



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Найдите наименьшую степень вхождения 2 в abc.

$$ab : 2^{14}; \quad bc : 2^{17}; \quad ac : 2^{20} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{51}$$

Но $a^2 b^2 c^2$ - квадрат $\Rightarrow$ степени вхождения четны $\Rightarrow abc : 2^{26}$

Замечу, что это достигается при $a = a_1 \cdot 2^8, b = b_1 \cdot 2^6, c = c_1 \cdot 2^{12}$,
где $a_1, b_1, c_1 \not\div 2$. $8+6 \geq 14; 6+12 \geq 17; 8+12 \geq 20$.

2) Найдите наименьшую степень вхождения 7 в abc.

Замечу, что раз $ac : 7^{37}$, то и $abc : 7^{37}$.

Это достигается при $a = a_2 \cdot 7^{20}, b = b_2, c = 7^{17} c_2$,

где $a_2, b_2, c_2 \not\div 7$.

3) Т.е. $abc_{\min} = 2^{26} \cdot 7^{37}$ и оно достигается при

$$a = 2^{20} \cdot 7^8, \quad b = 2^6, \quad c = 2^{12} \cdot 7^{17}$$

, причем все условия выполняются

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\frac{a}{b}$ — несократима, $\Rightarrow (a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$, чтобы сократить на m , нужно

$\text{НОД}(a+b; a^2-6ab+b^2) = m$

2) $(a+b; a^2-6ab+b^2) = (a+b; a^2-6ab+b^2 - 8ab) = (a+b; 8ab)$

Заметим, что $(a+b, ab) = 1$, т.к. $(a, b) = 1$

$(a+b, ab) = (a+b, a^2)$ или $(a+b, ab) = (a+b, b^2)$

$\Rightarrow (a+b, ab) \mid (a^2, b^2) = 1$

3) $\Rightarrow (a+b, 8ab) = (a+b, 8)$, т.е. $m = 8$.

4) Заметим, что такое m достигается при $a = 1$ и $b = 7$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{16-6 \cdot 1 \cdot 7+49} = \frac{8}{8} = 1$

Ответ: $m = 8$

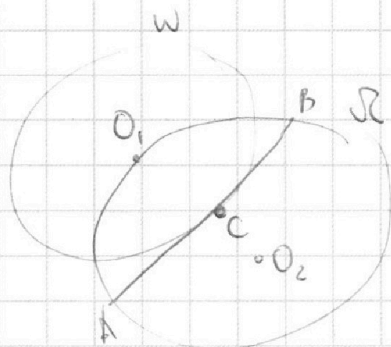
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC:CB = 7:1$$

$$O_1 \in R$$

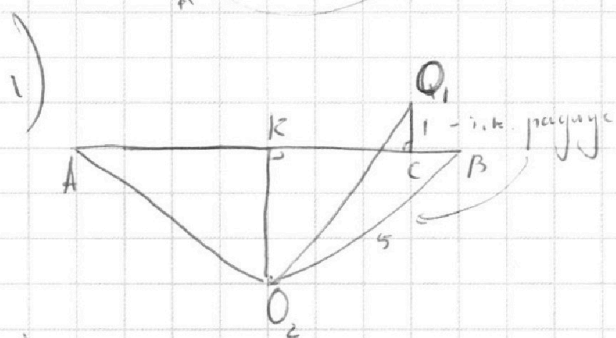
AB - хорда R и касательная
к W

O_1, O_2 - центры W и R

$O_1C \perp AB$, т.к. AB - касательная

O_2K - перпендикуляр к AB.

т.к. O_2 центр, а AB хорда, то
 $AK = KB$.



2) Заметим, что если $AC = 7k$, то $CB = k$, а $AK = 4k$, $\Rightarrow KC = 3k$.

Пусть $KO_2 = x$. Тогда $AK^2 = AO_2^2 - O_2K^2 = 25 - x^2$; $KC^2 = O_2O_1^2 - (x+1)^2$

$$\Rightarrow \frac{25 - x^2}{4^2} = \frac{25 - (x+1)^2}{3^2} \quad \text{из соотношения 4, 5}$$

$$\Rightarrow 9 \cdot 25 - 9x^2 = 16 \cdot 25 - 16x^2 - 32x - 16$$

$$7x^2 + 32x + 16 - 7 \cdot 25 = 0$$

По т. Виета подходит $x = 3$ и $x = -\frac{53}{7}$, но $x > 0$, т.к. радиус

$R >$ радиуса W. $\Rightarrow x = 3$. Тогда $AK^2 = AO_2^2 - O_2K^2 = 4^2$

$$\Rightarrow AB = 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) =$$

$$= (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$\Rightarrow 2 - 7x = (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$x = \frac{2}{7} \quad \text{или} \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Замечание. Замечание, что у $2x^2 + 2x + 1 = 0$ нет решений действительных.

$$\text{т.к. } a=2 \quad b=2 \quad c=1, \Rightarrow D = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$$

2) Допустим $x = \frac{2}{7}$. Проверим что подходит

$$2 - 7x = \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$\text{у } 2 - 7x \text{ есть решение, у } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \text{ нет такого}$$

$$\text{решения, } \Rightarrow \text{у } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \text{ есть такое решение.}$$

$$\Rightarrow \text{оно подходит. Или же } 2x^2 - 5x + 3 \text{ при } x = \frac{2}{7}: 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1, \text{ что верно}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Рассмотрим как зависит относительно друг друга расположение $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ чтобы $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

а) ~~Рассмотрим~~ ~~A левее~~ Если A левее B и ниже B, то

тогда $x_2 - x_1 < 0$ и $y_2 - y_1 < 0$, ~~тогда~~ $\Rightarrow 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) < 0 \neq 12$.

б) Если A левее B и правее:

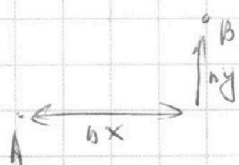


Если $|y_2 - y_1| \geq 8$ то Δx Δy

$x_2 - x_1$	$y_2 - y_1$
7	-2
8	-4
9	-6
10	-8
11	-9

Больше чем 10; -8 уже не входит в поле

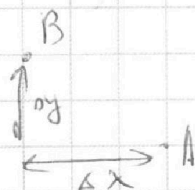
в) Если A левее B и ниже:



Пара больше чем -1; 14
уже не входит в поле

Δx	Δy
-1	14
-2	18

г) Если A левее B и правее B.



Других пар точек перекрывающихся в поле не существует

Δx	Δy
0	12
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2
6	0

2) На картинке поле и посчитаем количество пар для каждого поля

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

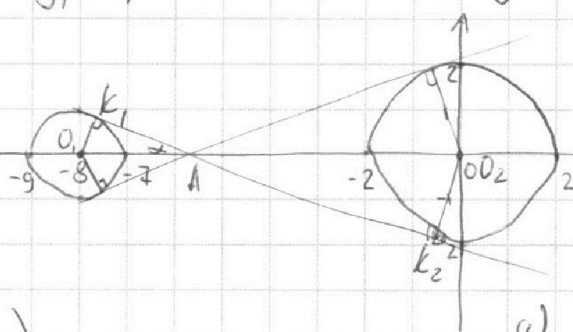
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Решим графическим способом. Заметим что $ax - y + 10b = 0$ — уравнение прямой, а $(x+8)^2 + y^2 - 1$ и $x^2 + y^2 - 4$ — уравнения окружностей



Изобразим на окружностях K_1 и K_2 точки O_1 и O_2 соответственно. Тогда вписанные в K_2 углы $\angle O_2 A O_1$ и $\angle O_2 B O_1$ равны, так как они опираются на одну дугу. Т.к. $\angle O_2 A O_1 = \angle O_2 B O_1$, то $\angle O_2 A O_1 = \angle O_2 B O_1$, следовательно, $\angle O_2 A O_1 = \angle O_2 B O_1$.

2) Заметим, что если прямая не касается ни одной из окружностей, то решений 0. Если она проходит через какую-либо из окружностей, то решений ∞ , т.к. подходит бесконечно много точек на окружности. Т.е. прямая касается окружностей в двух точках и тогда общее касательная.

Общих касательных 2.

$$\begin{aligned} & O_1 A K_1 O_1 \sim A K_2 O_2 \\ \Rightarrow & \frac{O_1 A}{O_2 A} = \frac{K_1 O_1}{K_2 O_2} \end{aligned}$$

$$\text{Мы знаем, что } O_1 O_2 = 8, \Rightarrow \frac{O_1 A}{O_2 A} = \frac{8}{3}$$

$$3) a = \pm \frac{1}{g} \alpha, \text{ т.к. } \alpha \text{ — угол наклона прямой}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \text{ из } \Delta A K_1 O_1,$$

$$\Rightarrow a = \pm \frac{1}{g} \left(\arcsin \left(\frac{3}{8} \right) \right)$$

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{g} \left(\arcsin \left(\frac{3}{8} \right) \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

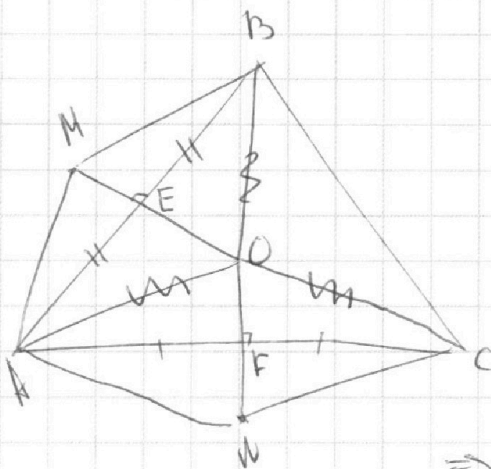
5
☐

6
☐

7
☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Заметим, что O - центр
описанной окружности, то
точки пересечения медиан

2) Т.к. M, N середины дуг, то

$$MB = MA \text{ и } NA = NC$$

$\Rightarrow$ высота, опущенная из них

падает на медиану и является ее продолжением

3) Заметим, что $ON = OC = OB = OM = OA$

4) $ME = 4.5$ $NF = 2$

5) Т.к. $ON = OM$, то $OF + NF = ME + EO$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



⑥ $y = ax + b$

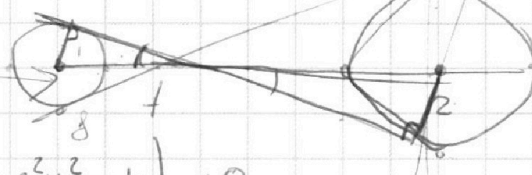
т.е. ортогонально, то т.е. в одну

$y = ax$
 $b = 0 \quad y = 0$

иначе, т.е. в одну

при т.е. $a = ?$

$b = 0$
или услож?



$$((x+8)^2 + a^2(x^2 - 1))(x^2 + a^2x^2 - 4) \leq 0$$

решив $g(x) \Rightarrow$ касательная

$a = \tan \alpha = \tan(\arcsin(\frac{3}{8}))$

④ $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$(x-1)(-1.5)$

$1.5 \times 3 - 1.5 \cdot 5 + 3 = 1.5$

$(x-1)(2x-3)$

$x^2 + x - \frac{1}{2} \quad a=1 \quad b=1 \quad c=\frac{1}{2}$
 $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$

$(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$

$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = -7x + 2$

$-7x + 2 = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$

$x = \frac{2}{7} ?$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$

$2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{5 \cdot 2}{7} + 3 = \frac{8 - 10 + 3 \cdot 49}{49} = \frac{8 + 28 + 1 \cdot 49}{49}$

$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 0$
 $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$

↑ но у нас нет решения, $\emptyset$
ура

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

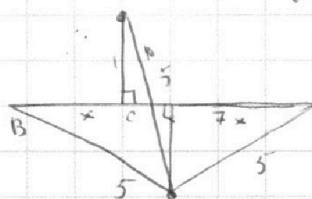
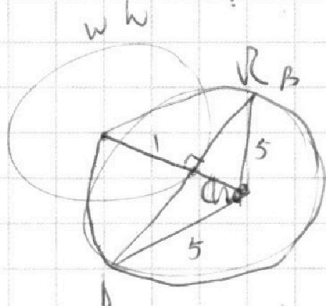
6)

прямые, где окружности

$$ab: 2 \quad 14 \quad 7$$

$$bc: 2 \quad 17 \quad 17$$

$$ac: 2 \quad 20 \quad 37$$



$$\begin{aligned} & \begin{array}{r} 25 \\ \times 17 \\ \hline 175 \\ - 1617 \\ \hline 14 \end{array} \\ & \begin{array}{r} 159 \\ \times 7 \\ \hline 1113 \end{array} \\ & \begin{array}{r} 20+17+14 \\ 2 \quad 7 \quad -3 \end{array} \\ & \begin{array}{r} 10+17+37 \\ 20 \quad 34 \quad -21 \\ \quad 17 \quad -3 \cdot 7 \\ \quad \hline 41 \end{array} \\ & \begin{array}{r} 21 \quad 32 \quad 42 \quad 32 \end{array} \\ & \begin{array}{r} 21 \quad 32 \quad 42 \quad 32 \end{array} \end{aligned}$$

1 2 3 4 5 6 7
V V V V V

$a+b$ $4ab$

$a+b$

$a=1 \quad b=2$

$a=1 \quad b=3$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 37 \\ \hline 54 \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ -32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 53 \\ -7 \end{array}$$

$$7x^2 + 32x - 7 \cdot 25 + 16 = 0$$

$$7x^2 + 32x - 159 = 0$$

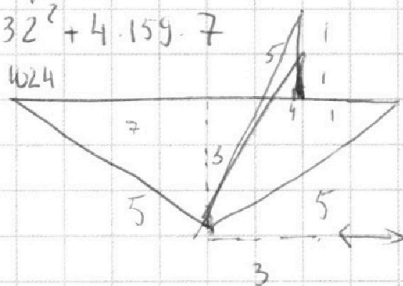
$$x=3$$

$$21$$

$$32 \quad 4=7$$

$$\begin{array}{c} b=32 \\ c=-159 \end{array}$$

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac = \\ &= 32^2 + 4 \cdot 159 \cdot 7 \end{aligned}$$



$$(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = (a+b; -4ab) =$$

$$a \cdot x + y \geq 10$$

$$y + z \geq 17$$

$$2 \cdot x \geq 37$$

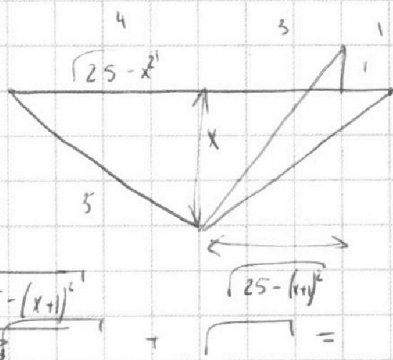
$$\Rightarrow x + y + z \geq 32$$

$$z \geq 22 \quad z=22$$

$$27$$

$$\begin{aligned} x &= 10 \\ \frac{25-x^2}{16} &= \frac{25-(x+1)^2}{9} \quad z=17 \\ 9 \cdot 25 - 9x^2 &= 16 \cdot 25 - 16x^2 - 32x \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{25-x^2}}{4} = \frac{\sqrt{25-(x+1)^2}}{3} + \sqrt{25-(x+1)^2}$$





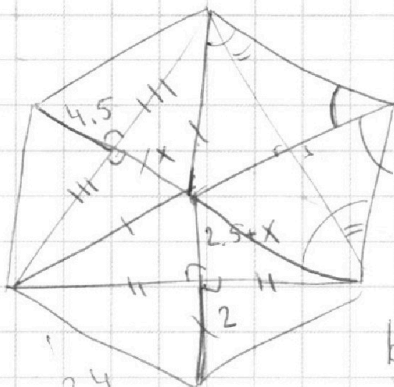
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 12 \\ + 15 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ + 15 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ + 10 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 10 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 7 \\ \hline 26 \end{array}$$

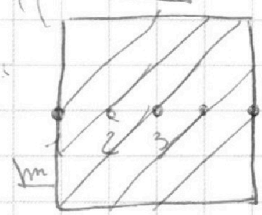
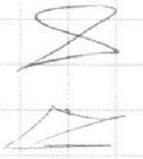
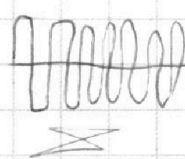
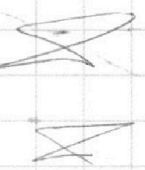
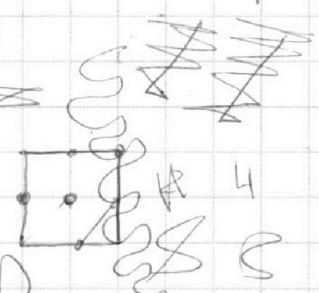
$$\begin{array}{r} 2^{14} \\ 2^{18} \\ 2^{20} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \sqrt{31} \end{array} abc : 7$$

$$\Rightarrow abc = 26$$

$$14$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 10 \cdot 37 \\ \hline 37 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline (1+15) \cdot 9 \\ + 30 \end{array}$$

$$10 \cdot 13 + 9 \cdot 12$$

$$\begin{array}{r} 14 \cdot 7 \\ \hline 2 \end{array} \cdot 2 + 26$$

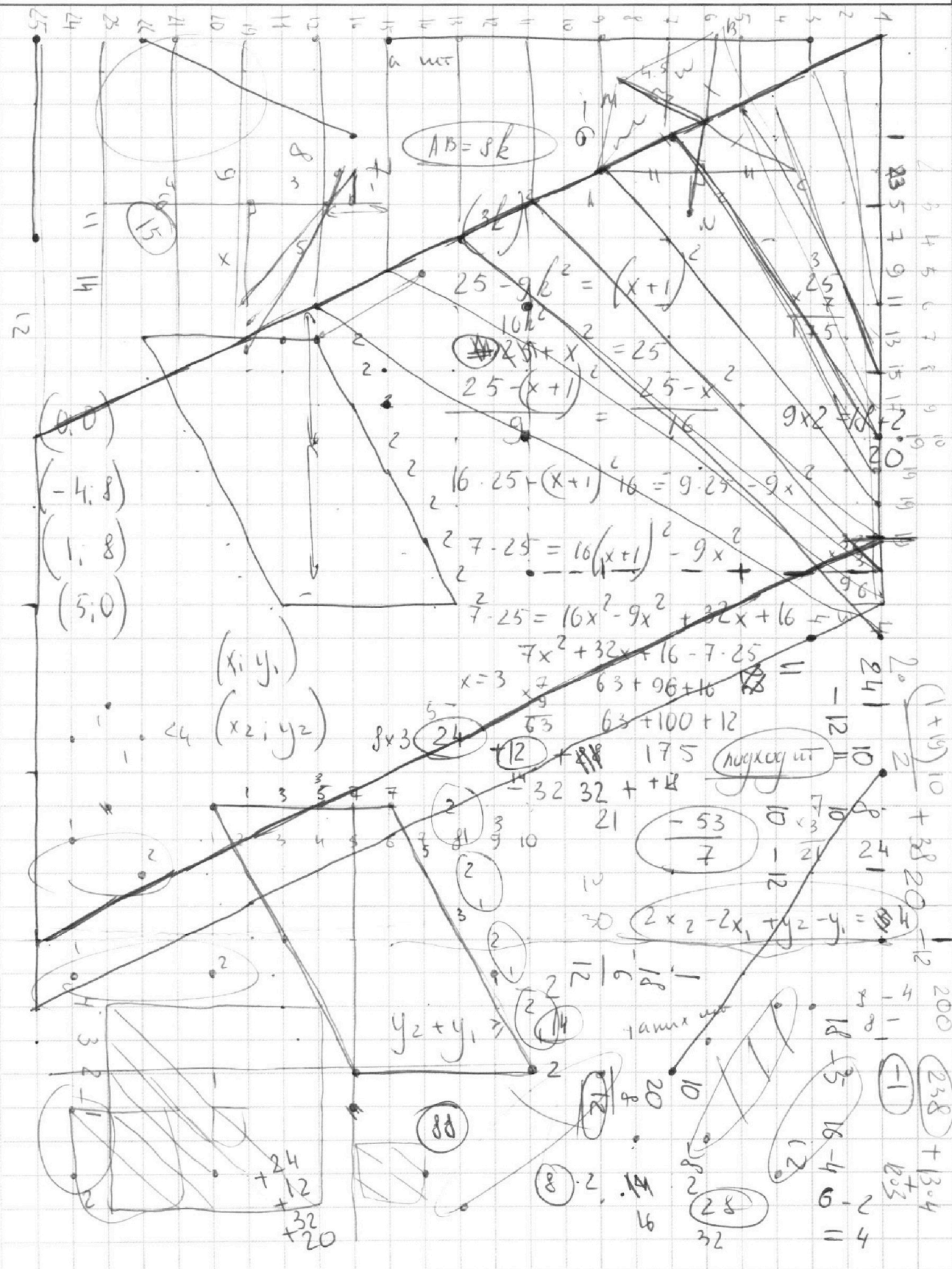
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





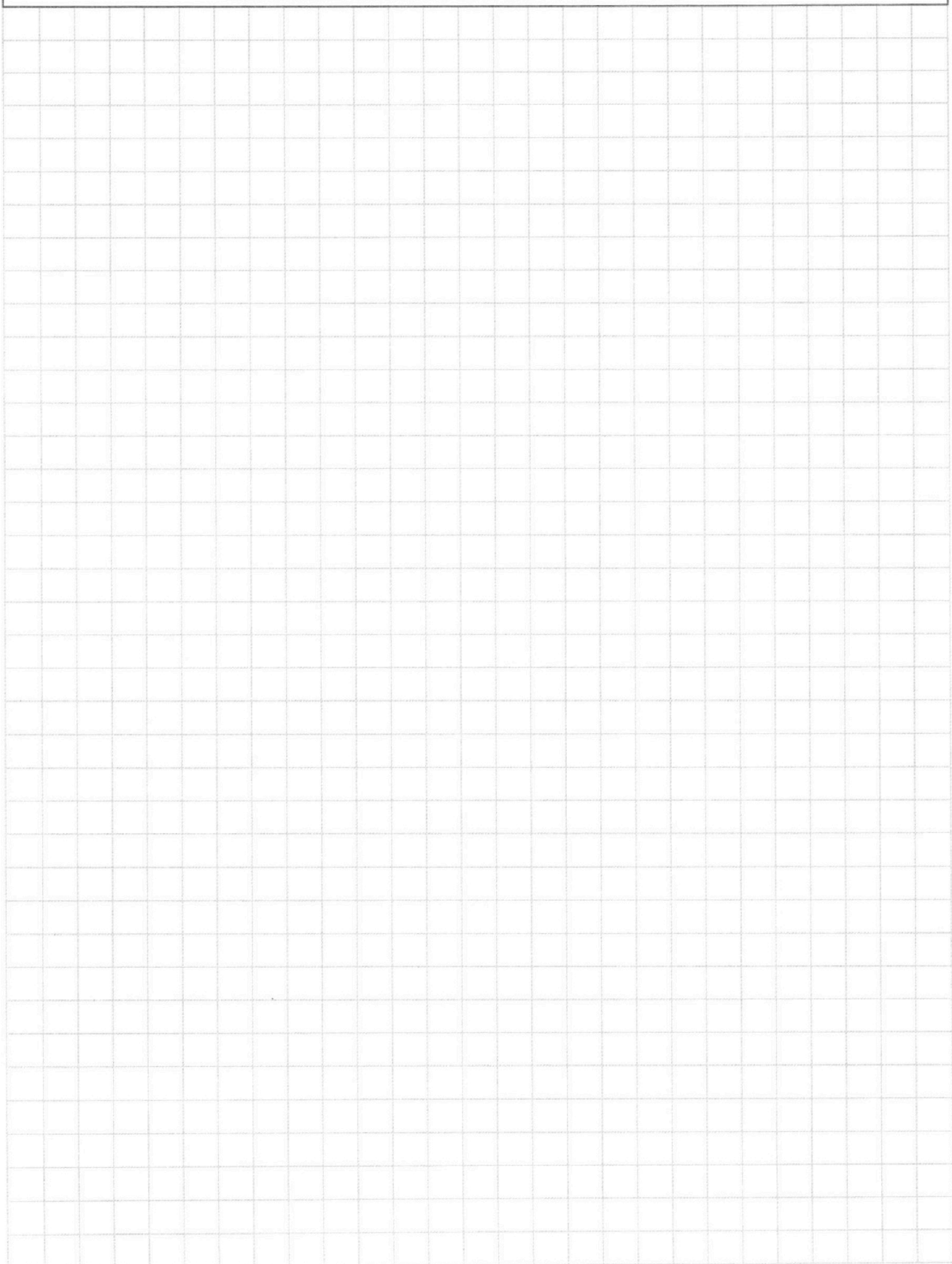
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☐

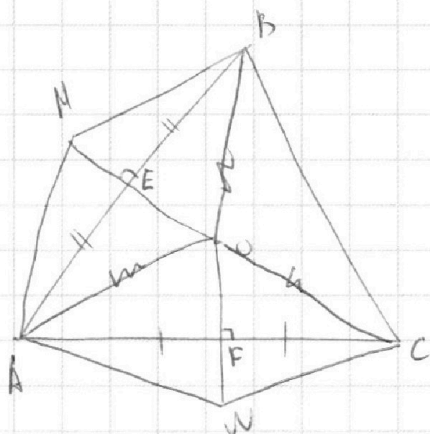
5 ☐

6 ☒

7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Заметим, что O -

центр тяжести треугольника,
это точка пересечения медиан

2) Т.к. M и N середины сторон, то

$$MB = MA \text{ и } NA = NC.$$

$\Rightarrow$ высоты, опущенные из них

падают на одну и ту же прямую - продолжение EF .

3) Заметим, что $ON = OC = OB = OM = OA$

4) $ME = 4.5$, $NF = 2$.