МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

a, b, c — натуральные

$$\begin{cases} ab \vdots 2^{14}7^{10} \\ bc \vdots 2^{17}7^{17} \\ ac \vdots 2^{20}7^{37} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \vdots 2^{14} \\ bc \vdots 2^{17} \\ ac \vdots 2^{20} \end{cases} \Rightarrow ab\cdot bc\cdot ac \vdots 2^{51} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{51} \Rightarrow abc \vdots 2^{26}$, ведь a, b, c — нат.

Раз $ac \vdots 7^{37}$ и b — натуральное, то $abc \vdots 7^{37}$

Значит $\begin{cases} abc \vdots 2^{26} \\ abc \vdots 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc \vdots 2^{26}7^{37}$

Тогда $abc_{min} = 2^{26}7^{37}$

Пример: $a = 7^{20}\cdot 2^9$, $b = 2^6$, $c = 7^{17}\cdot 2^{11}$

$ab = 7^{20}\cdot 2^{15}\ \cancel{\vdots\ 2^{14}7^{10}}$ и $2^{15}7^{20} \vdots 2^{14}7^{10}$

$bc = 7^{17}2^{17}\ \cancel{\vdots\ 2^{17}7^{17}}$ и $2^{17}7^{17} \vdots 2^{17}7^{17}$

$ac = 7^{37}2^{20}\ \cancel{\vdots\ 2^{20}7^{37}}$ и $2^{20}7^{37} \vdots 2^{20}7^{37}$

$abc = 2^{26}7^{37}\ \cancel{\vdots\ 2^{26}7^{37}}$

Значит пример верен и $abc_{min} = 2^{26}7^{37}$

Ответ: $abc_{min} = 2^{26}7^{37}$

Раз $\frac{a}{b}$ – несократимая дробь, то $(a;b)=1$

Если мы можем сократить числитель и знаменатель

на m значит $\begin{cases} a+b \vdots m \\ a^2-6ab+b^2 \vdots m \end{cases}$

$a^2-6ab+b^2=(a+b)^2-8ab$

Если $a+b \vdots m \Rightarrow (a+b)^2 \vdots m$, тогда $8ab \vdots m$

Если $(a;m)\neq 1$, то пусть $(a;m)=k$, где $k>1$

Тогда раз $a \vdots k$ и $m \vdots k$ и $a+b \vdots m \Rightarrow a+b \vdots k \Rightarrow b \vdots k$,

значит $(a;b)=k$ или больше, а у нас $(a;b)=1$ противоречие

значит $(a;m)=1$

Аналогичными рассуждениями получим $(b;m)=1$, тогда

$(ab;m)=1$, а раз $8ab \vdots m$, то $m_{max}=8$

Пример для $m=8$, $a=1$, $b=7$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{1+7}{1-42+49}=\frac{8}{8}=\frac{1}{1}=1$

Ответ: $m_{max}=8$

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

$\left(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)=$

$=2x^2-5x+3-2x^2-2x-1=2-7x$

Значит $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

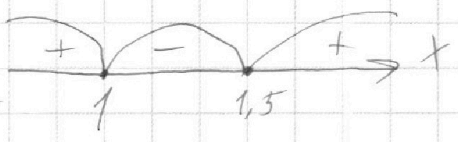
Заметим что если хоть одно из подкоренных чисел больше 1, то второе не отриц. значит их сумма больше одного.

Тогда $\begin{cases} 0 \le 2x^2-5x+3 \le 1 \\ 0 \le 2x^2+2x+1 \le 1 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} 1)\ 0 \le 2x^2-5x+3 \\ 2)\ 2x^2-5x+2 \le 0 \\ 3)\ 0 \le 2x^2+2x+1 \\ 4)\ 2x^2+2x \le 0 \end{cases}$

1) $D=25-24=1$



$x_1=\frac{5+1}{4}=1,5$

$x_2=\frac{5-1}{4}=1$

$x\in(-\infty;1]\cup[1,5;+\infty)$

2) $D=25-16=9$

Продолжение на следующей странице

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

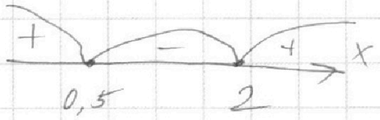
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$

$x_2 = \frac{5-3}{4} = 0,5$



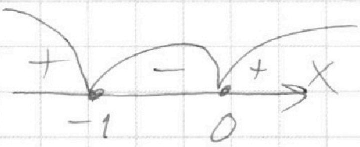
$x \in [0,5; 2]$

3) $D = 4 - 8 = -4 < 0$, это парабола ветвями вверх, значит при любом x, выражение положительное

4) $D = 4$

$x_1 = \frac{-2+2}{4} = 0$

$x_2 = \frac{-2-2}{4} = -1$



$x \in [-1; 0]$

Тогда $\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [1,5; +\infty) \\ x \in [0,5; 2] \\ x \in [-1; 0] \end{cases}$

$\Downarrow$

$x \in \varnothing$

Ответ: $x \in \varnothing$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

Давайте зафиксируем сумму $2x_2 + y_2$ и обозначим за z.

Тогда.

$y_2 = z - 2x_2$, ~~это~~ это прямая $y = -2x$, смещённая на z вверх.

$y_1 = z - 12 - 2x_1$, это прямая $y = -2x$, смещённая на $z - 12$ вверх

Заметим что для любого знач. из прям. зав. y_1 от x_1 и любого y_2 от x_2, для одного z условие урав. выполн.

Напишем уравнение для прямой QR

$y = kx + b \qquad Q(3;24);\ R(15;0)$

$$\begin{cases} 24 = 3k + b \\ 0 = 15k + b \end{cases} - \Rightarrow 24 = -12k \Rightarrow k = -2$$

$24 = -6 + b \Rightarrow b = 30$

Тогда прямая QR паралельна прямым зависимости y_2 от x_2 и y_1 от x_1.

Заметим что z_{max} достигается когда прямая зависимости y_2 от x_2 это QR.

продолжение на следующей странице

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Тогда $z_{max} = b = 30$

Раз $PQRO$ параллелограмм, то $PO \parallel QR$, тогда заметим что z_{min} достигается когда прямая зависимости y_1 от x_1 это PO, тогда $z_{min} - 12 = 0 \Rightarrow z_{min} = 12$

Заметим что если z - чётное, то x_2 может принимат 13 вариантов целых в любом случае и x_1 тоже 13.

Если z - нечётное, то x_2 может принимать лишь 12 вариантов целых и x_1 тоже 12.

Чётных z всего 10, а нечётных z всего 9.

Тогда всего вариантов $12^2 \cdot 9 + 13^2 \cdot 10$

Ответ: $12^2 \cdot 9 + 13^2 \cdot 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 a, b, c - нат.

$$\begin{cases} ab : 2^{14}7^{10} \\ bc : 2^{17}7^{17} \\ ac : 2^{20}7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc : 2^{26} \Rightarrow abc_{min} = 2^{26}7^{37}$$

$abc : 7^{37}$

$a^2b^2c^2 : 2^{51}7^{64}$

Пример: $c = 7^{27} \cdot 2^{11}$, $a = 7^{20} \cdot 2^{9}$, $b = 2^{5}$

$35 \quad 15 \cdot 6 = 90$

8

$9 - 90 + 15$

№2 $\frac{a}{b}$ - несок. $a \in N$, $b \in N$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

$(a;b) = 1$ $\quad a+b \vdots m$ $\quad (a+b)^2 \vdots m$ $\quad 8ab \vdots m$ $\quad 8^2 - 8$

$m_{max} = 8$ $\quad 1, 7$ $\quad \cancel{8}$ $\quad \cancel{64 - 87}$

№3 $R_\omega = 1$ $\quad R_\Omega = 5$

$B \quad [\frac{1}{2}; 2]$

$x \in (-\infty; 1] \cup [1,5; +\infty)$

$x \in [-1; 0]$

$\Downarrow$

$x \in \varnothing$

№4 $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$\cancel{2x^2 - 5x}$ $2 - 7x$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

$1 \geq 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

$1 \geq 2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 0 \geq 2x^2 - 5x + 2 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 0 \geq 2x^2 + 2x \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$B \quad 13$

8

$16^2 - 3 \cdot 13 \cdot 8$

$16 \cdot 2 \quad D = 4$

$32 \quad \frac{-2 \pm 2}{4}$

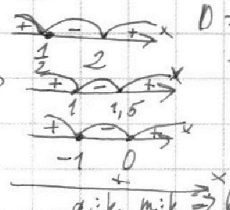
$D = 25 - 16 = 9$

$\frac{5 \pm 3}{4} = 0,5 \quad 2$

$D = 25 - 24 = 1$

$\frac{5 \pm 1}{4} \quad 1,5 \quad 1$

$D = 4 - 8 < 0$



$a : k \quad m : k \Rightarrow b : k$

Если $(a; m) \neq 1$

№5 $O(0;0)$ $\quad Q(3;24)$ $\quad P(-12;24)$ $\quad R(15;0)$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$(15;0)$ $\quad 3;2$ $\quad 3;0$

$2\Delta x + \Delta y = 12$ $\quad \Delta y = 12 - 2\Delta x$

$\Delta x \leq 15$

$\Delta y \leq 24$

$(3;6) \to (3;0)$

$(2;2)$

$(1;4)$

$(0;6)$

$(-1;8)$

$(-2;10)$

$x_2 y_2$ - const

$y_1 = const - 2x_1 - 12$

Это прямая $y = -2x$ смещ. на $const - 12$

$30 = const$ max $\quad y = kx + b$

$24 = 3k + b$

$0 = 15k + b$

$k = -2 \quad b = 30$

12 целых пар. 0 до 30 $\boxed{16}$

$30 \geq const - 12 \geq 0$

$18 \geq const - 12 \geq 0$

$12^2 \cdot 10 = 1440$

$2x_2 + y_2 = const$

$y_2 = -2x_2 + const$

$30 \to 18$

$28 \to 16$

$26 \to 14$

$24 \to 12$

$22 \to 10$

$20 \to 8$

$18 \to 6$

$16 \to 4$

$14 \to 2$

$12 \to 0$

$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \end{cases}$

№6 $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

2 решения

$(a; m) = 1$

$(b; m) = 1$ $\quad y = ax + 10b$

$((x+8)^2 + (ax + 10b)^2 - 1)(x^2 + (ax + 10b)^2 - 4) \leq 0$

≥ 0

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x^2 + 64 + 16x$

$68 + 16x \geq 1$

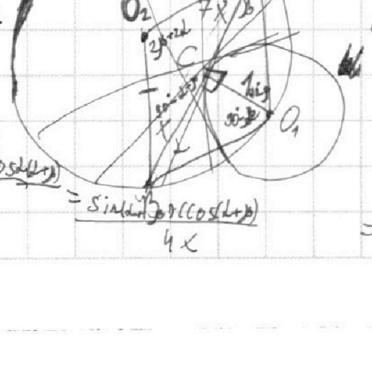
$16x \geq -67$

$x \geq -\frac{67}{16}$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$68 + 16x \leq 1$

$x \leq -\frac{67}{16}$



$$\frac{\sin(90° - \alpha - \beta)}{5} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{5}$$

5

$$\frac{\sin 2(\beta + \alpha)}{8x} = \frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{8x} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}{4x}$$

$$\cos^2\beta + \frac{\sin\beta}{1}^2 = \frac{\sin^2(90° - \beta) + \cos^2\beta(49x^2 + 1)}{7x} \quad 49x^2$$

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\sin(90° - \alpha)}{x}$$

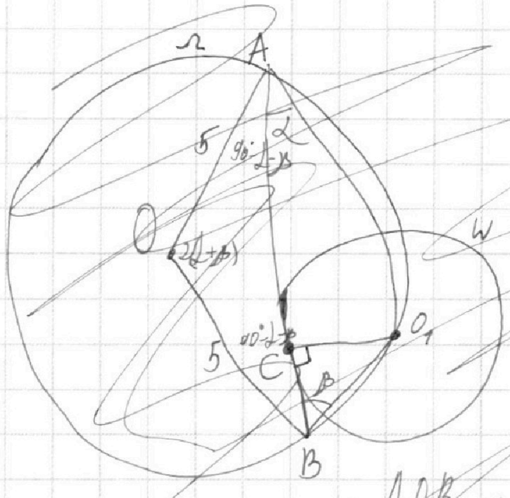
$\sin(\alpha + \beta) = \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha =$

$(1 + 49x^2)\sin^2\beta = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано $R_\Omega = 5$, $R_\omega = 1$, $AC:CB = 7:$

Найти: AB

Решение:

~~Обозначим~~ Обозначим $\angle BAO_1$ за α, а $\angle ABO_1$ за β

Тогда ~~Обозначим~~ $\angle AOB$ за $2(\alpha+\beta)$

$AO = OB = R_\Omega = 5$.

$\triangle AOB$ равнобедренный (по определению)

$\angle OAB = \angle ABO$ (по свойству равнобедренного треугольника)

$\angle OAB + \angle ABO + \angle AOB = 180^\circ$ (по сумме углов в треугольнике)

Тогда $\angle OAB = \angle ABO = 90^\circ - \alpha - \beta$

По теореме синусов: в $\triangle OAB$ $\frac{AB}{\sin 2(\alpha+\beta)} = \frac{OB}{\sin(90^\circ-\alpha-\beta)} = \frac{5}{\sin(90-\alpha-\beta)} = \frac{5}{\cos(\alpha+\beta)}$

$\sin 2(\alpha+\beta) = 2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)$

$AB = \frac{2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)5}{\cos(\alpha+\beta)} = 10\sin(\alpha+\beta)$

~~По теореме синусов:~~ $\cancel{\frac{\sin\beta}{O_1C}} =$

$O_1C \perp AB$ (по свойству касательной)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!