МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\left(x_1;y_1\right)$ и $B\left(x_2;y_2\right)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x_1, x_2, x_3 – максимальные степени вхождения делителя 2 в a, b, c соотв-но; y_1, y_2, y_3 – так же ст. вхожд. 7 – a,b,c.

Тогда из $\begin{cases} ab \vdots (2^{14}\cdot 7^{10}) \\ bc \vdots (2^{17}\cdot 7^{17}) \\ ac \vdots (2^{20}\cdot 7^{37}) \end{cases}$ понимаем, что

$$\begin{cases} x_1+x_2 \geqslant 14 \text{①} \\ x_2+x_3 \geqslant 17 \text{②} \\ x_1+x_3 \geqslant 20 \text{③} \end{cases} \quad \text{②}-\text{①} \Rightarrow x_3 - x_1 \geqslant 3,$$

$$\overset{+}{\text{③}}$$

$$\Downarrow$$

$$2x_3 \geqslant 23;$$

$$x_3 \geqslant 11{,}5$$

Из ① $\Rightarrow \min(x_1+x_2)=14$; $\min x_3 = 12 \Rightarrow \min(x_1+x_2+x_3)=12+14=26$

$$\begin{cases} y_1+y_2 \geqslant 10 \text{①} \\ y_2+y_3 \geqslant 17 \text{②} \\ y_1+y_3 \geqslant 37 \text{③} \end{cases} \quad \text{②}-\text{①} \Rightarrow y_3 - y_1 \geqslant 7$$

$$\overset{+}{\text{③}}$$

$$\Downarrow$$

$$2y_3 \geqslant 44;$$

$$y_3 \geqslant 22$$

$\min(y_1+y_2)=10$; $\min(y_3)=22 \Rightarrow \min(y_1+y_2+y_3)=10+22=32$.

Итого мы нашли min степени вхождения для произведения делителей 2 и 7, чтобы минимизировать abc учтём, что не сущ. других простых делителей a, b, c, тогда $\min(abc) = 2^{26}\cdot 7^{32}$

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{32}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

1) $ab \vdots (2^{14} \cdot 7^{10})$ Пусть $a \vdots (2^{x_1} \cdot 7^{y_1}), b \vdots (2^{x_2} \cdot 7^{y_2}), c \vdots (2^{x_3} \cdot 7^{y_3})$,

2) $bc \vdots (2^{17} \cdot 7^{17})$ где $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3) $ac \vdots (2^{20} \cdot 7^{37})$ Тогда из 1) и 2) $\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_1 = 3 \\ y_3 - y_1 = 7 \end{cases}$

из 2) и 3) $\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ y_1 - y_2 = 20 \end{cases}$ из 1) и 3) $\Rightarrow \begin{cases} x_3 - x_2 = 6 \\ y_3 - y_2 = 27 \end{cases}$

Следствие основано на отличии степеней делителей различных

$3+5$

букв пар. $(a+b)^2$ $\dfrac{a+b}{(a+b)^2 ~~+4ab~~}$

ab

$14 + 3k \vdots 6$

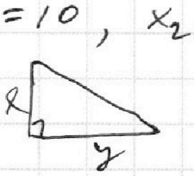
Система на „иксы“: $\begin{cases} x_3 - x_1 = 3 \Rightarrow x_3 = x_1 + 3 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ x_3 - x_2 = 6 \text{ -(подставим } x_3) \Rightarrow (x_1 + 3) - x_2 = 6 \end{cases}$

Получим $\left.\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 3 - x_2 = 6 \end{cases}\right)$ - равносильные $2^{14} \cdot 7 + 3 \cdot 5$

Система на „игрики“: $\left.\begin{cases} y_3 - y_1 = 7 \Rightarrow y_3 = y_1 + 7 \\ y_1 - y_2 = 20 \\ y_3 - y_2 = 27 \Rightarrow y_1 + 7 - y_2 = 27 \end{cases}\right)$ - равносильные

• Верно: $x_1 + x_2 = 14$, $y_1 + y_2 = 10$, $x_2 + x_3 = 17$, $y_2 + y_3 = 17$,

$x_1 + x_3 = 20$, $y_1 + y_3 = 37$



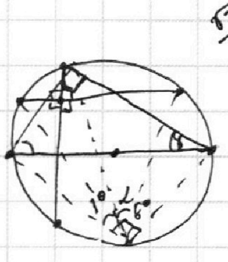
$\frac{1}{2} x y \underset{1}{\sin\alpha}$

~~$x_2 = 14 - x_2$~~ 1. $x_1 = 14 - x_2$ $x_3 = 17 - x_2 \Rightarrow 14 - x_2 + 17 - x_2 = 20$;

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 14 \\ x_2 + x_3 \geqslant 17 \\ x_1 + x_3 \geqslant 20 \end{cases}$ 5 12 8 12

$x_3 - x_1 \geqslant 3$
$x_3 + x_1 \geqslant 20$ $\Rightarrow 2x_3 \geqslant 23$;
$x_3 \geqslant 11,5$



$S_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{49x^2+1})(\sqrt{x^2+1}) \sin\alpha$ $h = d \sin\alpha$

$S_1 = 1 \cdot AK \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \sin\alpha$

$\sqrt{7x^2} = 1$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Пусть $a^2-6ab+b^2 \vdots \frac{(a+b)}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$ $\cancel{\setminus\{1\}}$, тогда~~

~~найдём минимальные k, чтобы выполнялась делимость.~~

~~$\frac{(a+b)}{k}\cdot t = a^2-6ab+b^2$;~~

~~$\frac{(a+b)t}{k} = a^2+2ab+b^2-8ab$;~~

~~$\frac{(a+b)t}{k} = (a+b)^2-8ab$~~

~~$8ab = (a+b)\left(a+b-\frac{t}{k}\right)$ – ищем $\max\left(\frac{t}{k}\right)$~~

$(a+b) \not\vdots\, a$, $(a+b) \not\vdots\, b \Rightarrow \left(a+b-\frac{t}{k}\right) \vdots\, ab$

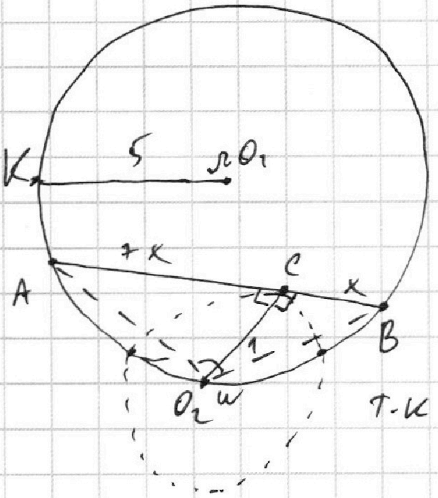
№2

Запишем в виде $\frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$, пусть $(a+b) \vdots m$, тогда $(a+b)^2 \vdots m$, поймём может ли $ab \vdots m$, иначе $(a+b)^2-8ab \not\vdots m$. Пусть m содерж. в делителях a и b, но такого не может быть, т.к a, b – взаимнопростые. Пусть содерж. или в a, или в b, но тогда $(a+b) \not\vdots m$ – противоречие. Пусть какая то часть делителей m содерж в a, а какая-то в b, но тогда $\exists$ какой-нибудь делитель из делителей m в a или b, он есть в одном, но его нет в другом $\Rightarrow (a+b) \not\vdots m$ – противоречие. Значит m может быть только делителем 8, $\max$ – 8. Ответ: $m=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: окр. ω и окр. Ω,

$AC : CB = 7$, $\overset{O_2C}{r(\omega)} = 1$, $\overset{O_1K}{r(\Omega)} = 5$

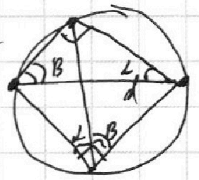
Найти: $AB = ??$

Решение: 1. Пусть $AC = 7x$, $CB = x$,

т.к. окр. ω кас. $AB \Rightarrow O_2C \perp AB$.

2. По (Т) об отношении хорды и диаметра в окр-ти:

$d = \frac{AB}{\sin\alpha}$. Пр. док-ва



d – диаметр., α, β – с-ы ($\alpha + \beta = 90°$)

Произвольно разделим ∠ 90-ые на α и β, соединив (·) л-ие луча и окр. с (·)-ами диаметра снова получим прям. Δ, т.к опир. на диаметр., его стороны (хорды равны соотв. $d\sin\alpha$ и $d\sin\beta$). Теперь используем, пусть $\angle AO_2B = \alpha \Rightarrow$

$AB = 10\sin\alpha$.

∃ Δ AO_2B: $\begin{cases} S_{AO_2B} = \frac{1}{2}AB \cdot CO_2 = \frac{1}{2} \cdot 10\sin\alpha \cdot 1 \\ S_{AO_2B} = \frac{1}{2} \cdot AO_2 \cdot BO_2 \sin\alpha \end{cases}$

$\Downarrow$

$5\sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{49x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}\right)\sin\alpha;$

$10 = \sqrt{(49x^2+1)(x^2+1)};$

$\Updownarrow$

$100 = (49x^2+1)(x^2+1)$ Пусть $x^2 = t$, тогда

$100 = (49t+1)(t+1);$ $49t^2 + 50t + 1 - 100 = 0;$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение -3. ОДЗ:

$49t^2+50t-99=0;$ $\boxed{t>0,\ x>0}$

$t_1+t_2=-\frac{50}{49}$ $\Rightarrow \boxed{t_1=1} \Rightarrow x=\sqrt{t}=1$

$t_1\cdot t_2=-\frac{99}{49}$ $\quad t_2=-\frac{99}{49}$

$AB=8x \Rightarrow AB=8.$

Ответ: $AB=8.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4 - продолжение

$x_{1,2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$

1. проверим выполнимость $7x - 1 \geqslant 0$

$\sqrt{61} \approx 8$ (точно лежит между 7 и 8 т.к $49 < 61 < 64$)

1) $\frac{11+16}{41} = \frac{27}{41}$ $\quad 7 \cdot \frac{27}{41} - 1 \geqslant 0$ - верно

$7 \cdot \frac{\overset{<0}{(11-16)}}{41} - 1 > 0$ - неверно.

2 проверим $c + \sqrt{b} \geqslant 0$:

$2 - 7x + \sqrt{2x^2+2x+1} \geqslant 0$, для $x = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2x^2+2x+1 \geqslant (7x-2)^2 \\ \underset{\text{верно}}{\boxed{7x-2 \geqslant 0}} \end{cases} \searrow 47x^2 - 30x + 3 \leqslant 0$$

$x_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4\cdot 47 \cdot 3}}{2 \cdot 47} = \frac{30 \pm \sqrt{336}}{94}$

$\sqrt{336}$ - лежит между 18 и 19 $\Rightarrow x_1 \approx \frac{30+18}{94} = \frac{48}{94}$

$x_2 \approx \frac{30-18}{94} = \frac{12}{94}$

$\Downarrow$

$x \in \left(\frac{12}{94}; \frac{48}{94}\right)$

Понятно, что $\frac{11+2\sqrt{61}}{41} > \frac{30-\sqrt{336}}{94}$, осталось выяснить

$\underset{\left(\frac{25}{41}; \frac{27}{41}\right)}{\underset{\uparrow}{\frac{11+2\sqrt{61}}{41}}} \leqslant \underset{\left(\frac{48}{94}; \frac{49}{94}\right)}{\underset{\uparrow}{\frac{30+\sqrt{336}}{94}}}$, но $\frac{25}{41} > \frac{49}{94}$ $\left(\frac{50}{41} > \frac{98}{94}\right)$

$\frac{9}{41} > \frac{4}{94}$

$\overset{\Downarrow}{\frac{11+2\sqrt{61}}{41}}$ - не подходит

Ответ: $\frac{2}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x;$

~~Занетим $(2x^2-5x+3)+(2-7x)=(2x^2+2x+1)$.~~

Занетим, что $2x^2-5x+3=(2x^2+2x+1)+(2-7x)$

Пусть $2x^2+2x+1=b$; $2-7x=c$, тогда

$\sqrt{b+c}-\sqrt{b}=c;$

$\sqrt{b+c}=c+\sqrt{b};$

$$\overset{\Updownarrow}{\begin{cases} b+c=c^2+2c\sqrt{b}+b; \\ c+\sqrt{b}\geq 0 \end{cases}} \Rightarrow c=c^2+2c\sqrt{b};$$

$c^2-c+2c\sqrt{b}=0;$

$c(c-1+2\sqrt{b})=0;$

1. $c=0$ ($c+\sqrt{b}\geq$ - выполняется)
2. $c-1+2\sqrt{b}=0;$
$c=1-2\sqrt{b}$

1. $c=0 \Rightarrow 2-7x=0;$
$2=7x;$
$x=\frac{2}{7}$

Нужно убедиться только в $b\geq 0$, т.к $\sqrt{b+c}$, где $c=0 = \sqrt{b}$.

для $2x^2+2x+1$, $\begin{cases} D=4-4\cdot2\cdot1<0 \Rightarrow b>0 \text{ при } x\in\mathbb{R}. \\ a>0\ (2>0) \end{cases}$

2. $c=1-2\sqrt{b} \Rightarrow (2-7x)=1-2\sqrt{2x^2+2x+1};$

$2\sqrt{2x^2+2x+1}=7x-1;$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 4(2x^2+2x+1)=49x^2-14x+1 \Rightarrow 41x^2-22x-3=0; \\ 7x-1\geq 0 \end{cases}$$

$x_{1,2}=\frac{22\pm\sqrt{22^2+4\cdot41\cdot3}}{2\cdot41};$

$x_{1,2}=\frac{22\pm4\sqrt{61}}{2\cdot41}=\frac{11\pm2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

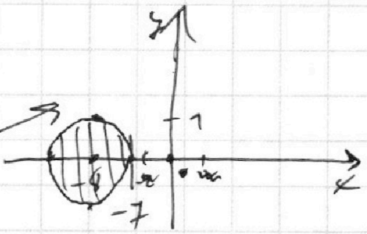
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$$

Из 2-ого понимаем, что 1-ая или 2-ая скобка ≤ 0 (только 1).

1: $(x+8)^2+y^2-1\le 0$;

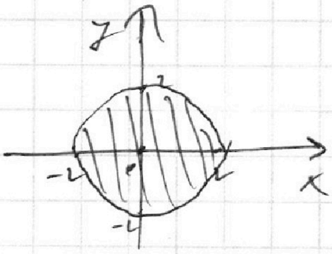
$(x+8)^2+y^2\le 1^2$; →



2) $x^2+y^2-4\le 0$

$x^2+y^2\le 4$;

$x^2+y^2\le 2^2$ →

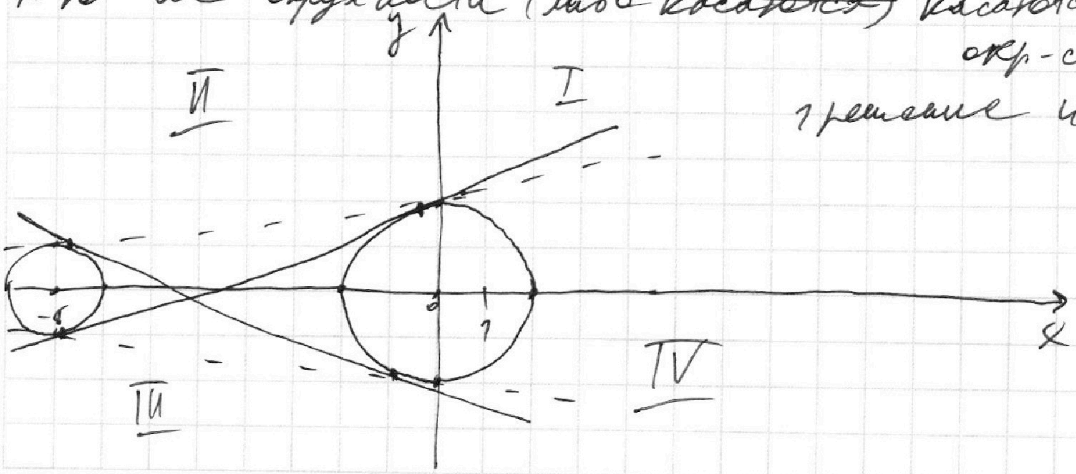


• Заметим окр.-ти не соприкасаются, не п-ся,

(·)x;y лежит либо на 1-ой окр.-ти, либо на 2-ой ~~(включая границы)~~

Из 1-ого ур-ния: $ax-y+10b=0$; $ax+10b=y$ – прямая на графике

Значит условию удовл-ют все прямые $y=ax+10b$, которые ~~А-ют обе окружности (либо касаются)~~ касаются обеих окр-стей, иначе 1 решение или ∞.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что от a зависит ∠ наклона прямой.

1) Найдём a, когда прямая касается окр. r=1 в $\underline{IV}$ полупл., а окр. r=2 во $\underline{II}$ полупл. и остальные зн-я 3 пары точек п-ий.

~~$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x+8)^2+y^2=1 \\ ax+10b=y \end{cases} \Rightarrow 16x+64=$~~

~~$ax_1^2+\sqrt{4-x_1^2}=4$~~

$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=4 \\ ax_1+10b=y_1 \\ (x_2+8)^2+y_2^2=1 \\ ax_2+10b=y_2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ~~$a\sqrt{4-y_1^2}+10b=y_1$~~ $\Rightarrow ax_1^2+10b=\sqrt{4-x_1^2}$

$\Rightarrow ax_2^2+10b=\sqrt{1-(x_2+8)^2}$

1. $ax_1^2-\sqrt{4-x_1^2}+10b=0;$

2. $ax_2^2+\sqrt{1-(x_2+8)^2}+10b=0;$

Существует всего 4 значения a удовлетвор- условию.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$2x^2+4x+1$

900 $336 \,|\, 3$

$2x^2-5x+3=(x-1)(x-\frac{3}{2})$

$47 \cdot 4$ 2

112

$2x^2+2x+1=$

$x_1+x_2=-1$

$x_1x_2=\frac{1}{2}$

$(x-7x)^2$

~~$D=4-4\cdot2\cdot1$~~

$188 \cdot 3 = 564$

56

$16 \cdot 16 = 196$

$11+16$

$\frac{27}{41}\cdot 7$

$16 \cdot 16 = 286$

56

$7\cdot8\cdot2\cdot3$

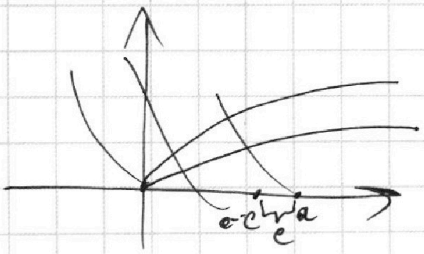
$26 \cdot 6 = 156$

52

$\sqrt{b+c}-\sqrt{b}=c$

14+11

$\frac{25}{41}$



90 + 81

$\sqrt{b+c}-\sqrt{b}=c;$

$(b+c)+b-2\sqrt{(b+c)b}=c^2;$

$2b+c-c^2=2\sqrt{(b+c)b};$

$61+16=366$

488

$61 \cdot 976$

244

$19 \cdot 19 = 171$

$+19 = 361$

$\frac{27}{41}$

$b+c=(c+\sqrt{b})^2;$

$b+c=c^2+2c\sqrt{b}+b;$

$c=c^2+2c\sqrt{b};$

$c^2-c+2c\sqrt{b}=0;$

$c(c-1+2\sqrt{b})=0;$

$c-1+2\sqrt{b}=0;$

$c=1-2\sqrt{b}$

$22+22=44$

122

61

$44 \cdot 4 = 484$

$+492$

$976 \,|\, 2$

488

$(\frac{25}{41};\frac{27}{41})$

$\frac{98}{94}\approx1$

$\frac{50}{41}\approx1,25$

$(\frac{48}{94};\frac{49}{94})$

$2-7x=1-2\sqrt{2x^2+2x+1};$

~~$7-7x=$~~

$7x-1=2\sqrt{2x^2+2x\ldots}$

$22^2+4\cdot41\cdot3$ 16

$61\cdot2^4$

$164 \cdot 3 = 492$

22