МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

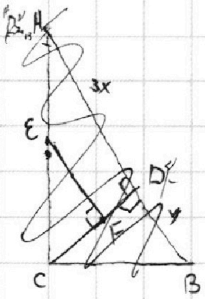
   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



~~$AB \parallel EF$ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EBF}} = \ldots$~~

№1 Решение. Если число x делится на x, число y на y, а число z на z, то число xyz делится на x, y, z. Поэтому $ab \cdot bc \cdot ca$ делится на $2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$, но $ab \cdot bc \cdot ca = (abc)^2$ – точный квадрат, т.е. $(abc)^2$ делится и на $2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54} \Rightarrow abc$ делится на $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$. Итак $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$. Но ac кратно 5^{30}, поэтому и abc кратно 5^{30}. Т.е. $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$. В качестве примера рассмотрим $a = 2^7 \cdot 5^{15} \cdot 3^7$; $b = 2^2 \cdot 3^3$; $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$.

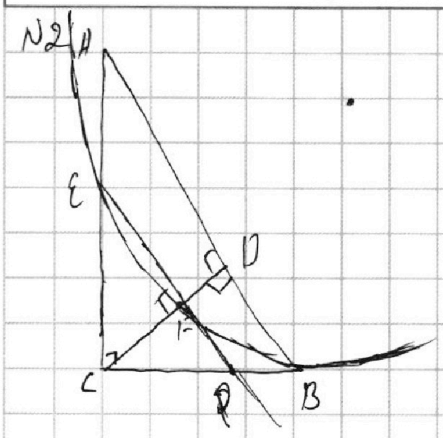
Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Решение: Пусть P — точка пересечения прямой EF ~~сотре~~ с отрезком BC, тогда $PB^2 = PF \cdot PE$. С другой стороны, раз $EF \parallel AB$, то $CF \perp EP$, т.е. CF — высота в прямоугольном ~~треугольнике~~ $\triangle CEP$. А значит, $PC^2 = PF \cdot PE$. Итак $PC^2 = PF \cdot PE = PB^2 \Rightarrow$ т. P — середина BC, значит EF — средняя линия $\triangle CAD \Rightarrow$

$$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{4}.$$ Но $$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16},$$ $$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{16}{3}.$$

Ответ: $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3 Решение: $5\arcsin(\cos x) = x+\frac{\pi}{2}$ $\quad |:5$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos(x+2\pi n) = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right), \ n\in Z \\ \cos(-x+2\pi n) = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right), \ n\in Z \end{array}\right. \\ -\frac{\pi}{2} \le \frac{1}{5}\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x - 2\pi n = \frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}, \ n\in Z \\ \frac{\pi}{2} + x - 2\pi n = \frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}, \ n\in Z \end{array}\right. \\ \cancel{5\pi} \ -\frac{5\pi}{2} \le x+\frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{-6x}{5} = 2\pi n - \frac{4\pi}{10}, \ n\in Z \\ \frac{4x}{5} = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi n, \ n\in Z \end{array}\right. \\ -3\pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi n, \ n\in Z \\ \cancel{x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} \ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n, \ n\in Z \end{array}\right. \\ -3\pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi \\ \frac{\pi}{3} - \frac{10}{3}\pi = -3\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}$; $x=-\frac{4}{3}\pi$; $x=-3\pi$; $x=2\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}$.

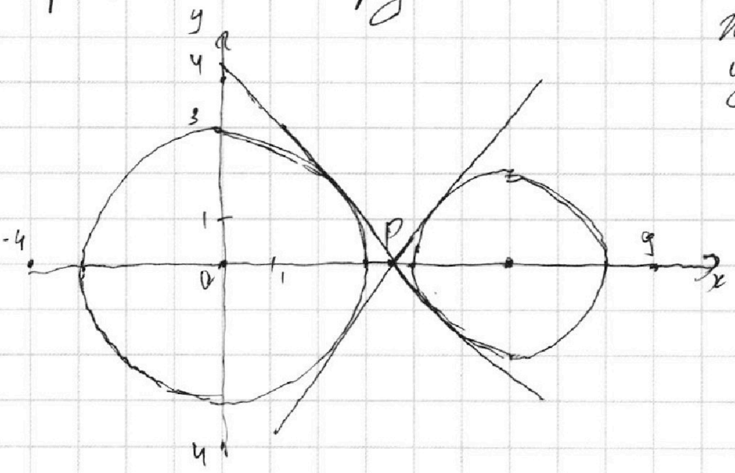
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 $\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$ Решение: Множители второго уравнения – уравнения окружностей в центре (0;0) и $r=3$ – первого и в центре в точке (6;0) $R=2$ – вторая. (т.к. $x^2+y^2-12x+32)=0 \iff (x-6)^2+y^2=2^2$). Первое – уравнение прямой, т.е. угол наклона должен быть такой, что с помощью свободного члена мы можем ее „перенести" так, чтобы она пересекла обе окружности.



Иначе говоря прямая должна быть между общими касательными. Точка P делит отрезок [3; 4] в отношении радиусов окружностей, т.е имеет координаты (3,6; 0). Уравнения касательных из этой точки имеют коэффициенты при x:

$K_1 = 15/11 \cdot \sqrt{\frac{11}{9}}$ и $K_2 = -K_1$. Из первого уравнения $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$. Т.е. $-K_1 < \frac{a}{2} < K_1 \iff -2K_1 < a < 2K_1 \Rightarrow -\frac{30}{11}\cdot\sqrt{\frac{11}{9}} < a < \frac{30}{11}\cdot\sqrt{\frac{11}{9}}$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{30}{11}\cdot\sqrt{\frac{11}{9}}; \frac{30}{11}\sqrt{\frac{11}{9}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 Решение: $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ и $\log_3^4 5y + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_x 3^{\frac{5}{2}} - 8$

$\log_3^5 x + 6\log_x 3 \cdot \log_3 x = 10\log_x 3 \cdot \log_3 x - 8\log_3 x$

$\log_3^5 x + 6 = 10 - 8\log_3 x$

$a = \log_3 x \quad x > 0$

$b = \log_3 5y \quad y > 0$, т.к. иначе $\log_{5y} 3$ и $\log_x 3$ - не опр.

$\log_3^4 5y + 2\log_{5y} 3 = 2\log_{5y} 3^{11} - 8$

$\log_3^5 5y + 2 = 22 - 8\cdot\log_3 5y$

$a^5 + 8a = 4$

$b^5 + 8b = 20$ — т.е. ур-е $z^5 + 8z - c = 0$. Имеет не более одного

решения, т.к. производная $5z^4 + 8 > 0$ =>

сущ-ет не более одной пары a, b удовлетворяющей

системе => сущ. не более одной пары x, y, удовл.

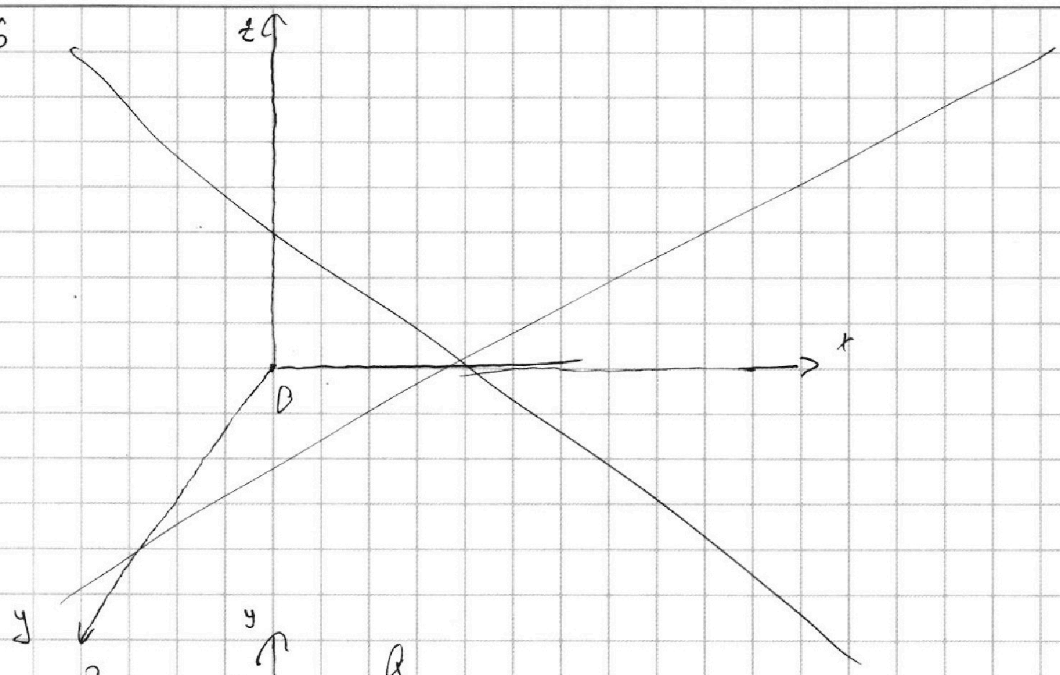
системе

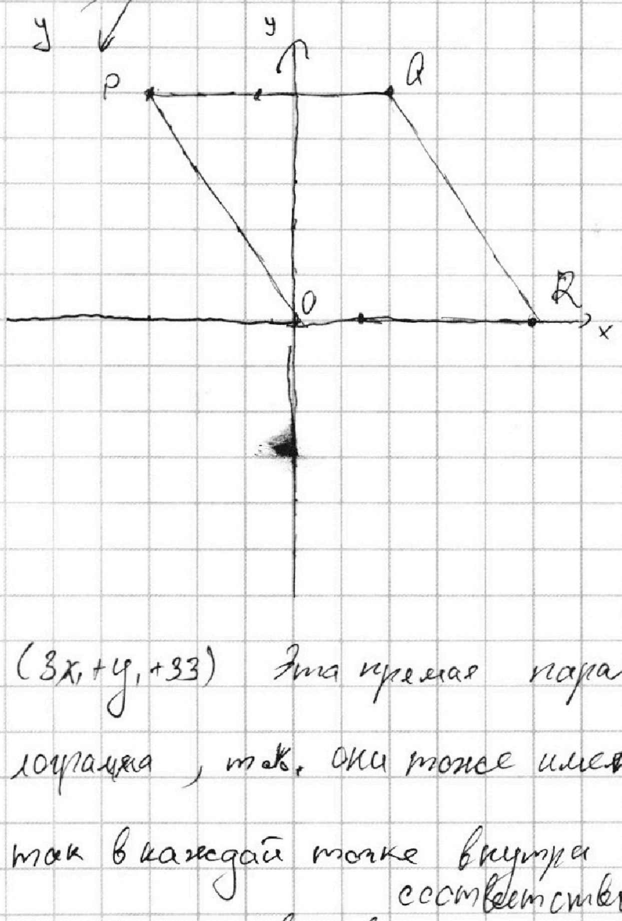
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6





$P(-14;42)$; $Q(6;42)$; $O(0;0)$; $R(20;0)$.

Решение: Рассмотрим т. плоскости $(x_1;y_1)$. Заметим, что всякая т. $B(x_2;y_2)$ для которой $3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$, лежит на прямой $y=-3x+(3x_1+y_1+33)$. Эта прямая параллельна сторонам OP и QR параллелограмма, т.к. они тоже имеют коэффициент наклона -3. И так в каждой точке внутри параллелограмма с координатами $(x_1;y_1)$ ~~соответствено~~ соответствует ~~этого~~ все целые точки которые попали на отрезок прямой $y=-3x+(3x_1+y_1+33)$, ограниченный отрезками OR и PQ. Продолжение на след. листе.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение: №6

Кол-во целых точек = кол-ву точек с целой абциссой. В случае если y_1 кратно 3 их 15, иначе 14. Точки, у которых существуют парные (т.е. соответствующая им прямая пересекает параллелограмм), лежат в параллелограмме с вершинами $(0;0)$, $(-14;42)$, $(-5;42)$, $(9;0)$. Среди них с ординатой кратной 3: $15\cdot10=150$ шт., с ординатой не кратной 3 $28\cdot9=252$ шт. Тогда всего пар:

$150\cdot15+252\cdot14=5778$

Ответ: 5778

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 б) Решение: $4 = SN = SL = MK$, что было доказано в пункте а). $KA_1 = MK + MA_1 = 4+6 = 10$.

Пусть т. H – основание перпендикуляра из т. K на BC. $KH = KA_1 \cdot \sin\angle MA_1C = KA_1 \cdot \sin\alpha$, т.к. A_1 – центр описанной окр. $\triangle BHC$ и $\angle MA_1C$ – в 2 раза больше $MBC = \alpha$. В прошлом пункте было получено равенство $\frac{12\sin\alpha \cdot 12\cos\alpha}{2} = 30$. Преобразуем его:

$6 \cdot \sin\alpha = 5$, $\sin\alpha = \frac{5}{6}$, $KH = KA_1 \cdot \frac{5}{6} = \frac{10 \cdot 5}{6} = \frac{25}{3}$. Пусть O – центр сферы Ω, тогда по теореме о 3 перпендикулярах. OH – перпендикулярно BC, а также OH лежит в биссекторной плоскости двугранного угла при ребре BC пирамиды $SABC$, поэтому двугранный угол при ребре BC = удвоенному $\angle OHK$.

Пусть $\angle OHK = \beta$, тогда $tg\beta = \frac{OK}{KH} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5}$. $tg 2\beta = \frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta} = \frac{2 \cdot \frac{3}{5}}{1-\frac{9}{25}} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$.

Ответ: б) двугранный угол при ребре $BC = arctg\frac{15}{8}$; а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2430$.

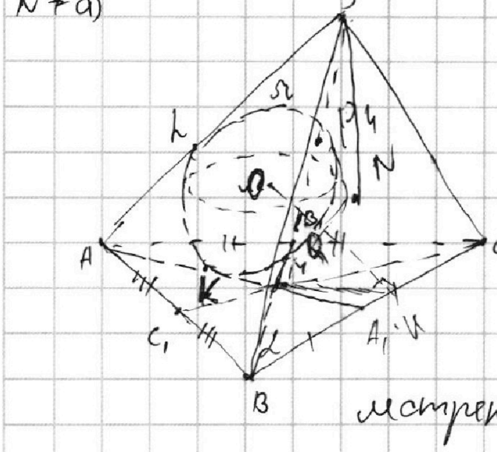
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 а)



$SP = MQ$ $\quad S_{\triangle ABC} = 90$, $SA = BC = 12$, $SN = 4$, $r = 5$

Решение: Т.к. $SP = MQ$, то $SQ = MP$, $MK^2 = MP \cdot MQ = SP \cdot SQ = SL^2 \Rightarrow MK = SL$, где равенства берутся из рассмотрения степеней точек S и M, относительно сферы Ω. Также $AL = AK$, т.к. AL и AK - касательные из т. A к сфере Ω. Тогда $12 = BC = SA = AL + LS = AK + KM = AM$. Т.к. M - т. пересечения медиан в $\triangle ABC$, то $AM = 2A_1M = BC = 2CA_1$. В $\triangle BMC$ медиана MA_1 - в 2 раза меньше стороны $BC \Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$. Известно, что $S_{\triangle BMC}$ в трое меньше площади $\triangle ABC$, т.к. высота опущенная из A на BC, относится к высоте опущенной из M на BC, как $\frac{A_1A}{A_1M} = 3$, поэтому $S_{\triangle BMC} = 30$. Обозначим $\angle MBC$ за α. Тогда $MC = 12 \cdot \sin\alpha$, $\Rightarrow BM = 12\cos\alpha$, $S_{\triangle BMC} = \frac{12\sin\alpha \cdot 12\cos\alpha}{2} = \frac{BM \cdot CM}{2} = 30$. Произведение медиан в $\triangle ABC = CC_1 \cdot AA_1 \cdot BB_1 = \frac{3}{2}CM \cdot \frac{3}{2}BM \cdot 18 = 30 \cdot 18 \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = 15 \cdot 162 =$ 2430.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!