{a+b} + 3 \geq 0$   
реш нет

Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3 = 0$$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 - ab(a + b)^2 - 2ab + 3 = 0$$

$$((a + b)^2 - 2ab)^2 - (ab)^2 - ab((a + b)^2 - 2ab) + 3 = 0$$

$$(a + b)^2 = s \quad ab = p$$

$$(s - 2p)^2 - p^2 - p(s - 2p) + 3 = 0$$

$$s^2 - 4ps + 4p^2 - p^2 - ps + 2p^2 + 3 = 0$$

$$s^2 - 5ps + 5p^2 + 3 = 0$$

$$s^2 - 5ps + 5p^2 + 3 = 0$$

$$s^2 - 4ps + 4p^2 - ps + p^2 + 3 = 0$$

$$(s - 2p)^2 + p^2 - 2ps + 1 + 2 + ps = 0$$

$$(p - 1)$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^4 + a^2 b^2 + b^4 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

~~$$a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 + 3a^2 b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$~~

~~$$(a^2 - b^2)^2 + 3a^2 b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$~~

$$a^4 + 2a^2 b^2 + b^4 - a^2 b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 + 2ab(a^2 + b^2) + a^2 b^2 - 2a^2 b^2 - 3ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2 + ab)^2 - 2a^2 b^2 + 3(-ab(a^2 + b^2) + 1) = 0$$

$$\underbrace{(a^2 + b^2)}_c - \underbrace{2ab}_p + ab)^2 - 2(ab)^2 + 3(-ab(a^2 + b^2 - 2ab) + 1) = 0$$

$$(c^2 - p)^2 -$$

$$a^4 + b^4 + ab(-a^2 + ab - b^2) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab(a^2 - ab + b^2) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab((a+b)^2 - ab) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab(a+b)^2 - a^2 b^2 + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - a^2 b^2 + b^4 + (a^2 + b^2)(ab) + (a^2 + b^2)(ab) - 3ab - a^2 b^2 + 3 = 0$$

$$0 = (a^2 + b^2)^2 - a^2 b^2 + 3 = 0$$

$$0 = (a^2 + b^2)(ab) - a^2 b^2 + 3 = 0$$

$$0 = a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4 + 3 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$h \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = \frac{m}{n} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-22} \cdot a^2 \quad \frac{39}{22}$$

$$a^2 = \frac{h \cdot 2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{34}}{m}$$

$$a = 3 \cdot 2^5 \cdot 5^{17} \sqrt{\frac{h \cdot 3}{m}}$$

~~$$b = \frac{h \cdot 2^{16} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12} \cdot m}{n} = \frac{m}{n} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-22}$$~~

~~$$c = h \cdot 2^{10} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$~~

$$abc = a \cdot \frac{m}{n} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-22} \cdot \frac{h \cdot 2^{16} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12} \cdot m}{n} \cdot h \cdot 2^{10} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$

$$= a \cdot m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{13}$$

$$= a \cdot m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{13} \cdot 3 \cdot 2^5 \cdot 5^{17} \sqrt{\frac{h \cdot 3}{m}}$$

$$m \sqrt{\frac{h \cdot 3}{m}} \rightarrow \min$$

$$\sqrt{h \cdot 3 \cdot m} \rightarrow \min$$

используем  $\cos x = a$

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - a^2} \Rightarrow$$

а не  $\sin(\cos x)$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + a^2 = 1$$

$$a = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

23

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

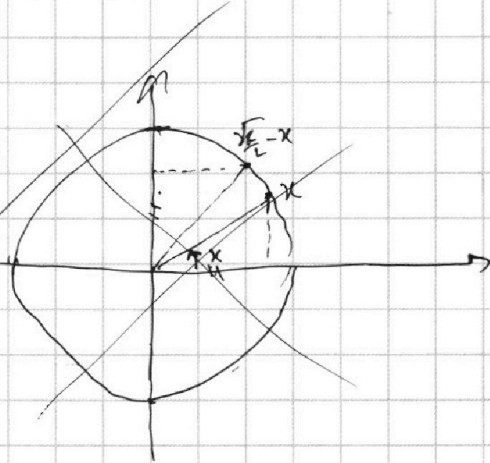
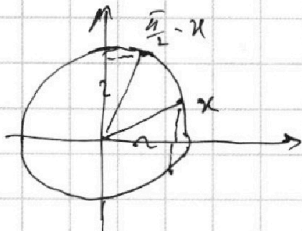
~~1)  $x \in I$  и т~~

Рассмотрим 4 случая

1)  $x \in I$  и т

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$



2)  $x \in II$  и т

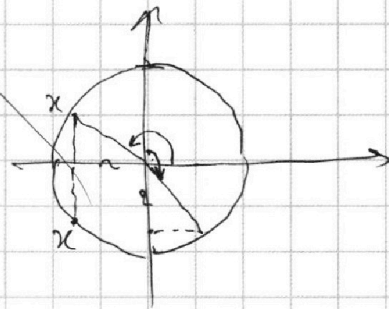
$$\arcsin(\cos x) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

3)  $x \in II$  и т

$$\arcsin(\cos x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

4)  $x \in III$  и т

$$\arcsin(\cos x) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$



10 Т.к.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^4 + a^2 b^2 + b^4 - a^3 b - a b^3 + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 + a^2 b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - ab) + 3a^2 b^2 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a + b)^2 - 3ab + 3a^2 b^2 = 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - 3ab = k(3 + a^2 b^2)$$

$$(a^2 + b^2)^2 - ab(a^2 + b^2) + a^2 b^2 + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2 + ab)^2 - 3ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a + b)^2 - ab)^2 + 3(1 - ab(a^2 + b^2)) = 0$$

$$(a^2 + b^2 - a^2 b^2)^2 + ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} + 3 = 0 \quad | \cdot a + b \neq 0$$

$$a^3 + b^3 + 3(a + b) = 0$$

$$(a + b) \frac{(a^2 + b^2)^3 + a^3 b^3}{a^2 + b^2 + ab} + 3 = 0$$

$$a^2 + b^2 = m$$

$$a^2 b^2 = n$$

$$m^2 - mn + n^2 + 3 = 0$$

$$\frac{m^3 + n^3}{m + n} + 3 = 0$$

$$a^3 + b^3 - (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 0$$

$$= a^3 - a^2 b + a b^2 + b^3 - a^2 b + a b^2 + a b^3 - a^2 b + b^3$$

$$(a^2 + b^2)^3 + a^3 b^3 + 3(a^2 + b^2 + ab) = 0$$

$$(m + n)(m^2 - mn + n^2)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$10 \cdot \frac{\pi}{6} = 5 \frac{\pi}{3}$$

$$n - 2 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \pi = -1$$

$$3\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Замена:  $\log_y 5 \rightarrow \log_5 y = b$   $\sqrt{m} + 4\sqrt{m} = 8m$   
 $u \in \mathbb{D} \mathbb{Z}$  т.к.  $y \neq 1 \Rightarrow b \neq 0$   $m = \frac{\sqrt{4}}{2} + \frac{\sqrt{4}}{2}$   
 $0 \leq \frac{\sqrt{4}}{2} + \frac{\sqrt{4}}{2} < \pi / \sqrt{4}$

$$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3 \quad | \cdot b \neq 0 \quad 0 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$$

$$b^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3b \quad 0 \leq 1 + 1 < 2$$

$$(2) \quad b^5 + 3b + 4\frac{1}{3} = 0$$

$$(1) \quad a^5 + 3a - 4\frac{1}{3} = 0 \quad (2)$$

$$a^5 + b^5 + 3a + 3b = 0$$

$$x = \frac{a^5}{2}$$

$$y = \frac{b^5}{2}$$

$$x \cdot y = \frac{a^5 \cdot b^5}{2}$$

$$(a+b)(a^4 - ab^3)$$

$$-a + b^4$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(1) \quad b^5 + 3a + 4\frac{1}{3} = 0 \quad | \cdot 3$$

$$3b^5 + 9a + 4 = 0$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)((a+b)^2 - 2ab - ab)$$

$$a^4 + b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) =$$

$$= a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4 = a^4 - b^4$$

$$a^4 + b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

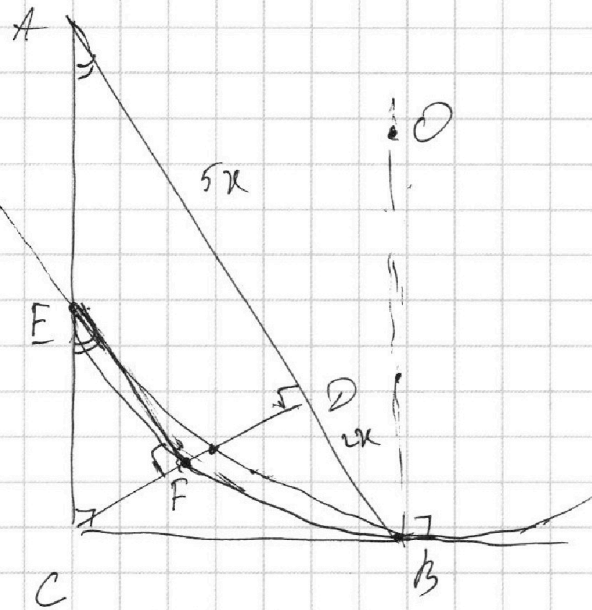
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



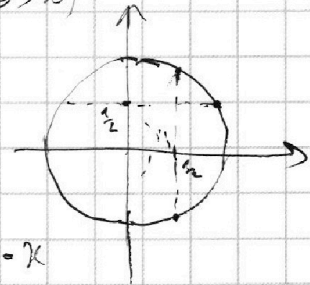
$$AD : DB = \frac{5x}{2}$$

пусть  $m = 2x/25$

$$\frac{S_{AEF}}{S_{CBF}} = \frac{\arcsin(\cos x)}{\arcsin(\cos m)} = \arcsin(\cos m)$$

$$\arcsin(\cos x)$$

при  $x \in I, IV$   $x \in I$   
 $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$   
 $x \in IV$   $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} + x$



$$\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x)$$

(1) пусть  $\cos x$

$x \in I, IV$   $x \in I$

$$\arcsin(\cos x)$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

$x \in II$

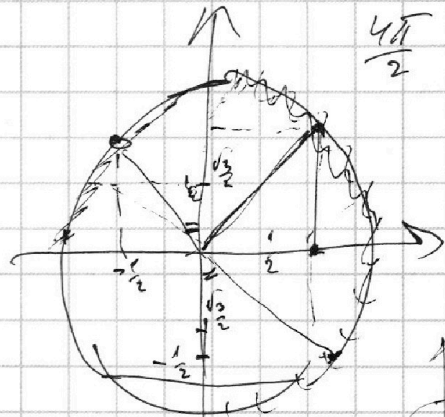
$$\arcsin(\cos x) = x + \pi$$

$x \in III$

$$x = \frac{3\pi}{2} \quad \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\arcsin(0) = 0$$

$$\pi - 0 = \pi$$



$x \in II$   $\arcsin(\cos x)$

$$\arcsin(\cos x) = -x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - x$$

$x \in III$

$$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(5\pi) = \cos \pi = -1$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$-5\pi = \pi - 2 \cdot 5\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$$ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$$

a, b, c наим.?

$$\text{Пусть } ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \quad (1)$$

$$bc = m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \quad (2)$$

$$ac = n \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33} \quad (3)$$

$$(1) + (2): b(a+c)$$

$$c(a+b)$$

$$a(b+c)$$

$$(1) \quad b = \frac{2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}}{a}$$

$$(2): \quad b = \frac{2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}}{c}$$

$$c = \frac{2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}}{b} = \frac{2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot a}{2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}}$$

или

$$(3): \quad c = \frac{2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}}{a} = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5 \cdot a$$

$$2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33} = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5 \cdot a^2$$

$$a^2 = 2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{28}$$

$$(1): \quad b = \frac{k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}}{a}$$

$$\frac{39}{42}$$

$$(3): \quad c = \frac{n \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}}{a}$$

$$(2): \quad b = \frac{m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}}{c} = \frac{m \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot a}{n \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - a^3b^2 + a^4b^3 - a^4b^4 + b^5 = a^5 + b^5$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 3(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3) = 0$$

$$a+b=0 \quad a^3(a-b) + a^2b^2 + b^3(b-a) + 3 = 0$$

$$a^2b^2 + 3 = 0$$
$$a^4 + b^4 + ab(-a^2 + ab - b^2) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab(a^2 - 2ab + b^2 + ab) + 3 = 0$$

$$a^4 + b^4 - ab(a-b)^2 + 3 = 0$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^4 + b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) =$$

$$= a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4$$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2) - a^2b^2 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(1 - ab) - a^2b^2 + 3 = 0$$

$$a^2 + b^2$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 - ab(a^2 + b^2) + 3 = 0$$

$$a^6 + b^6 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) =$$

$$\frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2} = \frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2}$$

$$3 = 4 - 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

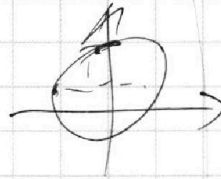
1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{100}{3^6}$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x^3} 625 - 3 \quad (1)$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_5^3 0,2 - 3 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot 10 \cdot y + 10^2 - 10^2 + 64 = 0$$

$$x + (y - 10)^2 = 36$$

$$(0) \quad 10 = 12$$

$$\text{OD 3: } \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$625 = 25^2 = 5^4$$

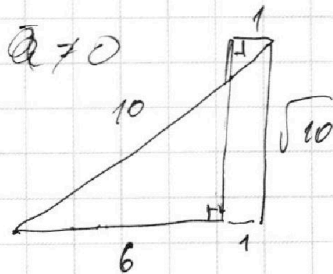
$$(1): \log_{2x} \log_{2x} 5 = \frac{1}{\log_5 2x}$$

$$\log_{2x^3} 625 - 3 = \frac{1}{3} \log_{2x} 625 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 = \frac{4}{3 \log_5 2x}$$

Замена:  $\log_5 2x = a$  и  $\text{OD 3}$  т.к.  $x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow a \neq 0$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3 \quad / \cdot a \neq 0$$

$$a^5 - 3 = \frac{4}{3} - 3a$$



$$(2): \log_y 5 = \frac{1}{\log_5 y}$$

$$\log_5^3 0,2 = \frac{1}{3} \log_y \frac{1}{5} = -\frac{1}{3} \log_y 5 = -\frac{1}{3 \log_5 y}$$