



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

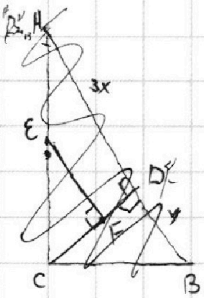
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ABTBEF

$$\frac{S_{ABE}}{S_{CBF}} = 2$$

№1 Теорема. Если число x делится на a , число y на b ,
а число z на ab , то число xyz делится на $a^2 b^2$.

Поэтому $ab \cdot bc \cdot ca$ делится на $2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$, но $ab \cdot bc \cdot ca = (abc)^2$ —
тот же квадрат, т.е. $(abc)^2$ делится и на $2^{42} \cdot 3^{42} \cdot 5^{54} \Rightarrow abc$ делится

на $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$. Итак $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$. Но ac кратно 5^{30} , поэтому и

abc кратно 5^{30} . Т.е. $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$. В качестве примера рассмотрим

$$a = 2^7 \cdot 5^{15} \cdot 3^7, \quad b = 2^2 \cdot 3^3, \quad c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

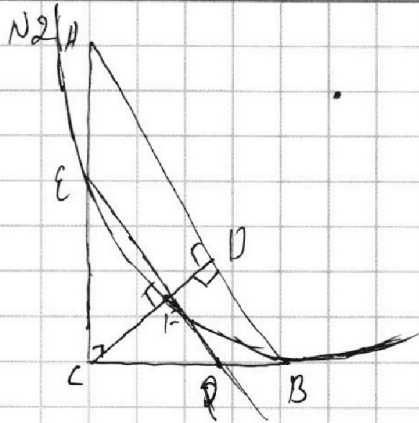
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение: Пусть P — точка пересечения
прямой EF со стороной BC ,
тогда $PB^2 = PF \cdot PE$. Если с другой стороны,
раз $EF \parallel AB$, то $CF \parallel EP$, т.е. CF —
высота в прямоугольном ~~треугольнике~~

$\triangle CEP$. А значит, $PC^2 = PF \cdot PE$. Итак $PC^2 = PF \cdot PE = PB^2 \Rightarrow$

т.е. P — середина BC , значит EF — средняя линия $\triangle CAD \Rightarrow$

$$\frac{S_{CEFF}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{1}{4}. \text{ По } \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}} =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}, \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{16}{3}.$$

Ответ: $\frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Семейство: $\text{B arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \quad 1:5$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$\begin{cases} \cos(x + 2\pi n) = \sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}), n \in \mathbb{Z} \\ \cos(-x + 2\pi n) = \sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}), n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{5} \cdot (x + \frac{\pi}{2}) \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x - 2\pi n = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} + x - 2\pi n = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}, n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{6x}{5} = 2\pi n - \frac{4\pi}{10}, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{4x}{5} = -\frac{4\pi}{10} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -3\pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ ~~x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z}~~ \\ -3\pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi \\ \frac{\pi}{3} - \frac{10}{3}\pi = -3\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}; x = -\frac{4}{3}\pi; x = -3\pi; x = 2\pi;$
 $x = -\frac{\pi}{2}.$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

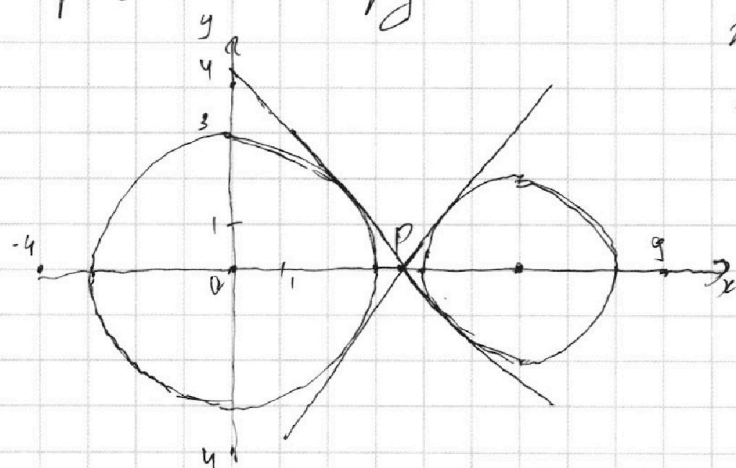
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 $\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$ Решение: Максимумы
второго уравнения - урав-

нения окружностей в центре $(0, 0)$ и $R = 3$ - первого C_1
в центре в точке $(6, 0)$ $R = 2$ - второй. (т.к. $x^2 + y^2 - 12x$

$+ 32 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)^2 + y^2 = 2^2$). Первое - уравнение прямой,
т.е. угол наклона должен быть, что становится свободными
цифры мы можем ее „перенести“ так, чтобы она

пересекала обе окружности.



Иначе говоря прямая дол-
жна быть между двумя
касательными.
Точка P делит отрезок

$[3, 4]$ в отношении ра-
диусов окружностей,
т.е. имеет координаты

$(3\frac{2}{3}, 0)$. Уравнение ка-

сательных из этой точки имеет координаты при x :

$k_1 = \frac{15}{11} \cdot \sqrt{\frac{11}{9}}$ и $k_2 = -k_1$. Из первого уравнения $y = -\frac{a}{2}x$
 $+ \frac{3b}{2}$, т.е. $-k_1 < \frac{a}{2} < k_1 \Leftrightarrow -2k_1 < a < 2k_1 \Rightarrow -\frac{30}{11} \cdot \sqrt{\frac{11}{9}}$
 $< a < \frac{30}{11} \cdot \sqrt{\frac{11}{9}}$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{30}{11} \cdot \sqrt{\frac{11}{9}}; \frac{30}{11} \sqrt{\frac{11}{9}}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 Решение: $\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$ и $\log_3^5 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} 3'' - 8$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 3^4 - 8$$

$$\log_3^5 x + 6 \log_x 3 = \log_{3^6} x = 10 \log_x 3 \cdot \log_3 x - 8 \log_3 x$$

$$\log_3^5 x + 6 = 10 - 8 \log_x x$$

$$a = \log_3 x \quad x > 0$$

$$b = \log_3 5y \quad y > 0$$

, т.к. иначе $\log_{\frac{5y^5}{3}} 3$ и $\log_x 3$ - не стр.

$$\log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = 2 \log_{5y} 3'' - 8$$

$$\log_3^5 5y + 2 = 2 \cdot 2 - 8 \cdot \log_3 5y$$

$$a^5 + 8a = 4$$

$$b^5 + 8b = 20$$

уравнение $z^5 + 8z - c = 0$ имеет не более одного

решения, т.к. производная $5z^4 + 8 > 0 \Rightarrow$

сущ-ет не более одной пары a, b удов-створяющей

системе \Rightarrow сущ. не более одной пары x, y , удовл.

системе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

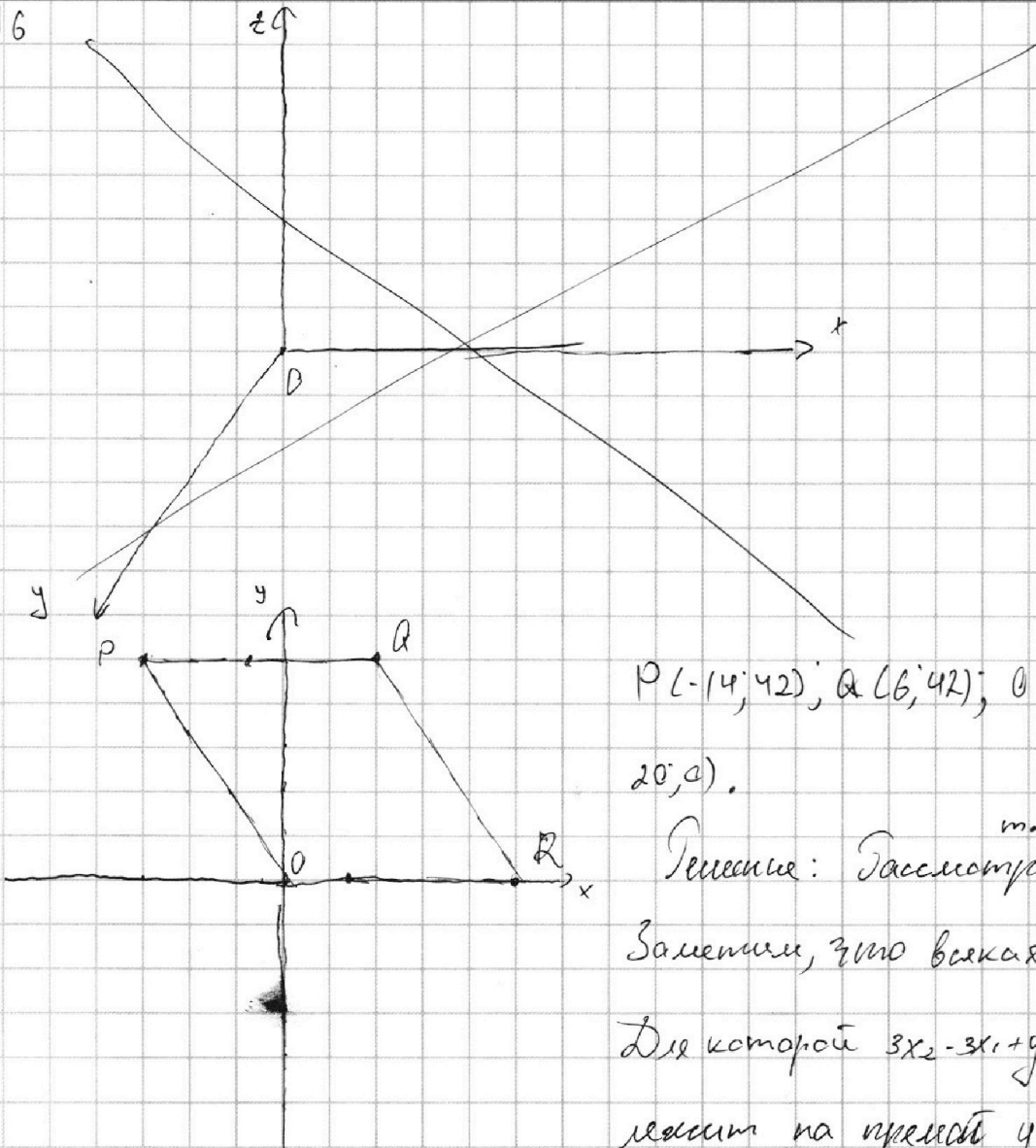
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6



$P(-14; 42)$; $Q(6; 42)$; $O(0; 0)$; $R(20; 0)$.

Решение: Рассмотрим $m = (x_1; y_1)$

Заметим, что всякая $m = (x_2; y_2)$

для которой $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$,
лежит на прямой $y = -3x +$

$(3x_1 + y_1 + 33)$ Эта прямая параллельна сторонам OP и QR параллелограмма, так, они тоже имеют коэффициент наклона -3 . И

так в каждой точке внутри параллелограмма с координатами $(x; y)$ ~~соответствуют~~ ^{соответствуют} ~~этим~~ все целевые точки

которые попали на отрезок прямой $y = -3x + (3x_1 + y_1 + 33)$,
ограниченной отрезками OR и PR . Продолжение на следующей.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение: №6
Кол-во целых точек = кол-ву точек с целой абсциссой. В
случае если $y \equiv 3 \pmod{15}$, иначе 14. Точки, у которых существует
параллель (соответствующая им прямая пересекает параллелограмм),
лежат в параллелограмме с вершинами $(0;0)$, $(-14;42)$,
 $(-5;42)$, $(9;0)$. Число их с абсциссой кратной 3; $15 \cdot 10 = 150$ шт.,
с абсциссой не кратной 3 $28 \cdot 9 = 252$ шт. Тогда всего шт:
 $150 \cdot 15 + 252 \cdot 14 = 5748$

Ответ: 5748

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 б) Дано: $4 = SN = Sh = Mk$, что было доказано в пункте а). $KH = MK + MA_1 = 4 + 6 = 10$.

Пусть m -основание перпендикуляра из m . K на BC , $KH = KA_1 \cdot \sin \angle MA_1K = KA_1 \cdot \sin \alpha$, т.к. A_1 - центр описанной окр. $\triangle BMC$ и $\angle MA_1C$ в 2 раза больше $\angle MBC = \alpha$. В прошлом пункте было получено равенство $\frac{12 \sin \alpha \cdot 2 \cos \alpha}{2} = 30$. Преобразуем его:

$$6 \cdot \sin \alpha = 5, \quad \sin \alpha = \frac{5}{6}, \quad KH = KA_1 \cdot \frac{5}{6} = 10 \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{3}.$$

Пусть O - центр сферы Ω , тогда по теореме ~~о~~ OK перпендикулярен BC , а также OK лежит в биссектрисной плоскости двугранного угла при ребре BC пирамиды $SABC$, поэтому двугранный угол при ребре BC = удвоенному ~~равенству~~ $\angle OKK$.

$$\text{Пусть } \angle OKK = \beta, \text{ тогда } \operatorname{tg} \beta = \frac{OK}{KH} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{3}{5} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{2 \cdot \frac{3}{5}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{15}{8}.$$

Ответ: двугранный угол при ребре BC = $\arctg \frac{15}{8}$; а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$

2430.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

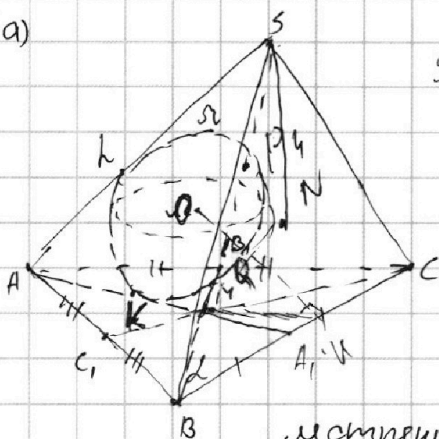


1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 а)



$$SP = MQ, S_{\triangle ABC} = 30, SA = BC = 12, SN = 4, r = 5$$

Решение: Т.к. $SR = MQ$, то $SQ = MP$,

$$MK^2 = MP \cdot MQ = SP \cdot SQ = SH^2 = 7 \quad \text{т.к.} \quad MK =$$

SH , где равенства берутся из рас-

смотрения стесий точки S и M , относительно

сферы Ω . Также $AH = AK$, т.к. AH и AK - касательные из т. A к

сфере Ω . Тогда $12 = BC = SA = AH + HS = AK + KM = AM$. Т.к.

M - т. пересечения медиан в $\triangle ABC$, то $AM = 2A_1M = BC = 2CA_1$.

В $\triangle BMC$ медиана MA_1 - в два раза меньше стороны $BC \Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$. Известно, что $S_{\triangle BMC}$ в три раза меньше площади $\triangle ABC$, т.к.

высота опущенная из A на BC , относится к высоте опущенной

из M на BC , как $\frac{AA_1}{A_1M} = 3$, поэтому $S_{\triangle BMC} = 30$. Возьмем

$\angle MBC = 2\alpha$. Тогда $MC = 12 \cdot \sin 2$, $\Rightarrow BM = 12 \cos 2$, $S_{\triangle BMC} = \frac{12 \sin 2 \cdot$

$$12 \cos 2 = \frac{BM \cdot CM}{2} = 30. \quad \text{Произведение медиан в } \triangle ABC$$

$$= CC_1 \cdot AA_1 \cdot BB_1 = \frac{3}{2} CM \cdot \frac{3}{2} BM \cdot 12 = 30 \cdot 18 \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = 15 \cdot 18 = 270$$

2430.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

