МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) Найдем наименьшую степень вхождения 2 в abc.

$ab \vdots 2^{14}$; $bc \vdots 2^{17}$; $ac \vdots 2^{20}$ $\Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{51}$

Но $a^2b^2c^2$ - квадрат => степени вхождения четные => $abc \vdots 2^{26}$

Заметим, что это достигается при $a = a_1 2^8$ $b = b_1 2^6$ $c = c_1 2^{12}$, где $a_1 b_1 c_1 \not\vdots 2$. ($8+6 \geq 14$, $6+12 \geq 17$, $8+12 \geq 20$.

2) Найдем наименьшую степень вхождения 7 в abc.

Заметим, что раз $ac \vdots 7^{37}$, то и $abc \vdots 7^{37}$.

Это достигается при $a = 7^{20} a_2$; $b = b_2$ $c = 7^{17} c_2$, где $a_2\ b_2\ c_2 \not\vdots 7$.

3) Т.е. $abc_{min} = 2^{26} \cdot 7^{37}$ и оно достигается при

$a = 2^8 \cdot 7^{20}$
$b = 2^6$
$c = 2^{12} 7^{17}$
, причем все условия выполняются

Ответ: $2^{26} 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $\frac{a}{b}$ – несократимая $\Rightarrow (a,b)=1$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$, чтобы сократить на m, нужно

$НОД(a+b;\ a^2-6ab+b^2)=m$

2) $(a+b;\ a^2-6ab+b^2) = (a+b;\ \overset{-8ab}{\cancel{+\ldots}}) = (a+b;\ 8ab)$

Заметим, что $(a+b,\ ab)=1$, т.к. $(a,b)=1$

$(a+b;\ ab) = (a+b;\ a^2)$ или же $(a+b;\ ab)=(a+b;\ b^2)$

$\Rightarrow (a+b,\ ab) \leq (a^2;\ b^2)=1$

3) $\Rightarrow (a+b;\ 8ab) = (a+b;\ 8)$, т.к. $m_{max}=8$.

4) Заметим, что такое m достигается при $a=1$ и $b=7$

$\cancel{\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{16-6\cdot16+}}$ $\frac{8}{1-6\cdot7+49} = \frac{8}{8} = \frac{1}{1}$

Ответ: $m=8$

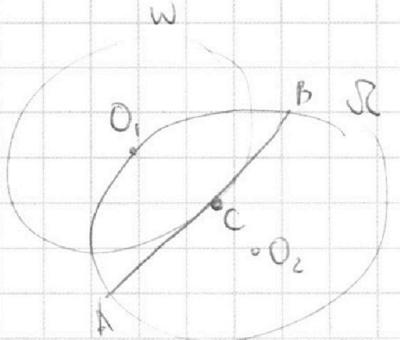
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$AC : CB = 7:1$

$O_1 \in \Omega$

AB - хорда Ω и касательн к w

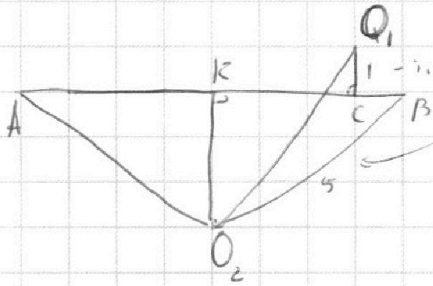
O_1, O_2 - центр w и Ω

$O_1C \perp AB$, т.к. AB - касательн

O_2K - перпендикуляр к AB.

т.к. O_2 центр, а AB хорда, то $AK = KB$.

1)



2) Заметим, что если $AC = 7k$, то $CB = k$, а $AK \overset{KB}{=} 4k$, $\Rightarrow KC = 3k$

Пусть $KO_2 = x$. Тогда $AK^2 = AO_2^2 - O_2K^2 = 5^2 - x^2$; $KC^2 = O_2O_1^2 - (x+1)^2$

$$\Rightarrow \frac{25 - x^2}{4^2} = \frac{25 - (x+1)^2}{3^2}$$ из соотношен $4:3$

$\Rightarrow 9 \cdot 25 - 9x^2 = 16 \cdot 25 - 16x^2 - 32x - 16$ и

$7x^2 + 32x + 16 - 7 \cdot 25 = 0$

По т. Виета подходят $x = 3$ и $x = -\frac{53}{7}$, но $x > 0$, т.к. радиус $\Omega >$ радиуса w. $\Rightarrow x = 3$. Тогда $AK^2 = AO_2^2 - O_2K^2 = 4^2$

$\Rightarrow AB = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

[ ] [ ] [ ] [X] [ ] [ ] [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\left(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}\right) =$

$= (2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$\Rightarrow 2-7x = (2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$x = \frac{2}{7}$ или $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 0$

~~Заметим~~ $\Rightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3=0 \\ 2x^2+2x+1=0 \end{cases}$

Заметим, что у $2x^2+2x+1=0$ нет решений в ~~рациональных~~ действительн.

т.к. $a=2$ $b=2$ $c=1$, $\Rightarrow D = b^2-4ac = 4-8=-4 < 0$

2) Допустим $x = \frac{2}{7}$. Проверим что подходит

$2-7x = \left(\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$x=\frac{2}{7}$

У $2-7x$ есть решение, у $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$ нет такого решения, $\Rightarrow$ у $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1}$ есть такое решение.

$\Rightarrow$ оно подходит. Или же $2x^2-5x+3$ $2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2 - 5\cdot\frac{2}{7}+3 =$

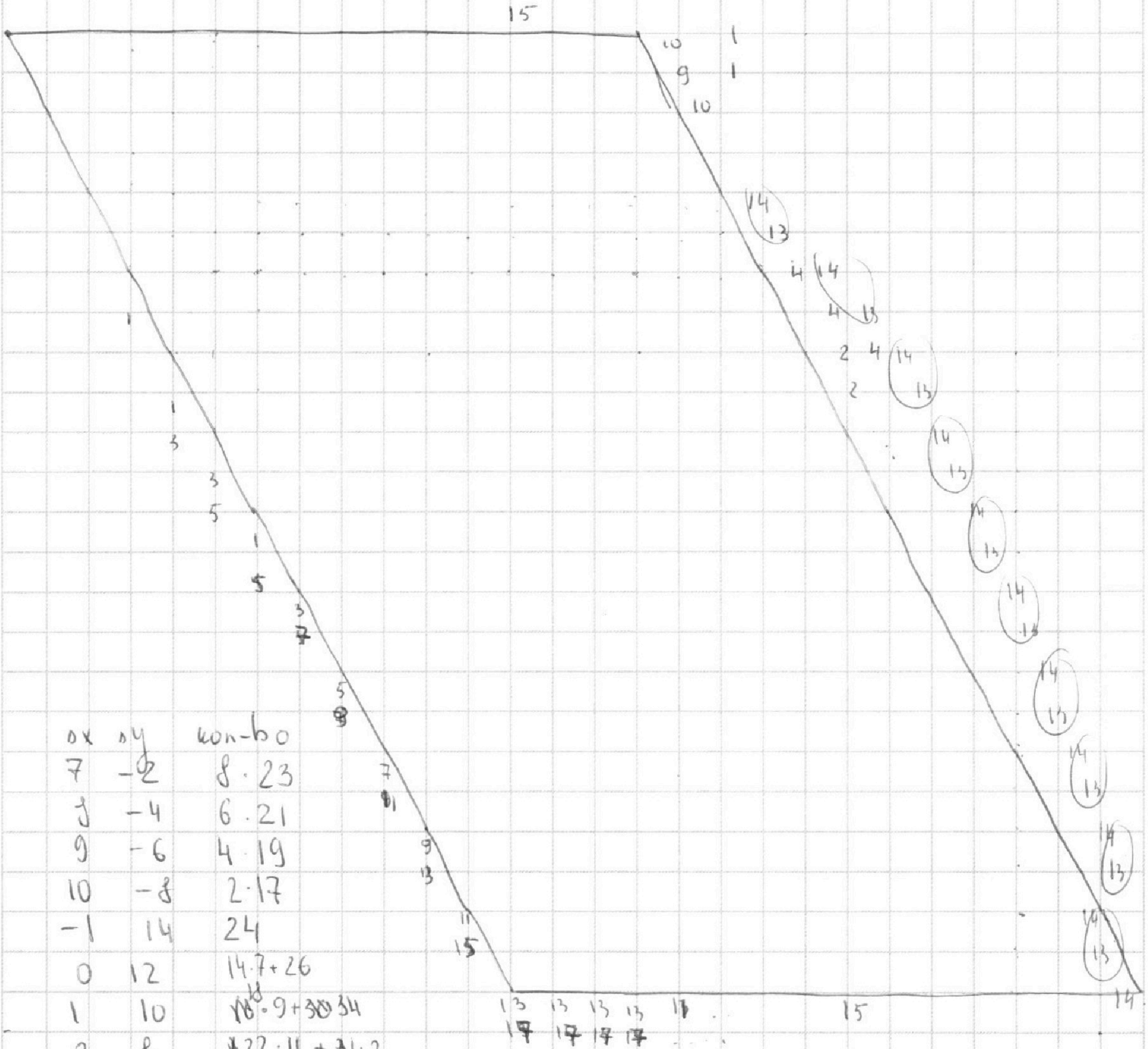
$= 2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2\cdot\frac{2}{7}+1$, что верно

Ответ: $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Δx	Δy	кол-во
7	−2	8·23
8	−4	6·21
9	−6	4·19
10	−8	2·17
−1	14	24
0	12	14·7+26
1	10	18·9+~~30~~ 34
2	8	22·11 + 42
3	6	26·13 + 50
4	4	~~14·14 + 10·13~~ 14·11 + 13·10
5	2	12·12 + 11·11
6	0	10·13 + 9·12

Для каждого случая мы находим в них и считаем случаи потом Σ.

В итоге мы получаем суммарное кол-во написанное в таблице

Т.к. у нас просто них, нам не важно что координаты, а важны размеры

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) Рассмотрим как должны относительно друг друга располагаться $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ чтобы $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

а) ~~Допустим A лежит~~ Если A лежит выше и левее B, то тогда $x_2 - x_1 < 0$ и $y_2 - y_1 < 0$, ~~зн~~ $\Rightarrow 2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) < 0 \neq 12$.

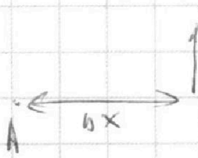
б) Если A лежит выше B и правее:

Если $|y_2 - y_1| \geq$ ... $x_2 - x_1$

Δx	Δy
7	−2
8	−4
9	−6
10	−8
11	−9

Больше чем 10; −8 уже не влезает в поле

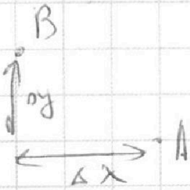
в) Если A лежит ниже B и левее:



Пары больше чем −1; 14 уже не входят в поле

Δx	Δy
−1	14
−2	18

г) Если A лежит ниже и правее B.



Других пар кроме перечисленных в таблице не существует

Δx	Δy
0	12
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2
6	0

2) Начертим поле и посчитаем количество пар для каждого вида

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

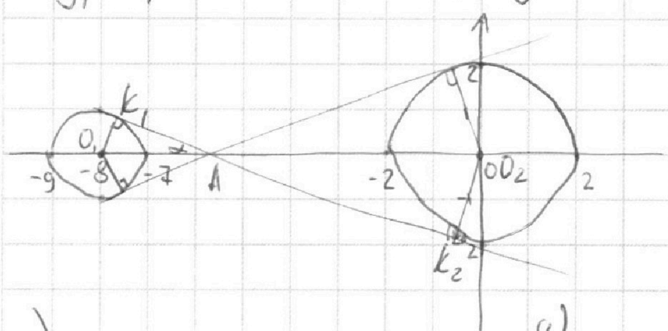
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ \cancel{(x+8)}\left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \le 0 & (2) \end{cases}$

Решим графическим способом. Заметим что $ax \mp y + 10b = 0$ – ур прямой, а $(x+8)^2+y^2-1$ и x^2+y^2-4 – ур окружностей



Изобразим эти окружности

Чтобы выполнялось (2) необходимо чтобы точка лежала только в одной из окружность. Т.к. окружности не пересекаются, все точки на них и внутри подходят

2) Заметим, что если прямая не касается ни одной из окружностей, то решений 0. Если она проходит через какую-либо, и не проходит через (1), то решений ∞, т.к. подходят все точки на отрезке внутри окружности

Т.е прямая должна касаться окружностей в двух точках и быть общей касательной.

Общих касательных 2.

$\triangle AK_1O_1 \sim \triangle AK_2O_2$

$\Rightarrow \dfrac{O_1A}{O_2A} = \dfrac{K_1O_1}{K_2O_2}$

Мы знаем, что $O_1O_2 = 8$,

$\Rightarrow O_1A = \dfrac{8}{3}$

3) $a = \pm\operatorname{tg}\alpha$, т.к. это коэффициент наклона прямой

$\sin\alpha = \dfrac{1}{\frac{8}{3}} = \dfrac{3}{8}$ из $\triangle AK_1O_1$

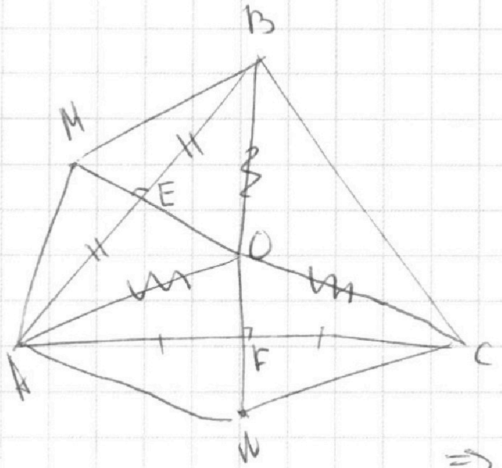
$\Rightarrow a = \pm\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{3}{8}\right)\right)$

Ответ: $a = \pm\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{3}{8}\right)\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Заметим, что O - центр описанной окружности, это точка пересечения серперов

2) Т.к. M, N середины дуг, то $MB = MA$ и $NA = NC$

$\Rightarrow$ высота, опущенная из них попадает на серпер и является его продолжением

3) Заметим что $ON = OC = OB = OM = OA$

4) $ME = 4.5$ $NF = 2$

5) Т.к. $ON = OM$, то $OF + NF = ME + EO$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(6) $y = ax + 10b$

т.к. ограниченность, то либо в одном круге, либо в другом

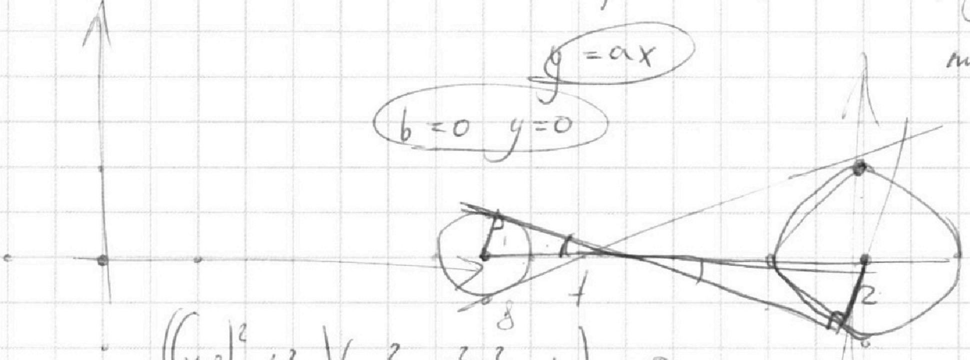
$y = ax$

$b = 0 \quad y = 0$

при любом a - ?

$b = 0$

нас устроит?



$$\left((x+8)^2 + a^2x^2 - 1\right)\left(x^2 + a^2x^2 - 4\right) \le 0$$

ровно два ⇒ касается

$a = tg\alpha =$
$= tg\left(\arcsin\left(\frac{3}{8}\right)\right)$

(4) $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$

$(x-1)($ $-1{,}5$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 5x + 3 & x - 1 \\ 2x^2 - 2x & 2x - 3 \\ -3x + 3 & \\ -3x + 3 & \end{array}$$

$1{,}5 \times 1{,}5$ / 2

$1{,}5 \times 3 - 1{,}5 \cdot 5 + 3$ / $1{,}5$

$(x-1)(2x-3)$

$x^2 + x + \frac{1}{2} \quad a = 1 \quad b = 1 \quad c = \frac{1}{2}$

$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$

$(\sqrt{\ } + \sqrt{\ })(\sqrt{\ } - \sqrt{\ }) = (2 - 7x)(\sqrt{\ } + \sqrt{\ })$

$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1$

$(a+b)^2 - 8ab \quad 8$

$-7x + 2 = (2 - 7x)(\sqrt{\ } + \sqrt{\ })$

$a = 1$
$b = 7$

$x = \frac{2}{7}$?

$\sqrt{\ } + \sqrt{\ } = 0$

$2 \cdot \frac{4}{49} - \frac{5 \cdot 2}{7} + 3$
$= \frac{8 - 70 + 3 \cdot 49}{49}$

$\frac{8 + 28 + 1 \cdot 49}{49}$

⇒ $\begin{cases} \sqrt{\ } = 0 \\ \sqrt{\ } = 0 \end{cases}$

↑ то у него нет решений, $\varnothing$

$49 \cdot 2 - 70 \text{ vs } 28$
$14 - 10 \quad 4$

ура

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7
V V V V V

6) [illegible], две окружности

$ab : 2\ 7$

$bc : 2\ 7$

$abc : 2\ 7$

$25 \times 17 = 175$

159×7

Господи убей

$a+b$ $4ab$

$a = 1$ $b = 2$

$a = 1$ $b = 3$

$7x^2 + 32x - 7\cdot 25 + 16 = 0$

$7x^2 + 32x - 159 = 0$

$x = 3$

$a = 7$

$b = 32$

$c = -159$

$abc : 2\ 7$

$\Rightarrow c : 2\ 7$

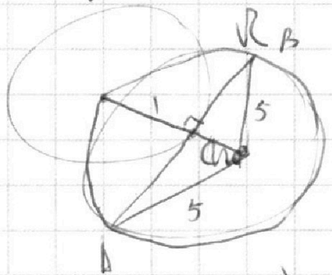
$a : 2\ 7$

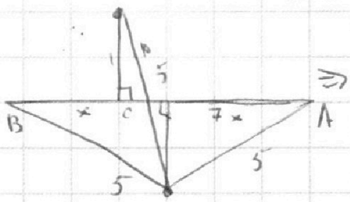
$b :$

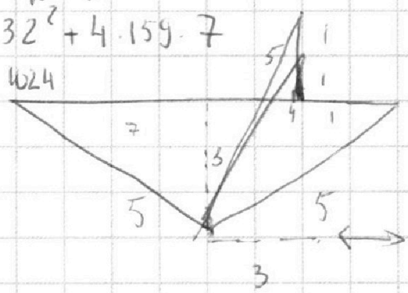
$22 + 15 = 37$

$D = b^2 - 4ac =$
$= 32^2 + 4\cdot 159 \cdot 7$

1024







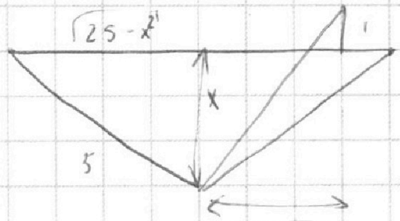
$(a+b;\ a^2 - 6ab + b^2) = (a+b;\ -4ab) =$
$= ($

$x + y \geqslant 10$

$y + z \geqslant 17$ $\Rightarrow x + y + z \geqslant 32$

$z + x \geqslant 37$ $z = 22$

$x = 10$ 27



$\frac{25 - x^2}{16} = \frac{25 - (x+1)^2}{9}$ $z = 17$

$9\cdot 25 - 9x^2 = 16\cdot 25 - 16x^2 - 32x - 16$

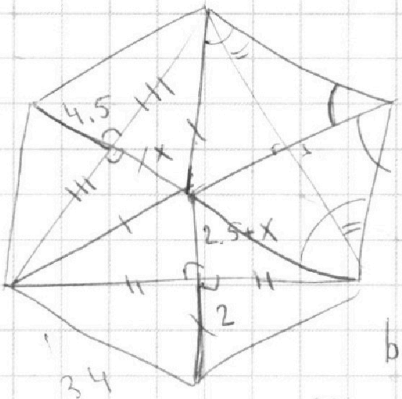
$\frac{\sqrt{25 - x^2}}{4} = \frac{\sqrt{25 - (x+1)^2}}{3} + \sqrt{\ } =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



12
+15
6

18
+15
33

8
10
18
22

19
10
37

$b = 0\ 7^0$

27
10.
37×2
37

$2^{26} \cdot 7$

2^{14}
2^{14}
2^{20}

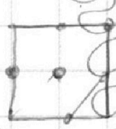
34
$\frac{\sqrt{7}}{37}$ abc ⋮ 7 37
$\Rightarrow abc = 26$

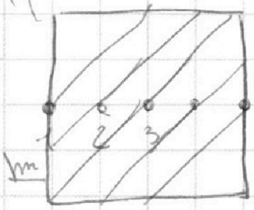
(14)

b 2^6
a 2^8
c 2^{12}

$l^2 = 4^2 + (2.5+x)^2$

b = 0
a 7





$2 \cdot \frac{(1+15)}{2} \cdot 9 + 30$

$10 \cdot 13 + 9 \cdot 12$

$\frac{14 \cdot 7}{2} \cdot 2 + 26$
$= 14 \cdot 7 + 26$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$AB = 8k$

$25 - 9k^2 = (x+1)^2$

$16k^2 + x^2 = 25$

$\frac{25-(x+1)^2}{9} = \frac{25-x^2}{16}$

$16 \cdot 25 - (x+1)^2 16 = 9 \cdot 25 - 9x^2$

$7 \cdot 25 = 16(x+1)^2 - 9x^2$

$7 \cdot 25 = 16x^2 - 9x^2 + 32x + 16$

$7x^2 + 32x + 16 - 7 \cdot 25$

$x = 3$

$63 + 96 + 16$

$63 + 100 + 12$

175 подходит

$-\frac{53}{7}$

$(0;0)$ $(-4;8)$ $(1;8)$ $(5;0)$

$(x_1; y_1)$ $(x_2; y_2)$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$y_2 + y_1 \geq 14$

$9 \times 2 = 18 + 2$

$8 \times 3 = 24$

$\frac{(1+19)}{2} \cdot 10$

$6 - 2 = 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

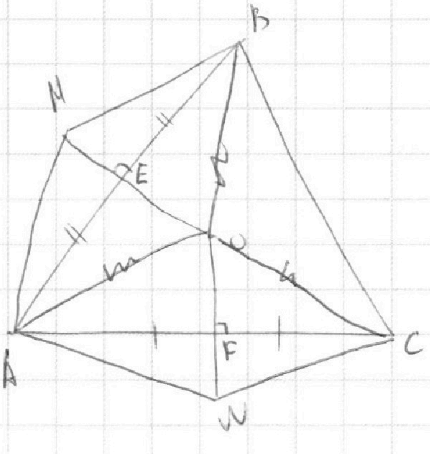
МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



1) Заметим, что O – центр описанной окружности, это точка пересечения серперов

2) Т. к. M и N середины дуг, то $MB = MA$ и $NA = NC$.
$\Rightarrow$ высоты, опущенные из них падают на серпер и являются его продолжением.

3) Заметим, что $ON = OC = OB = OM = OA$

4) $ME = 4.5$; $NF = 2$.