



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Найдите наименьшую степень входящие в abc .

$$ab : 2^{14}; \quad bc : 2^{17}; \quad ac : 2^{20} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{51}$$

Но $a^2 b^2 c^2$ - квадрат \Rightarrow степени входящие четны $\Rightarrow abc : 2^{26}$

Замысли, что это достигается при $a = a_1 \cdot 2^8$, $b = b_1 \cdot 2^6$, $c = c_1 \cdot 2^{12}$, где $a_1, b_1, c_1 \not\div 2$. $8+6 \geq 14$; $6+12 \geq 17$; $8+12 \geq 20$.

2) Найдите наименьшую степень входящие в abc .

Замысли, что раз $ac : 7^{37}$, то и $abc : 7^{37}$.

Это достигается при $a = a_1 \cdot 7^{20}$, $b = b_1$, $c = 7^{17} c_1$,

где $a_1, b_1, c_1 \not\div 7$.

3) Т.е. $abc_{\min} = 2^{26} \cdot 7^{37}$ и оно достигается при

$$a = 2^{20} \cdot 2^8 \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{17}$$

, причём все условия выполнены

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\frac{a}{b}$ - несократима, $\Rightarrow (a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$, чтобы сократить на m , нужно

$\text{НОД}(a+b; a^2-6ab+b^2) = m$

2) $(a+b; a^2-6ab+b^2) = (a+b; a^2-6ab+b^2 - sab) = (a+b; sab)$

Заметим, что $(a+b, ab) = 1$, т.к. $(a, b) = 1$

$(a+b, ab) = (a+b, a^2)$ или же $(a+b, ab) = (a+b, b^2)$

$\Rightarrow (a+b, ab) \leq (a^2, b^2) = 1$

3) $\Rightarrow (a+b, sab) = (a+b, s)$, т.е. $m = s_{\max}$.

4) Заметим, что такое m достигается при $a = 1$ и $b = 7$

$\frac{1+7}{1^2-6 \cdot 1 \cdot 7+7^2} = \frac{8}{1-6 \cdot 7+49} = \frac{8}{8} = 1$

Ответ: $m = 8$

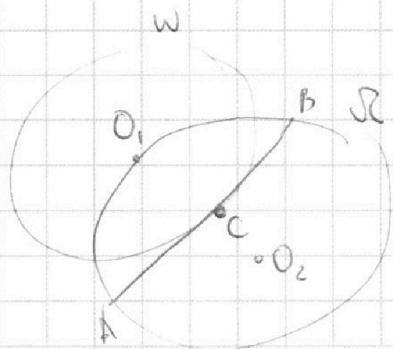
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC : CB = 7 : 1$$

$$O_1 \in R$$

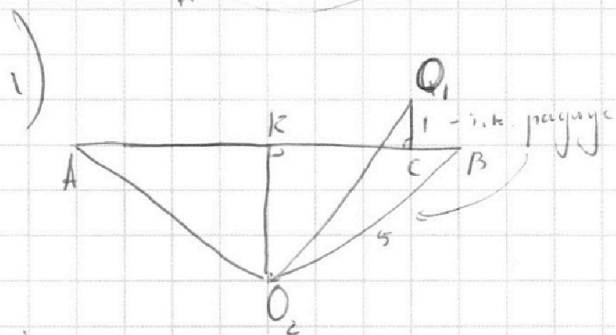
AB - хорда R и касательная к W

O_1, O_2 - центры W и R

$O_1 C \perp AB$, т.к. AB - касательная

$O_2 K$ - перпендикуляр к AB.

т.к. O_2 центр, а AB хорда, то $AK = KB$.



2) Заметим, что если $AC = 7k$, то $CB = k$, а $AK = KB = 4k$, $\Rightarrow KC = 3k$.

Пусть $KO_2 = x$. Тогда $AK^2 = AO_2^2 - O_2K^2 = 25 \cdot 4^2 - x^2$; $KC^2 = O_2O_1^2 - (x+1)^2$

$$\Rightarrow \frac{25 - x^2}{4^2} = \frac{25 - (x+1)^2}{3^2} \quad \text{из соотношения 4, 3}$$

$$\Rightarrow 9 \cdot 25 - 9x^2 = 16 \cdot 25 - 16x^2 - 32x - 16$$

$$7x^2 + 32x + 16 - 7 \cdot 25 = 0$$

По т. Виета подходит $x = 3$ и $x = -\frac{53}{7}$, но $x > 0$, т.к. радиус

$R >$ радиуса W . $\Rightarrow x = 3$. Тогда $AK^2 = AO_2^2 - O_2K^2 = 4^2$

$$\Rightarrow AB = 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$
$$\left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right) =$$
$$= (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right)$$

$$\Rightarrow 2 - 7x = (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right)$$

$$x = \frac{2}{7} \quad \text{или} \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Заметим, что у $2x^2 + 2x + 1 = 0$ нет решений А.И.В.к. ~~действительно~~

$$\text{т.к. } a=2 \quad b=2 \quad c=1, \Rightarrow D = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$$

2) Допустим $x = \frac{2}{7}$. Проверим что подходит

$$2 - 7x = \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}\right)$$

$$\text{У } 2 - 7x \text{ есть решение, у } \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \text{ нет такого}$$

решения, \Rightarrow у $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$ есть такое решение.

$$\Rightarrow \text{ оно подходит. Или же } 2x^2 - 5x + 3 = 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1, \text{ что верно}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

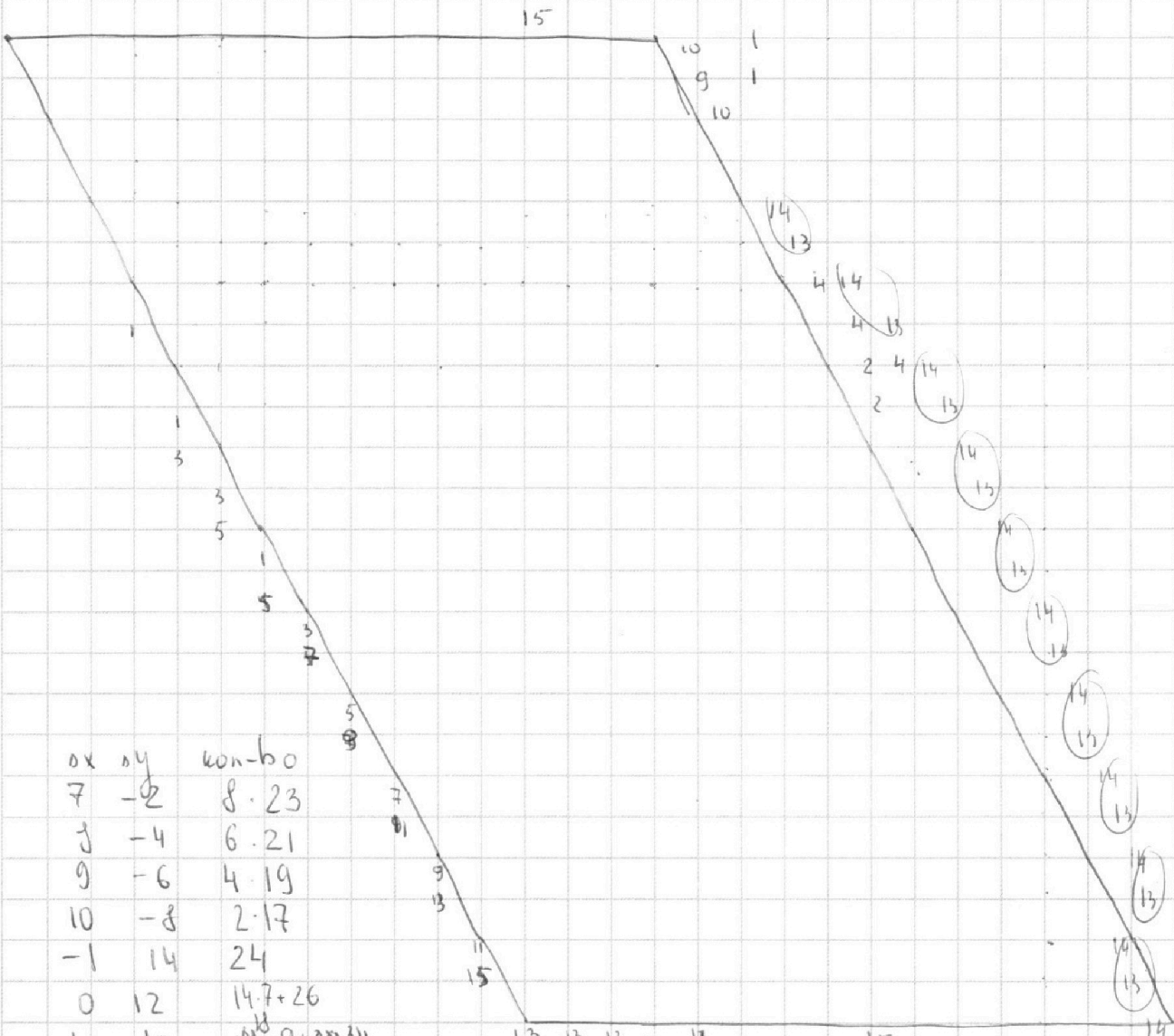
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ax	ay	кон-во
7	-2	8 · 23
3	-4	6 · 21
9	-6	4 · 19
10	-8	2 · 17
-1	14	24
0	12	14 · 7 + 26
1	10	18 · 9 + 30 · 34
2	8	22 · 11 + 42
3	6	26 · 13 + 50
4	4	14 · 14 + 10 · 13
5	2	12 · 12 + 14 · 11 + 13 · 10
6	0	10 · 13 + 9 · 12

Для каждого случая мы
берем в них и считаем
сумму по Σ .

В итоге мы получим суммарное кол-во написанное в
таблице
Т.к. у нас просто нет, как и вы сами это увидите,
и вы сами увидите

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Рассмотрим как должны относительно друг друга располагаться $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ чтобы $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

а) ~~Рассмотрим~~ ~~A левее~~ Если A левее B и ниже B, то

тогда $x_2 - x_1 < 0$ и $y_2 - y_1 < 0$, ~~тогда~~ $\Rightarrow 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) < 0 \neq 12$.

б) Если A левее B и правее:

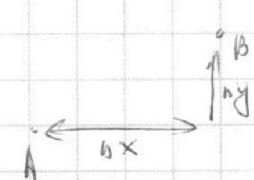


Если $|y_2 - y_1| \geq 8$ то

Δx	Δy
7	-2
8	-4
9	-6
10	-8
11	-9

Больше чем 10; ~~-8~~ ~~ни~~ ~~и~~ ~~ниже~~ ~~и~~ ~~ниже~~ ~~и~~ ~~ниже~~

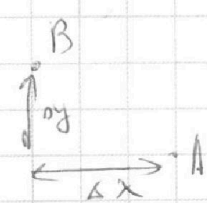
в) Если A левее B и ниже:



Пара больше чем -1; 14
ниже и входит в поле

Δx	Δy
-1	14
-2	18

г) Если A левее B и правее B.



Других пар точек перекрывающихся в области не существует

Δx	Δy
0	12
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2
6	0

2) Нарисовать поле и посчитать количество пар для каждого вида

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

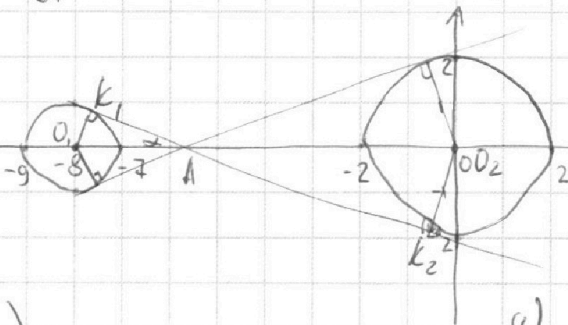
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ (x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Решим графическим способом. Заметим что $ax - y + 10b = 0$ - уравнение прямой, а $(x+8)^2 + y^2 - 1$ и $x^2 + y^2 - 4$ - уравнения окружностей



Изобразим эти окружности. Чтобы выполнить (2) необходимо чтобы точка лежала ^{внутри} в одной из окружностей. Т.к. окружности не пересекаются, все точки между и внутри подходят.

2) Заметим, что если прямая не касается ни одной из окружностей, то решений 0. Если она проходит через каждую из них, то решений ∞ , т.к. подходит вся точка на отрезке между окружностями. Т.е. прямая должна касаться окружностей в двух точках и быть общей касательной.

Общих касательных 2.

$$\begin{aligned} O_1 A K_1 O_1 &\sim A K_2 O_2 \\ \Rightarrow \frac{O_1 A}{O_2 A} &= \frac{K_1 O_1}{K_2 O_2} \end{aligned}$$

Мы знаем, что $O_1 O_2 = 8$,
 $\Rightarrow A O_1 A = \frac{8}{3}$

3) $a = \pm \operatorname{tg} \alpha$, т.к. это координаты касания прямой

$$\sin \alpha = \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \text{ из } \triangle A K_1 O_1,$$

$$\Rightarrow a = \pm \operatorname{tg} \left(\arcsin \left(\frac{3}{8} \right) \right)$$

Ответ: $a = \pm \operatorname{tg} \left(\arcsin \left(\frac{3}{8} \right) \right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

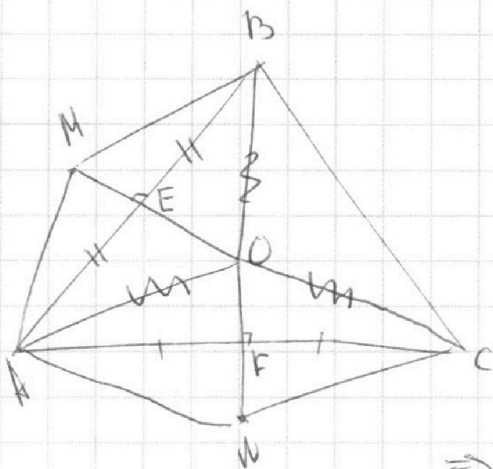
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Заметим, что O - центр описанной окружности, то точка пересечения середин

2) Т.к. M, N середины дуг, то

$$MB = MA \text{ и } NA = NC$$

\Rightarrow высота, опущенная из них

падает на середину и является его продолжением

3) Заметим, что $OM = ON = OB = OM = OA$

4) $ME = 4.5$ $NF = 2$

5) Т.к. $ON = OM$, то $OF + NF = ME + EO$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



③ $y = ax + b$



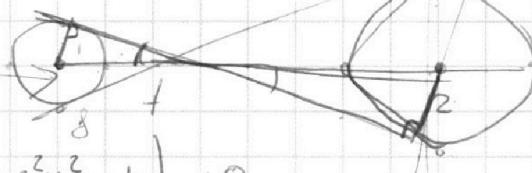
т.к. отрицательное, то либо b отриц.

$y = ax$
 $b = 0, y = 0$

либо
либо нулевым

при нуле

a - ?
b = 0
или отриц.



$$\left((x+r)^2 + a^2(x^2-1) \right) (x^2 + a^2x^2 - 4) \leq 0$$

решив g(x) \Rightarrow касаясь

$$a = \text{tg} \alpha = \text{tg} \left(\arcsin \left(\frac{r}{2} \right) \right)$$

④ $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$(x-1) \cdot -1.5$

$1.5 \times 3 - 1.5 \cdot 5 + 3 = 1.5$

$(x-1)(2x-3)$

$x^2 + x + \frac{1}{2} \quad a=1 \quad b=1 \quad c=\frac{1}{2}$
 $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$

$$\left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) = (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right)$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = -7x + 2$$

$$(a+b)^2 - 8ab$$

$$-7x + 2 = (2 - 7x) \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) \quad a=1 \quad b=7$$

$x = \frac{2}{7} ?$

$\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad} = 0$

$$2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{5 \cdot 2}{7} + 3 = \frac{8 - 70 + 3 \cdot 49}{49} = \frac{8 + 28 + 1 \cdot 49}{49}$$

$\Rightarrow \sqrt{\quad} = 0$
 $\sqrt{\quad} = 0$

↑ но у него нет решения. \emptyset

$49 \cdot 2 - 70 \cdot 2 = 28$
 $14 - 10 = 4$ упр

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6)

прямые, где окружности

1 2 3 4 5 6 7

ab : 2 14 7

bc : 2 17 7

ac : 2 20 37

$\times \frac{159}{7}$

$\begin{array}{r} 25 \\ \times 17 \\ \hline 175 \\ -1617 \\ \hline 159 \end{array}$

тождество

$20+17+14$

$10+17+37$

2 7 $\ominus 3$

20 34 $\ominus 21$

$\frac{17}{41}$ $\ominus 3 \cdot 7$

21 32 $\ominus 42$ $\ominus 3$

abc : 2 7

$\Rightarrow c : 2 7$

a : 2 7

b :

a+b \leftarrow 4ab

$\sqrt{a+b}$

a=1 b=2

a=1 b=3

$\frac{12}{37}$
 $\frac{54}{10}$
 64

$\frac{53}{7}$

$7x^2 + 32x - 7 \cdot 25 + 16 = 0$

$7x^2 + 32x - 159 = 0$

$x=3$

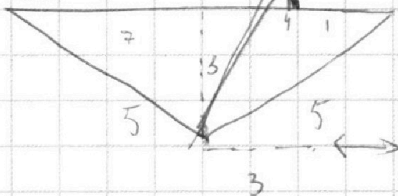
21 32 a=7

b=32

c=-159

$D = b^2 - 4ac = 32^2 + 4 \cdot 159 \cdot 7$

1024



$(a+b; a^2 - 6ab + b^2) = (a+b; -4ab) =$

$a+x+y \geq 10$

$y+z \geq 17$

$z+x \geq 37$

$\Rightarrow x+y+z \geq 32$

$z=22$

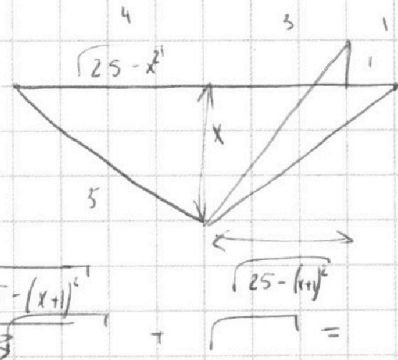
x=10

27

$\frac{25-x^2}{16} = \frac{25-(x+1)^2}{9} z=17$

$9 \cdot 25 - 9x^2 = 16 \cdot 25 - 16x^2 - 32x - 16$

$\frac{\sqrt{25-x^2}}{4} = \frac{\sqrt{25-(x+1)^2}}{3} + \sqrt{25-(x+1)^2}$



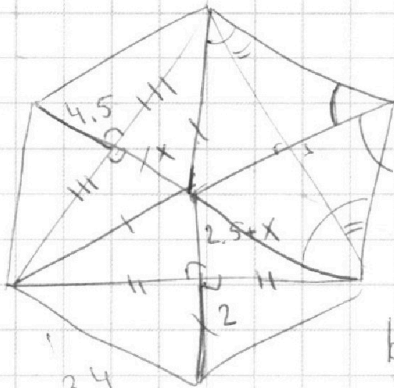
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 12 \\ + 15 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 15 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ + 10 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 10 \\ \hline 29 \end{array}$$

mbo, mbo, c, 7, 19
 2, 19, 10, 37, c, 7, 19, b=0, a, 7

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 14 \\ 2 \cdot 17 \\ 2 \cdot 20 \\ 2 \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{37} abc : 7$$

$$\Rightarrow abc = 26$$

b	2	6
a	2	8
c	2	12

$$l^2 = 4^2 + (2.5+x)^2$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 10 \\ \hline 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 2 \\ \hline 74 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \cdot 7 \\ \hline 182 \end{array}$$

$$\frac{20 \cdot (1+15) \cdot 9}{2} + 30$$

$$= 14 \cdot 7 + 26$$

$$= 10 \cdot 13 + 9 \cdot 12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on a grid background. The page contains several geometric diagrams, including a large triangle with internal lines and points, and a coordinate system with points plotted. The solution involves algebraic calculations and geometric reasoning.

Geometric Diagrams:

- A large triangle with vertices at $(0,0)$, $(5,0)$, and $(0,8)$.
- Points $(1,8)$ and $(-4,8)$ are marked on the vertical axis.
- Points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) are labeled.
- Various lines and segments are drawn, with some labeled with numbers like 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25.
- A circle is drawn with center O and radius R .
- Equation $AB = Rk$ is circled.

Algebraic Calculations:

$$25 - 9k^2 = (x+1)^2$$

$$25 - 9k^2 = 25 - 9x^2$$

$$25 - (x+1)^2 = 25 - x^2$$

$$9 = 16$$

$$16 \cdot 25 - (x+1)^2 = 9 \cdot 25 - 9x^2$$

$$7 \cdot 25 = 16(x+1)^2 - 9x^2$$

$$7 \cdot 25 = 16x^2 - 9x^2 + 32x + 16$$

$$7x^2 + 32x + 16 - 7 \cdot 25 = 0$$

$$7x^2 + 32x - 149 = 0$$

$$x = 3$$

Coordinate Calculations:

$$y_2 + y_1 = 24$$

$$y_2 + y_1 = 24$$

$$y_2 + y_1 = 24$$

Final Results:

- $238 + 13 \cdot 4 = 238 + 52 = 290$
- $200 - 12 = 188$
- $18 - 4 = 14$
- $16 - 4 = 12$
- $0 - 4 = -4$
- $2 = 2$



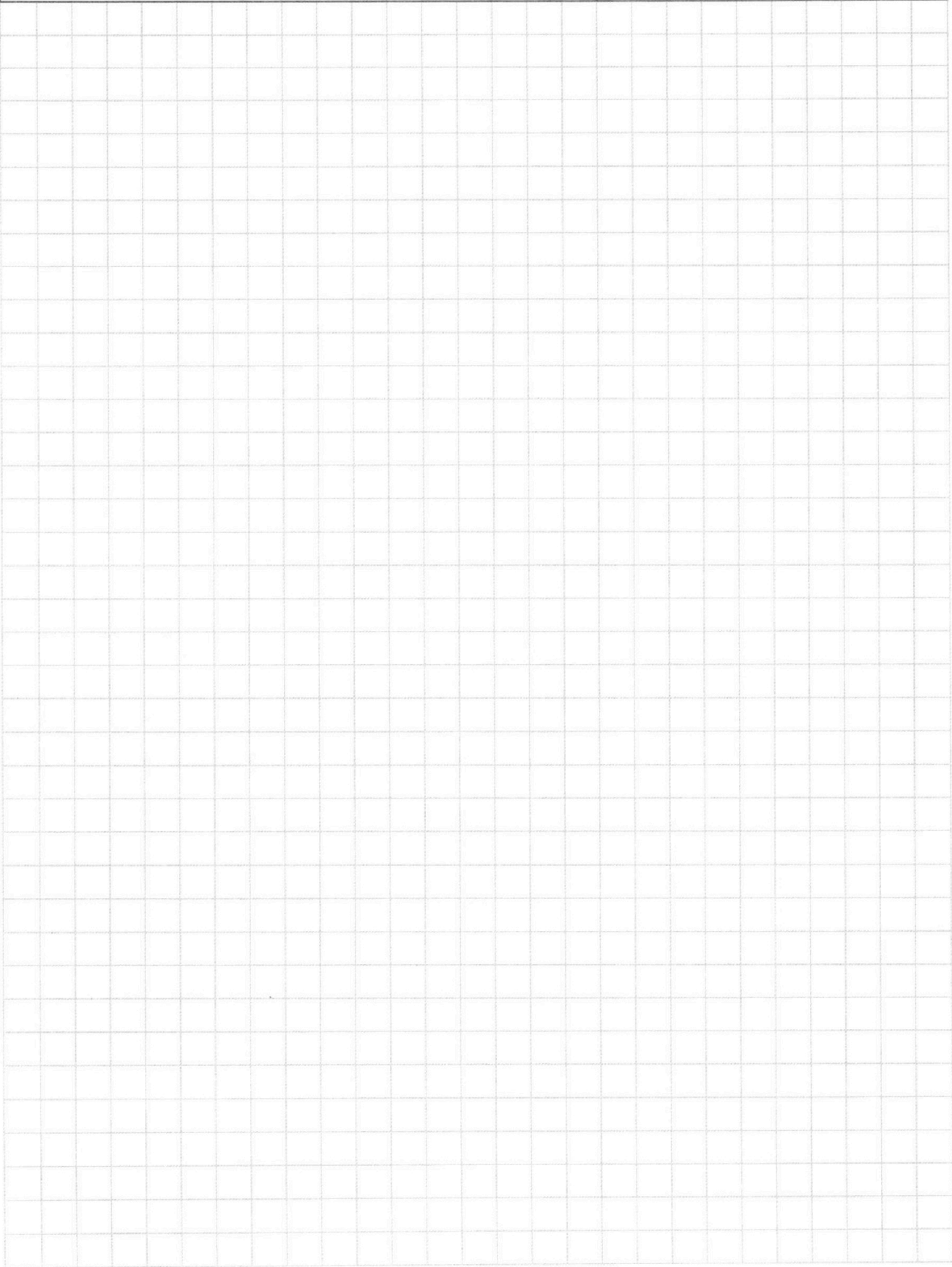
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

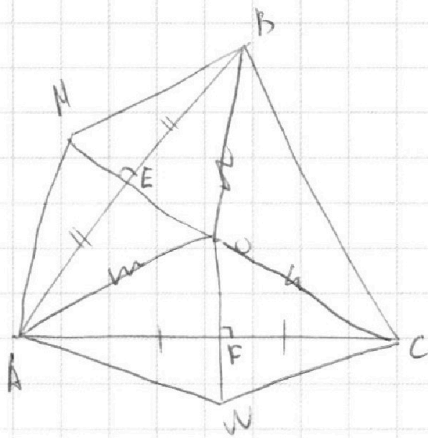


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Заметим, что O -

центр описанной окружности,
это точка пересечения серединных

2) Т.к. M и N середины AB и BC , то

$$MB = MA \text{ и } NB = NC.$$

\Rightarrow высоты, опущенные из них

падают на середину и являются его продолжением.

3) Заметим, что $ON = OC = OB = OM = OA$

4) $ME = 4.5$; $NF = 2$.