



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c — натуральные

$$\begin{cases} ab: 2^{14} 7^{10} \\ bc: 2^{17} 7^{17} \\ ac: 2^{20} 7^{37} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab: 2^{14} \\ bc: 2^{17} \\ ac: 2^{20} \end{cases} \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac: 2^{51} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2: 2^{51} \Rightarrow abc: 2^{26}, \text{ где } a, b, c - \text{натур.}$$

Поскольку $ac: 7^{37}$ и b — натуральное, то $abc: 7^{37}$

$$\text{Значит } \begin{cases} abc: 2^{26} \\ abc: 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc: 2^{26} 7^{37}$$

$$\text{Получим } abc_{\min} = 2^{26} 7^{37}$$

$$\text{Пример: } a = 7^{20} \cdot 2^9, b = 2^6, c = 7^{17} \cdot 2^{11}$$

$$ab = 7^{20} \cdot 2^{15} \text{ и } 2^{15} 7^{20} : 2^{14} 7^{10}$$

$$bc = 7^{17} \cdot 2^{17} \text{ и } 2^{17} 7^{17} : 2^{17} 7^{17}$$

$$ac = 7^{37} \cdot 2^{20} \text{ и } 2^{20} 7^{37} : 2^{20} 7^{37}$$

$$abc = 2^{26} 7^{37}$$

Значит пример верен и $abc_{\min} = 2^{26} 7^{37}$

$$\text{Ответ: } abc_{\min} = 2^{26} 7^{37}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Раз $\frac{a}{b}$ — несократимая дроби, то $(a; b) = 1$

Если мы можем сократить числитель и знаменатель
на m значит $\begin{cases} a+b : m \\ a^2 - 6ab + b^2 : m \end{cases}$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab$$

Если $a+b : m \Rightarrow (a+b)^2 : m$, тогда $8ab : m$

Если $(a; m) \neq 1$, то пусть $(a; m) = k$, где $k > 1$

Тогда раз $a : k$ и $m : k$ и $a+b : m \Rightarrow a+b : k \Rightarrow b : k$,
значит $(a; b) = k$ или больше, а у нас $(a; b) = 1$ противоречие
значит $(a; m) = 1$

Аналогичными рассуждениями получим $(b; m) = 1$, тогда
 $(ab; m) = 1$, а раз $8ab : m$, то $m_{\max} = 8$

Пример для $m = 8$, $a = 1$, $b = 7$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{1+7}{1 - 42 + 49} = \frac{8}{8} = 1$$

Ответ: $m_{\max} = 8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = \\ & = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = 2 - 7x \end{aligned}$$

$$\text{Значит } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

Заметим, что если хотя бы одно из подкоренных чисел больше 1, то второе не отриц. значит их сумма больше одного.

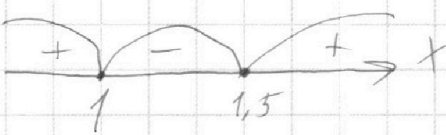
$$\text{Тогда } \begin{cases} 0 \leq 2x^2 - 5x + 3 \leq 1 \\ 0 \leq 2x^2 + 2x + 1 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} 1) 0 \leq 2x^2 - 5x + 3 \\ 2) 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \\ 3) 0 \leq 2x^2 + 2x + 1 \\ 4) 2x^2 + 2x \leq 0 \end{cases}$$

1) $D = 25 - 24 = 1$

$x_1 = \frac{5 \pm 1}{4} = 1,5$
 $x_2 = \frac{5 - 1}{4} = 1$

$x \in (-\infty; 1] \cup [1,5; +\infty)$



2) $D = 25 - 16 = 9$

Продолжение на следующей странице



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

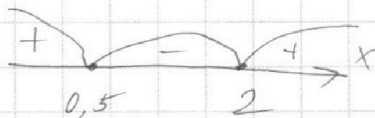
7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = 0,5$$



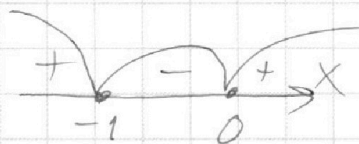
$$x \in [0,5; 2]$$

3) $D = 4 - 8 = -4 < 0$, это парабола ветвями вверх,
значит при любых x , выражение положительное

4) $D = 4$

$$x_1 = \frac{-2+2}{4} = 0$$

$$x_2 = \frac{-2-2}{4} = -1$$



$$x \in [-1; 0]$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [1,5; +\infty) \\ x \in [0,5; 2] \\ x \in [-1; 0] \end{cases}$$

||

$$x \in \emptyset$$

$$\text{Ответ: } x \in \emptyset$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

☐☐☐☐☒☐☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Давайте зафиксируем сумму $2x_2 + y_2$ и обозначим за z .

Тогда.

$y_2 = z - 2x_2$, это прямая $y = -2x$, смещённая на z вверх.

$y_1 = z - 12 - 2x_1$, это прямая $y = -2x$, смещённая

на $z - 12$ вверх.

Заметим, что для любого знач. из пред. зав. y_1 от x_1 , и любого y_2 от x_2 , для одного z ^{уравн. выполн.} Напишем уравнение для прямой QR

$$y = kx + b \quad Q(3; 24); R(15; 0)$$

$$\begin{cases} 24 = 3k + b \\ 0 = 15k + b \end{cases} \Rightarrow 24 = -12k \Rightarrow k = -2$$

$$24 = -6 + b \Rightarrow b = 30$$

Тогда прямая QR параллельна предш. зависимости y_2 от x_2 и y_1 от x_1 .

Заметим, что $z_{\max}$ достигается

когда прямая зависимости y_2 от x_2 это QR.

продолжение на следующей странице



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $z_{\max} = 6 = 30$

Раз $PQRO$ параллелограмм, то $PO \parallel OR$, тогда

заметим что $z_{\min}$ достигается когда

прямая зависимости y_1 от x_1 это PO ,

тогда $z_{\min} - 12 = 0 \Rightarrow z_{\min} = 12$

Заметим что если z - чётное, то x_2 может
принимать 13 вариантов целых в любой случай x_1 , то

13.

Если z - нечётное, то x_2 может

принимать лишь 12 вариантов целых x_1 , то ~~13~~

Чётных z всего 10, а нечётных z всего 9.

Тогда всего вариантов $12^2 \cdot 9 + 13^2 \cdot 10$

Ответ: $12^2 \cdot 9 + 13^2 \cdot 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 a, b, c - к-м. 31
 $\{ \begin{matrix} ab: 2^{14} 7^{10} \\ bc: 2^{17} 7^{17} \\ ac: 2^{20} 7^{37} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^2 b^2 c^2: 2^{51} 7^{54} \\ abc: 2^{26} 7^{37} \\ abc: 7^{37} \end{matrix} \Rightarrow abc_{\min} = 2^{26} 7^{37}$
 Типовая: $c = 7^{17} 2^{19} = 7^{20} \cdot 2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 6 = 90$
 $b = 2^8$
 $9 - 90 + 15$
 $8^2 - 8$

$$\text{12} \quad \frac{a}{b} - \text{некор.} \quad \begin{matrix} a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} \end{matrix} \quad \frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 3ab} \quad \begin{matrix} (a;b)=1 \\ a+b=m \\ (a+b)^2=m \\ 3ab:m \\ m_{\dots}=8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1, 7 \\ 8 \\ 64-87 \end{matrix}$$

$N/3$

$R_u = 1$
 $r_n = 5$

$B \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$

~~$x \in [-\infty; +\infty] \cup [1, 5]$~~

$x \in (-\infty; 1) \cup [1, 5; +\infty)$

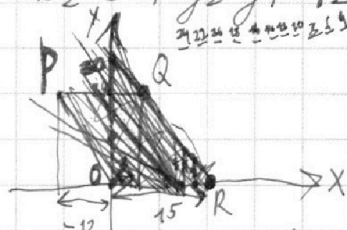
$x \in [-1; 0]$

$$\begin{aligned} \text{N4 } \sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} &= 2-7x & \text{B } 13 \\ & & \begin{array}{r} 8 \\ \hline 16^2 - 3 \cdot 13 \cdot 8 \\ 16 \cdot 20 = 4 \\ 32 \quad \frac{-2 \pm 2}{4} \end{array} \\ \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} &= 1 & \\ 1 \geq 2x^2-5x+3 \geq 0 & \text{ ~~13~~ } & D = 25 - 16 = 9 \\ 1 \geq 2x^2+2x+1 \geq 0 & \text{ ~~14~~ } & \frac{5 \pm 3}{4} = 0,5 \text{ } 2 \end{aligned}$$

15 $x \in \emptyset$

$O(0;0)$	$Q(3;24)$
$P(-12;24)$	$R(15;0)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \quad \begin{matrix} (1) - (2) \\ (3) - (4) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2x_2 + y_2 = 12 \\ \Delta x \leq 15 \\ \Delta y \leq 24 \end{matrix} \quad \Delta g = 12 - 2\Delta x$$



$x_2 y_2 = \text{const}$
 $y_1 = \text{const} - 2x_1 - 12$

$(d; m) = 1$
 $(b; m) = 1$
 $y = ax + 106$
 $(x+8)^2 + (ax+106)^2 - 1)(x^2 + (a+106)x + 106^2 - 1) < 0$
 ma cos - 12
 $\vee$
 $\wedge 0$

$$\begin{aligned} 30 &= \text{constant } y = kx + b \\ 29 &= 3k + b \\ 0 &= 15k + b \end{aligned}$$

$$k = -2 \quad b = 30 \quad 30 \geq \text{const} - 12 \geq 0$$

30 → 18
28 → 16
26 → 14
24 → 12
22 → 10
20 → 8
18 → 6
16 → 4
14 → 2
12 → 0

$$18 \geq \text{const} - 12 \geq 0$$

$$12 \cdot 10 = 1440$$

$$2x_2 + y_2 = \text{const}$$

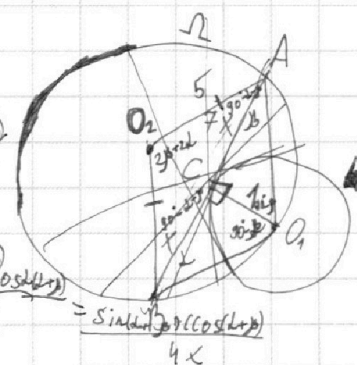
$$y_2 = 2x_2 + \text{const}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 \geq 4 \\ & (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ & x^2 + y^2 \leq 4 \\ & (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ & x^2 + y^2 \geq 4 \end{aligned}$$

$$\frac{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta}{1} = \frac{\sin^2(90^\circ - \beta) + \cos^2 \beta}{1} = \frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{1} = \frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{1} = 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta =$$

$$= \cancel{\sin \alpha} (1 + 4g \times 2) \sin^2 \beta = \cancel{\cos \alpha} 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

