МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc$ делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, $ac$ делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $BC$ в точке $B$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $F$, а катет $AC$ – в точке $E$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$.

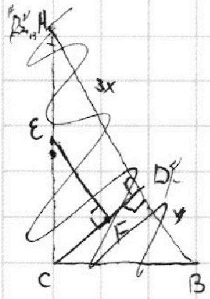
   б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 4$, а радиус сферы $\Omega$ равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ




~~AB∥EF~~ ~~$\frac{S_{ABE}}{S_{EBF}} = 2$~~

№1 Решение. Если число x делится на dx, число y на dy, а число z на dz, то число xyz делится на dx, dy, dz.
Поэтому ab · bc · ca делится на $2^{42}\cdot3^{41}\cdot5^{53}$, но ab · bc · ca = $(abc)^2$ – точный квадрат, т.е. $(abc)^2$ делится и на $2^{42}\cdot3^{42}\cdot5^{54}$ => abc делится на $2^{21}\cdot3^{21}\cdot5^{27}$. Итак abc $\geq 2^{21}\cdot3^{21}\cdot5^{27}$. Но ac кратно $5^{30}$, поэтому и abc кратно $5^{30}$. Т.е. abc $\geq 2^{21}\cdot3^{21}\cdot5^{30}$. В качестве примера рассмотрим $a=2^{7}\cdot5^{15}\cdot3^{7}$; $b=2^{2}\cdot3^{3}$; $c=2^{12}\cdot3^{11}\cdot5^{15}$.

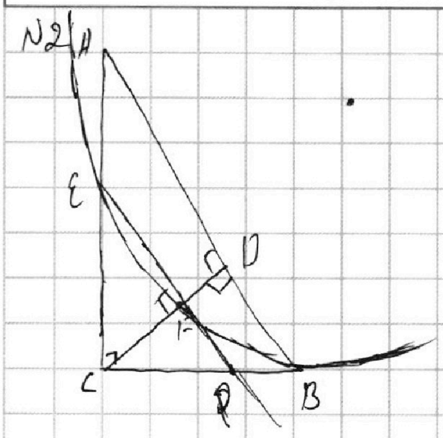
Ответ: $2^{21}\cdot3^{21}\cdot5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2




Решение: Пусть P — точка пересечения прямой EF ~~с отр~~ с отрезком BC, тогда $PB^2 = PF \cdot PE$. С другой стороны, раз $EF \parallel AB$, то $CF \perp EP$, т.е. CF — высота в прямоугольном ~~треугольнике~~ $\triangle CEP$. А значит, $PC^2 = PF \cdot PE$. Итак $PC^2 = PF \cdot PE = PB^2 \Rightarrow$ т. P — середина BC, значит EF — средняя линия $\triangle CAD \Rightarrow$

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{4}. \text{ Но } \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16},\quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{16}{3}.$$

Ответ: $\frac{16}{3}$

№3 Решение: $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \quad | :5$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos(x+2\pi n) = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right), \ n\in Z \\ \cos(-x+2\pi n) = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right), \ n\in Z \end{array}\right. \\ -\frac{\pi}{2} \le \frac{1}{5}\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x - 2\pi n = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}, \ n\in Z \\ \frac{\pi}{2} + x - 2\pi n = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}, \ n\in Z \end{array}\right. \\ -\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{-6x}{5} = 2\pi n - \frac{4\pi}{10}, \ n\in Z \\ \frac{4x}{5} = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi n, \ n\in Z \end{array}\right. \\ -3\pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi n, \ n\in Z \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n, \ n\in Z \end{array}\right. \\ -3\pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi \\ \frac{\pi}{3} - \frac{10}{3}\pi = -3\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}$; $x = -\frac{4}{3}\pi$; $x = -3\pi$; $x = 2\pi$; $x = -\frac{\pi}{2}$.

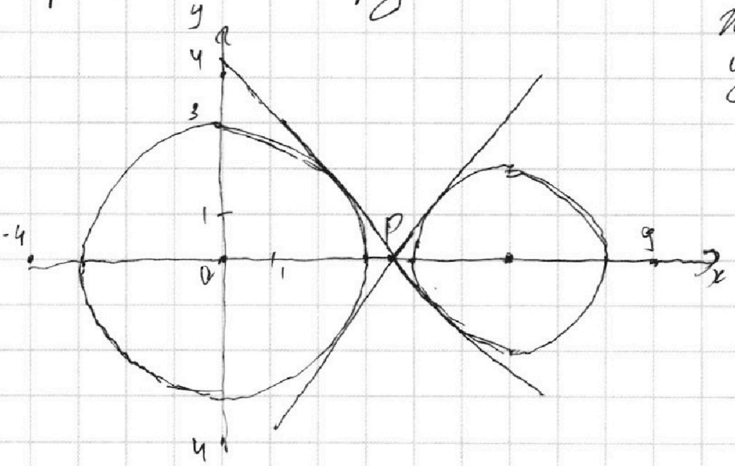
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 $\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$ Решение: Множители второго уравнения – уравнения окружностей в центре (0;0) и $r=3$ – первого и в центре в точке (6;0) $R=2$ – второе. (т.к. $x^2+y^2-12x+32)=0 \Leftrightarrow (x-6)^2+y^2=2^2$). Первое – уравнение прямой, т.е. угол наклона должен быть такой, что с помощью свободного члена мы можем ее „перенести" так, чтобы она пересекла обе окружности.




Иначе говоря прямая должна быть между общими касательными. Точка P делит отрезок [3;4] в отношении радиусов окружностей, т.е имеет координаты (3,(6);0). Уравнения касательных из этой точки имеют коэффициенты при $x$:

$K_1 = 15/11 \cdot \sqrt{\frac{11}{9}}$ и $K_2 = -K_1$. Из первого уравнения $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$. Т.е. $-K_1 < \frac{a}{2} < K_1 \Leftrightarrow -2K_1 < a < 2K_1 \Rightarrow -\frac{30}{11}\cdot\sqrt{\frac{11}{9}} < a < \frac{30}{11}\cdot\sqrt{\frac{11}{9}}$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{30}{11}\cdot\sqrt{\frac{11}{9}}; \frac{30}{11}\sqrt{\frac{11}{9}}\right)$

№5 Решение: $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ и $\log_3^4 5y + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_x 3^{4} - 8$

$\log_3^5 x + 6\log_x 3 \cdot \log_3 x = 10\log_x 3 \cdot \log_3 x - 8\log_3 x$

$\log_3^5 x + 6 = 10 - 8\log_3 x$

$a = \log_3 x \quad x > 0$
$b = \log_3 5y \quad y > 0$ , т.к. иначе $\log_3^5 5y$ и $\log_x 3$ – не опр.

$\log_3^4 5y + 2\log_{5y} 3 = 2\log_{5y} 3^{11} - 8$

$\log_3^5 5y + 2 = 22 - 8\cdot\log_3 5y$

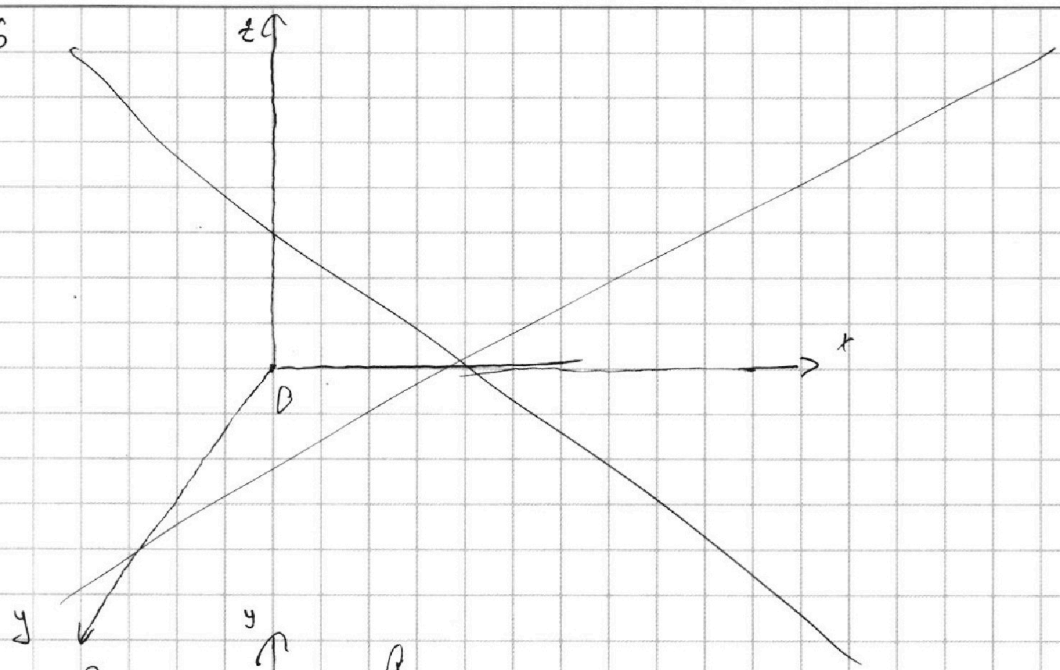
$a^5 + 8a = 4$
$b^5 + 8b = 20$ – т.е. ур-е $z^5 + 8z - c = 0$. Имеет не более одного решения, т.к. производная $5z^4 + 8 > 0$ $\Rightarrow$ сущ-ет не более одной пары $a, b$ удовлетворяющей системе $\Rightarrow$ сущ. не более одной пары $x, y$, удовл. системе

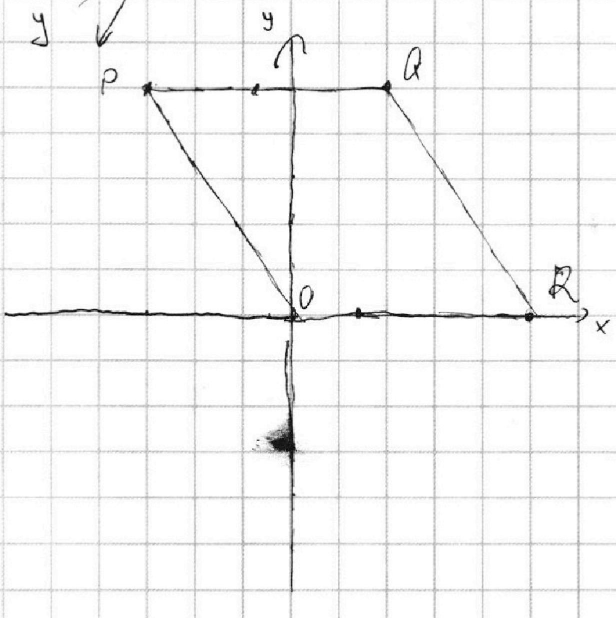
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6




$P(-14;42)$; $Q(6;42)$; $O(0;0)$; $R(20;0)$.

Решение: Рассмотрим т. плоскости $(x_1;y_1)$

Заметим, что всякая т. $B(x_2;y_2)$ для которой $3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$, лежит на прямой $y=-3x+(3x_1+y_1+33)$. Эта прямая параллельна сторонам $OP$ и $QR$ параллелограмма, т.к. они тоже имеют коэффициент наклона $-3$. И так в каждой точке внутри параллелограмма с координатами $(x_1;y_1)$ ~~соответственно~~ соответствует ~~этим~~ все целые точки которые попали на отрезок прямой $y=-3x+(3x_1+y_1+33)$, ограниченной отрезками $OR$ и $PQ$. Продолжение на след. листе.

МФТИ

Продолжение: №6

Кол-во целых точек = кол-ву точек с целой абсциссой. В случае если $y_1$ кратно 3 их 15, иначе 14. Точки, у которых существуют парные (т.е. соответствующая им прямая пересекает параллелограмм), лежат в параллелограмме с вершинами $(0;0)$, $(-14;42)$, $(-5;42)$, $(9;0)$. Среди них с ординатой кратной 3: $15 \cdot 10 = 150$ шт., с ординатой не кратной 3 $28 \cdot 9 = 252$ шт. Тогда всего пар:

$150 \cdot 15 + 252 \cdot 14 = 5778$

Ответ: 5778

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7 б) Решение: $4 = SN = SL = MK$, что было доказано в пункте а). $KA_1 = MK + MA_1 = 4 + 6 = 10$.

Пусть т. H - основание перпендикуляра из т. K на BC. $KH = KA_1 \cdot \sin\angle MA_1C = KA_1 \cdot \sin 2\alpha$, т.к. $A_1$ - центр описанной окр. $\triangle BMC$ и $\angle MA_1C$ - в 2 раза больше $MBC = \alpha$. В прошлом пункте было получено равенство $\frac{12\sin 2\alpha \cdot 12\cos 2\alpha}{2} = 30$. Преобразуем его: $6 \cdot \sin 2\alpha = 5$, $\sin 2\alpha = \frac{5}{6}$, $KH = KA_1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{10 \cdot 5}{6} = \frac{25}{3}$. Пусть O - центр сферы $\Omega$, тогда по теореме ~~о 3~~ о 3 перпендикулярах. OH - перпендикулярно BC, а также OH лежит в биссекторной плоскости двугранного угла при ребре BC, пирамиды SABC, поэтому двугранный угол при ребре BC = удвоенному ~~равному~~ $\angle OHK$.

Пусть $\angle OHK = \beta$, тогда $tg\beta = \frac{OK}{KH} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5}$ $tg 2\beta = \frac{2tg\beta}{1 - tg^2\beta} = \frac{2 \cdot \frac{3}{5}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$.

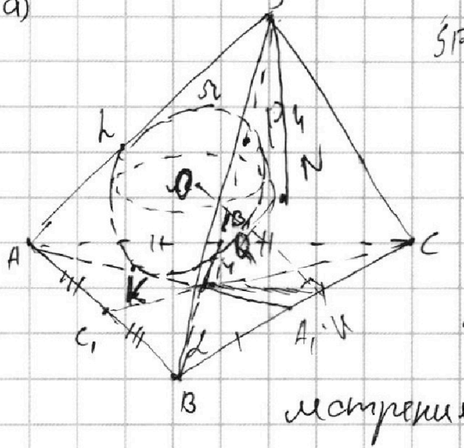
Ответ: б) двугранный угол при ребре $BC = arctg\frac{15}{8}$; а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2430$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 а)




$SP = MQ$ $S_{\triangle ABC} = 90$, $SA = BC = 12$, $SN = 4$, $r = 5$

Решение: Т.к. $SP = MQ$, то $SQ = MP$, $MK^2 = MP \cdot MQ = SP \cdot SQ = SL^2 \Rightarrow$ ~~$K$~~ $MK = SL$, где равенства берутся из рассмотрения степеней точек $S$ и $M$, относительно сферы $\Omega$. Также $AL = AK$, т.к. $AL$ и $AK$ - касательные из т. $A$ к сфере $\Omega$. Тогда $12 = BC = SA = AL + LS = AK + KM = AM$. Т.к. $M$ - т. пересечения медиан в $\triangle ABC$, то $AM = 2A_1M = BC = 2CA_1$. В $\triangle BMC$ медиана $MA_1$ - в 2 раза меньше стороны $BC \Rightarrow \angle BMC = 90°$. Известно, что $S_{\triangle BMC}$ в трое меньше площади $\triangle ABC$, т.к. высота опущенная из $A$ на $BC$, относится к высоте опущенной из $M$ на $BC$, как $\frac{A_1A}{A_1M} = 3$, поэтому $S_{\triangle BMC} = 30$. Обозначим $\angle MBC$ за $\alpha$. Тогда $MC = 12 \cdot \sin\alpha$, $\Rightarrow BM = 12\cos\alpha$, $S_{\triangle BMC} = \frac{12\sin\alpha \cdot 12\cos\alpha}{2} = \frac{BM \cdot CM}{2} = 30$. Произведение медиан в $\triangle ABC = CC_1 \cdot AA_1 \cdot BB_1 = \frac{3}{2}CM \cdot \frac{3}{2}BM \cdot 18 = 30 \cdot 18 \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = 15 \cdot 162 =$ ~~$2??$~~ ~~$2?$~~ $2430$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!