



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c$  — натуральные

$$\begin{cases} ab: 2^{14} 7^{10} \\ bc: 2^{17} 7^{17} \\ ac: 2^{20} 7^{37} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab: 2^{14} \\ bc: 2^{17} \\ ac: 2^{20} \end{cases} \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac: 2^{51} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2: 2^{51} \Rightarrow abc: 2^{26}, \text{ где } a, b, c \text{ — нат.}$$

Поскольку  $ac: 7^{37}$  и  $b$  — натуральное, то  $abc: 7^{37}$

$$\text{Значит } \begin{cases} abc: 2^{26} \\ abc: 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc: 2^{26} 7^{37}$$

$$\text{Тогда } abc_{\min} = 2^{26} 7^{37}$$

$$\text{Пример: } a = 7^{20} \cdot 2^9, b = 2^6, c = 7^{17} \cdot 2^{11}$$

$$ab = 7^{20} \cdot 2^{15} \text{ и } 2^{15} 7^{20} : 2^{14} 7^{10}$$

$$bc = 7^{17} \cdot 2^{17} \text{ и } 2^{17} 7^{17} : 2^{17} 7^{17}$$

$$ac = 7^{37} \cdot 2^{20} \text{ и } 2^{20} 7^{37} : 2^{20} 7^{37}$$

$$abc = 2^{26} 7^{37}$$

Значит пример верен и  $abc_{\min} = 2^{26} 7^{37}$

$$\text{Ответ: } abc_{\min} = 2^{26} 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Раз  $\frac{a}{b}$  — несократимая дробь, то  $(a; b) = 1$

Если мы можем сократить числитель и знаменатель на  $m$  знаем  $\begin{cases} a+b : m \\ a^2 - 6ab + b^2 : m \end{cases}$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b)^2 - 8ab$$

Если  $a+b : m \Rightarrow (a+b)^2 : m$ , тогда  $8ab : m$

Если  $(a; m) \neq 1$ , то пусть  $(a; m) = k$ , где  $k > 1$

Тогда раз  $a : k$  и  $m : k$  и  $a+b : m \Rightarrow a+b : k \Rightarrow b : k$ ,

значит  $(a; b) = k$  или больше, а у нас  $(a; b) = 1$  противоречие

значит  $(a; m) = 1$

Аналогичными рассуждениями получим  $(b; m) = 1$ , тогда

$(ab; m) = 1$ , а раз  $8ab : m$ , то  $m_{\max} = 8$

Пример для  $m = 8$ ,  $a = 1$ ,  $b = 7$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{1+7}{1 - 42 + 49} = \frac{8}{8} = \frac{1}{1} = 1$$

Ответ:  $m_{\max} = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right) =$$

$$= 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = 2 - 7x$$

Значит  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

Заметим что если хотя одно из подкоренных чисел больше 1, то второе не отриц. значит их сумма больше одного.

Тогда 
$$\begin{cases} 0 \leq 2x^2 - 5x + 3 \leq 1 \\ 0 \leq 2x^2 + 2x + 1 \leq 1 \end{cases}$$

⇓

$$\begin{cases} 1) 0 \leq 2x^2 - 5x + 3 \\ 2) 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \\ 3) 0 \leq 2x^2 + 2x + 1 \\ 4) 2x^2 + 2x \leq 0 \end{cases}$$

1)  $D = 25 - 24 = 1$

$x_1 = \frac{5+1}{4} = 1,5$   
 $x_2 = \frac{5-1}{4} = 1$   
 $x \in (-\infty; 1] \cup [1,5; +\infty)$

2)  $D = 25 - 16 = 9$

Продолжение на следующей странице

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

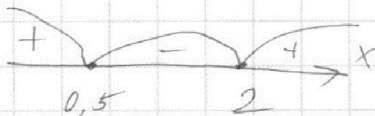
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = 0,5$$



$$x \in [0,5; 2]$$

3)  $D = 4 - 8 = -4 < 0$ , это парабола ветвями вверх, значит при любом  $x$ , выражение положительное

4)  $D = 4$

$$x_1 = \frac{-2+2}{4} = 0$$

$$x_2 = \frac{-2-2}{4} = -1$$



$$x \in [-1; 0]$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [1,5; +\infty) \\ x \in [0,5; 2] \\ x \in [-1; 0] \end{cases}$$

∩

$$x \in \emptyset$$

$$\text{Ответ: } x \in \emptyset$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

Давайте зафиксируем сумму  $2x_2 + y_2$  и обозначим за  $z$ .

Тогда.

$y_2 = z - 2x_2$ , это прямая  $y = -2x$ , смещённая на  $z$  вверх.

$y_1 = z - 12 - 2x_1$ , это прямая  $y = -2x$ , смещённая

на  $z - 12$  вверх.

Заметим, что для любого знач. из пред. зав.  $y_1$  от  $x_1$ , и любого  $y_2$  от  $x_2$ , для одного  $z$  найдем уравнение для прямой QR

уравнение

$$y = kx + b \quad Q(3; 24); R(15; 0)$$

$$\begin{cases} 24 = 3k + b \\ 0 = 15k + b \end{cases} \Rightarrow 24 = -12k \Rightarrow k = -2$$

$$24 = -6 + b \Rightarrow b = 30$$

Тогда прямая QR параллельна прямой зависимости  $y_2$  от  $x_2$  и  $y_1$  от  $x_1$ .

Заметим, что  $z_{\max}$  достигается

когда прямая зависимости  $y_2$  от  $x_2$  это QR.

продолжение на следующей странице

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда  $z_{\max} = 6 = 30$

Раз  $PQRO$  параллелограмм, то  $PO \parallel OR$ , тогда

заметим что  $z_{\min}$  достигается когда

прямая зависимости  $y_1$  от  $x_1$  это  $PO$ ,

тогда  $z_{\min} - 12 = 0 \Rightarrow z_{\min} = 12$

Заметим что если  $z$  - четное, то  $x_2$  может  
принимать 13 вариантов целых в любой случай  $x_1$ , тогда

13.

Если  $z$  - нечетное, то  $x_2$  может  
принимать лишь 12 вариантов целых и  $x_1$ , тогда  $12^2$

Четных  $z$  всего 10, а нечетных  $z$  всего 9.

Тогда всего вариантов  $12^2 \cdot 9 + 13^2 \cdot 10$

Ответ:  $12^2 \cdot 9 + 13^2 \cdot 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

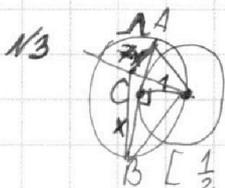


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1  $a, b, c$  - кет.  $3^4$   
 $ab: 2^{14} 7^{10}$   
 $bc: 2^{17} 7^{17}$   
 $ac: 2^{20} 7^{37}$   
 $a^2 b^2 c^2: 2^{51} 7^{51}$   
 $abc: 2^{26} 7^{37}$   
 $abc_{min} = 2^{26} 7^{37}$   
 Пример:  $c = 7^{17} \cdot 2^{21}, a = 7^{20} \cdot 2^{19}, b = 2^5$   
 $15 \cdot 6 = 90$   
 $9 - 90 + 15 = -76$

N2  $\frac{a}{b}$  - несок.  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$   
 $\frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 3ab}$   
 $(a;b) = 1$   
 $\frac{a+b}{(a+b)^2 - 3ab} = \frac{1}{(a+b) - 3 \frac{ab}{a+b}}$   
 $ab:m$   
 $m_{max} = 8$   
 $1, 7$

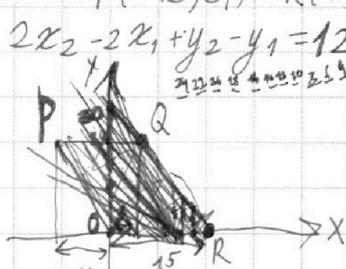


N3  $R_n = 1$   
 $R_n = 5$   
 N4  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$   
 $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$   
 $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$x \in (-\infty; 1] \cup [1.5; +\infty)$   
 $x \in [-1; 0]$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$   
 $1 \geq 2x^2 - 5x + 3 \geq 0$   
 $1 \geq 2x^2 + 2x + 1 \geq 0$   
 $0 \geq 2x^2 - 5x + 2$   
 $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$   
 $0 \geq 2x^2 + 2x$   
 $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$   
 $D = 25 - 16 = 9$   
 $\frac{5 \pm 3}{4} = 0.5, 2$   
 $D = 25 - 24 = 1$   
 $\frac{5 \pm 1}{4} = 1.5, 1$   
 $D = 4 - 8 < 0$

N5  $O(0;0)$   $Q(3;24)$   
 $P(-12;24)$   $R(15;0)$



$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$   
 $2x + 3y = 12$   
 $sg = 12 - 2ax$   
 $\Delta x \leq 15$   
 $\Delta y \leq 24$   
 $(y;0) \rightarrow (3;0)$   
 $(2;2)$   
 $(1;4)$   
 $(0;6)$   
 $(-1;8)$   
 $(-2;10)$   
 $x_2 y_2 = \text{const}$   
 $y_2 = \text{const} - 2x_1 - 12$

$(a; m) = 1$   
 $(b; m) = 1$   
 $y = ax + 10b$   
 $(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$   
 $(x^2 + (ax+10b)^2 - 1) \leq 0$

$30 = \text{const} + y = kx + b$   
 $24 = 3k + b$   
 $0 = 15k + b$

$k = -2, b = 30$

- $30 \rightarrow 18$
- $28 \rightarrow 16$
- $26 \rightarrow 14$
- $24 \rightarrow 12$
- $22 \rightarrow 10$
- $20 \rightarrow 8$
- $18 \rightarrow 6$
- $16 \rightarrow 4$
- $14 \rightarrow 2$
- $12 \rightarrow 0$

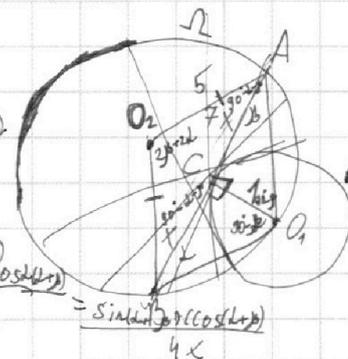
$12 \geq \text{const} - 12 \geq 0$   
 $18 \geq \text{const} - 12 \geq 0$   
 $10 = 1440$

$2x_2 + y_2 = \text{const}$   
 $y_2 = 2x_2 + \text{const}$

$(x+8)^2 + y^2 \geq 1$   
 $x^2 + y^2 \leq 4$   
 $(x+8)^2 + y^2 \leq 1$   
 $x^2 + y^2 \geq 4$   
 $68 + 16x \geq 1$   
 $16x \geq -67$   
 $x \geq -\frac{67}{16}$   
 $67 + 16x \leq 1$   
 $x \leq -\frac{67}{16}$

$\sin(90^\circ - \alpha - \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{5}$

$\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha)}{8x} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{8x} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{4x}$



$\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = \frac{\sin^2(90^\circ - \beta) + \cos^2 \beta}{7x \cdot 10x^2}$   
 $\frac{\sin \alpha}{1} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{x}$   
 $\sin(\alpha + \beta) = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha =$   
 $= \frac{1}{10x} (1 + 10x^2) \sin^2 \beta = \cos^2 \beta \cdot 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

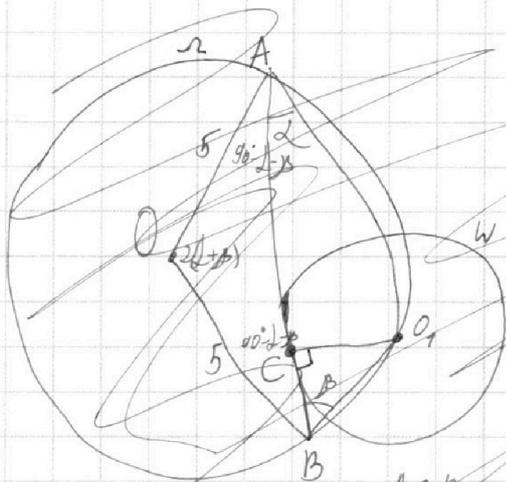
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано  $R_n = 5$ ,  $R_w = 1$ ,  $AC:CB = 7:1$

Найти:  $AB$

Решение:

Обозначим  $\angle BAO_1$  за  $\alpha$  ( $\angle ABO_1$  за  $\beta$ )  
 Тогда  $\angle AOB$  за  $2(\alpha + \beta)$

$$AO = OB = R_n = 5$$

$\triangle AOB$  равнобедренный (по определению)

$\angle OAB = \angle ABO$  (по свойству равнобедренного треугольника)

$\angle OAB + \angle ABO + \angle AOB = 180^\circ$  (по сумме углов в треугольнике)

Тогда  $\angle OAB = \angle ABO = 90^\circ - \alpha - \beta$

По теореме синусов:  $\frac{AB}{\sin 2(\alpha + \beta)} = \frac{OB}{\sin(90^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{5}{\sin(90^\circ - \alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)}$

$$\sin 2(\alpha + \beta) = 2 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta)$$

$$AB = \frac{2 \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) \cdot 5}{\cos(\alpha + \beta)} = 10 \sin(\alpha + \beta)$$

По теореме синусов:  $\sin \beta = \dots$

$O_1 C \perp AB$  (по свойству касательной)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

