МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ord_2(a)=\alpha_1,\ ord_7(a)=\alpha_2 \qquad ab \,\vdots\, 2^{14}7^{10} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+\beta_1\ge 14\\ \alpha_2+\beta_2\ge 10\end{cases}$

$ord_2(b)=\beta_1,\ ord_7(b)=\beta_2 \qquad bc \,\vdots\, 2^{17}7^{17} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1+\gamma_1\ge 17\\ \beta_2+\gamma_2\ge 17\end{cases}$

$ord_2(c)=\gamma_1,\ ord_7(c)=\gamma_2 \qquad ac \,\vdots\, 2^{30}7^{37} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+\gamma_1\ge 30\\ \alpha_2+\gamma_2\ge 37\end{cases}$

$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{Z})$

$ord_2(abc)=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$
$ord_7(abc)=\alpha_2+\beta_2+\gamma_2$ $\Rightarrow$ требуется найти min $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$ и $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2$

$\begin{cases}\alpha_1+\beta_1\ge 14\\ \beta_1+\gamma_1\ge 17\\ \gamma_1+\alpha_1\ge 30\end{cases} \Rightarrow 2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)\ge 14+17+30=51$

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \ge 26$

$\begin{cases}\alpha_2+\gamma_2\ge 37\\ \beta_2\ge 0\end{cases} \Rightarrow \alpha_2+\gamma_2+\beta_2 \ge 37$

$\begin{cases}abc \,\vdots\, 2^{26}\\ abc \,\vdots\, 7^{37}\end{cases}$ НОД$(2,7)=1$ $\Rightarrow abc \,\vdots\, 2^{26}\cdot 7^{37} \Rightarrow abc \ge 2^{26}\cdot 7^{37}$

Пример: $a=2^9\cdot 7^{10},\ b=2^5,\ c=2^{12}\cdot 7^{27}$

Дробь $\frac{x}{y}$ сократима на k $\Leftrightarrow$ $\overset{НОД}{(x,y)} \vdots k$

$\frac{a}{b}$ несокр. $\Leftrightarrow$ НОД$(a,b)=1$

$m \leq$ НОД$(a+b, a^2-6ab+b^2) = (a+b, a^2-6ab+b^2-(a+b)^2) =$

$= (a+b, -8ab) = (a+b, 8) \leq 8$

докажем, что $(a+b, ab)=1$

Пусть $(a+b, ab) \vdots p$ (p - простое)

$ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p$ (без ог. общн.)

$a+b \vdots p \Rightarrow b \vdots p$ (т.к. $a \vdots p$), $\Rightarrow (a,b) \vdots p$, противоречие

$m \leq 8 \Rightarrow$ наиб. $m=8$

Пример: $a=1$, $b=7$ $\quad \frac{1}{7}$ несокр.

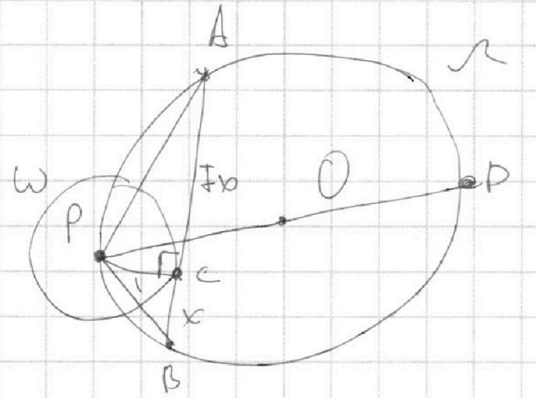
$\frac{7+1}{1^2-6\cdot7\cdot1+7^2} = \frac{8}{1+49-42} = \frac{8}{8} = 1$ сокр. на 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Пусть AC = 7x, CB = x~~

$\cancel{\sin\angle APB = \frac{AB}{2R_{\Omega}} = \frac{8x}{2\cdot 5} = \frac{4x}{5}}$

$\cancel{\cos\angle APB = \sqrt{1-\left(\frac{4x}{5}\right)^2} =}$

$AC = 7x,\ CB = x$

Заметим, что если не фиксировать отношение, и перемещать A по Ω, так чтобы AB оставалось касательной, то AC/CB будет увеличиваться (A лежит на одной из дуг PD (P - центр ω, D - диам. прот. к P точка))

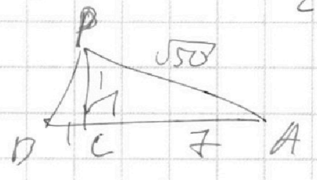
Значит подходит всего одно X.

Докажем, что $x = 1$ подходит. $(AB = 8)$

При $x = 1$ $\triangle ACB$ - равнобедр. прямоуг. (AB - касат. $\Rightarrow \angle PCB = 90°$)

$\angle PBA = 45^0$

$AP = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$



Радиус окр. Ω как оп. окр. $\triangle APB$:

$$R = \frac{AP}{2\sin\angle PBA} = \frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = \frac{10}{2} = 5,$$

ч.т.д.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x$

$\left(\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)=(2-7x)\cdot\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$\left(\sqrt{2x^2-5x+3}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2+2x+1}\right)^2=(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$2x^2-5x+3-2x^2-2x-1=(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$-7x+2=(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}\right)$

$(2-7x)\left(\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}-1\right)=0$

$2x^2-5x+3\geq 0 \Leftrightarrow (2x-3)(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 1 \\ x\geq \frac{3}{2}\end{array}\right.$

~~Если~~ $2x^2+2x+1>0$ при $\forall x$, т.к $D=4-4\cdot 2\cdot 1<0$

Если $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}=1$

$\sqrt{2x^2-5x+3}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x^2+2x+1}\leq 1 \Rightarrow 2x^2+2x+1\leq 1$

$x(x+1)\leq 0$

$-1\leq x\leq 0$

$\sqrt{2x^2+2x+1}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3}\leq 1 \Rightarrow 2x^2-5x+3\leq 1$

$2x^2-5x+2\leq 0$

$(2x-1)(x-2)\leq 0$

$\frac{1}{2}\leq x\leq 2$

$\begin{cases} -1\leq x\leq 0 \\ \frac{1}{2}\leq x\leq 2\end{cases}$, противоречие

Значит $\sqrt{2x^2-5x+3}+\sqrt{2x^2+2x+1}-1\neq 0$

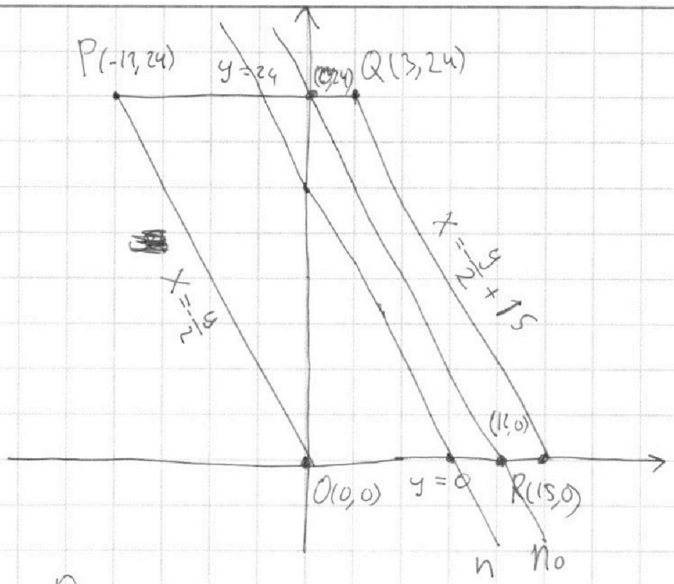
$2-7x=0 \Rightarrow x=\frac{2}{7}$ (x удовл. ус-вию $\left[\begin{array}{l} x\leq 1 \\ x\geq \frac{3}{2}\end{array}\right.$

Ответ: $x=\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Уравнение прямой

OP: $x = -\frac{y}{2}$ (т. P и O подходят)

RQ: $x = -\frac{y}{2} + 15$ (т. R и Q подходят)

Условие того, что пара точек (x_0, y_0) лежит внутри параллелограма, равносильно:

$$\begin{cases} 0 \le y_0 \le 24 \\ -\frac{y_0}{2} \le x_0 \le -\frac{y_0}{2} + 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y_0 \le 24 \\ 0 \le 2x_0 + y_0 \le 30 \end{cases}$$

Докажем, что кол-во решений системы $\begin{cases} 0 \le y_0 \le 24 \\ 2x_0 + y_0 = n \end{cases}$ $(n \in \mathbb{Z},\ 0 \le n \le 30)$

равно 13. ~~Заметим, что при разном n~~

$2x_0 + y_0 = n$ - прямая, пар. PO и QR, т.е. при её сдвиге (при замене n на другое) кол-во решений не изм.

Рассмотрим $n = 24$. Пересеч. $2x_0 + y_0 = 24$ с осями совпадают с пересеч. $2x_0 + y_0$ со сторонами параллелограма, т.е. x0, y0 ≥ 0, причём все такие значения x_0 и y_0 подходят.

$y_0 \ge 0 \Rightarrow 0 \le 2x_0 \le 24$, у x_0 13 реш, т.т.д.

$\underset{n_2}{(2x_2 + y_2)} - \underset{n_1}{(2x_1 + y_1)} = 12$, следовательно любому $0 \le n_1 \le 18$ соответствует $12 \le n_2 \le 30$.

(При $n_1 < 0$ реш нет, при $n_1 > 18$ $n_2 > 30$ и реш нет)

Для фиксированного n_1 решений

$13 \cdot 13 = 169$ (x_2 и y_2; x_1 и y_1 выбираются независимо)

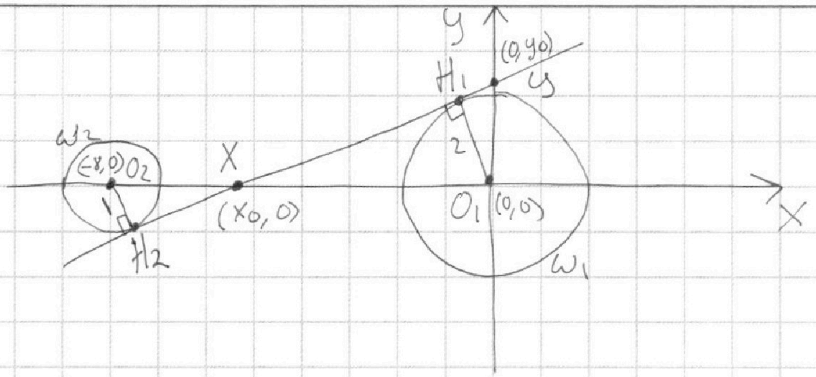
Выбрать n_1 19 способов, значит ответ $19 \cdot 169 = 3221$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$(x+8)^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$ – окружности ω_1 и ω_2 рад. 1 и 2

Из графика очевидно, что они не пересекаются. Решения ур-ний:

$x^2+y^2 \leq 4$ – ~~круг~~ окружность ω_1 и её внутренность

$(x+8)^2+y^2 \leq 1$ – окружность ω_2 и её внутренность

Т.к. окружности не пересекаются, решением

$((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4) \leq 0$ будут окружности ω_1 и ω_2, и их внутренности.

$ax-y+10b=0$ – прямая l с угл. коэф-том a при x.

Если она пересекает оси OY и OX в точках ~~из~~ $Y(0,y_0)$ и $X(x_0,0)$, то $a=-\frac{y_0}{x_0}$.

~~H_1 и H_2 – точки на~~ Если l ~~не~~ проходит внутри одной из окружностей, то решений ~~~~ бесконечно много, если не касается одной из окружностей, то не более 1-го, т.к. со второй окружностью у l

Лист 1 из 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

будет не более 1-го пересечения.
Значит l — общая касательная к ω_1 и ω_2.
H_1 и H_2 — точки касания.

$\triangle XO_1H_1 \sim \triangle XO_2H_2$ (т.к. X — пересечение линии центров и касательной)

$$\frac{XO_1}{O_1H_1} = \frac{XO_2}{O_2H_2} \Rightarrow \frac{|x_0|}{2} = \frac{|x_0+8|}{1} \Rightarrow |x_0| = 2|x_0+8|$$

$$x_0^2 = 4(x_0^2+16x_0+64)$$

$$3x_0^2+64x_0+256=0$$

$$x_0 = \frac{-64 \pm \sqrt{64^2-4\cdot 256\cdot 3}}{6} = \frac{-32\pm16}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\frac{16}{3} \\ x_0 = -16 \end{array}\right.$$

Площадь $\triangle XO_1Y$ 2-мя способами:

$$XO_1 \cdot O_1Y = XY \cdot O_1H_1$$

$$|x_0|\cdot|y_0| = \sqrt{x_0^2+y_0^2}\cdot 2 \Rightarrow x_0^2y_0^2 = 4(x_0^2+y_0^2) \Rightarrow$$

$$y_0^2 = \frac{4x_0^2}{x_0^2-4}.$$

$$a^2 = \frac{y_0^2}{x_0^2} = \frac{4}{x_0^2-4} = \left[\begin{array}{l} \frac{4}{16^2-4} = \frac{1}{60} \\ \frac{4}{\frac{16^2}{3}-4} = \frac{3}{52} \end{array}\right.$$

При любом таком a^2 существуют x_0 и y_0, т.е. существует прямая и существует b.

Значит $\left[\begin{array}{l} a = \pm\sqrt{\frac{1}{60}} \\ a = \pm\sqrt{\frac{3}{52}} \end{array}\right.$

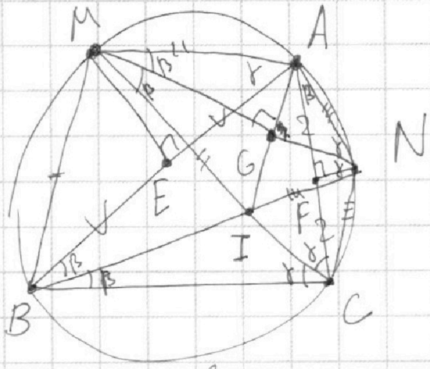
Алет Чец?

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



I – центр впис. окр.

E, F, G – середины AB, AC, AI соотв.

M – середина $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow AM = BM = MI$, CM – бис-са $\angle ACB$ ($\angle BCM = \angle MCA = \gamma$) по лемме о трезубце. Аналогично $AN = NI = NC$, $\angle ABN = \angle CBN = \beta$.

G – середина AI, $AM = MI$ ($\Rightarrow \triangle AMI$ – равноб.) $\Rightarrow MG$ – высота и бис-са $\angle IMA$. $\angle IMA \overset{\text{(по вписанности)}}{=} \angle ABC = 2\beta \Rightarrow \angle IMG = \angle AMG = \beta$.

F – середина AC, $\triangle ANC$ – равноб. ($AN = NC$) $\Rightarrow FN$ – высота и бис-са $\angle ANC$. $\angle NAC = \angle NBC = \beta$ по впис.

Итого $\triangle ANF$ и $\triangle AMG$ – прямоугольные с углом β при вершине, т.е. $AG = AM \sin\beta$, $FN = AF \operatorname{tg}\beta$, $AN = \frac{NF}{\sin\beta}$.

Аналогично $AG = AN \sin\gamma$, $ME = AE \operatorname{tg}\gamma$, $AM = \frac{EM}{\sin\gamma}$.

Также ME и NF – высоты AMB и ANC соотв. $\Rightarrow ME = 4{,}5$; $NF = 2$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{ME}{\operatorname{tg}\gamma}}{\frac{FN}{\operatorname{tg}\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma} \cdot \frac{4{,}5}{2}$$

По т. синусов $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}$

$$\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma} \cdot 2{,}25 \Rightarrow 2{,}25 = \frac{\operatorname{tg}\gamma \cdot \sin 2\gamma}{\operatorname{tg}\beta \cdot \sin 2\beta} = \frac{\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} \cdot 2\sin\gamma\cos\gamma}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta} \cdot 2\sin\beta\cos\beta} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}$$

$$\boxed{\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 1{,}5}$$

Лист 1 из 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AG = AN\sin\gamma = \frac{NF}{\sin\beta}\sin\gamma = NF\,\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 2\cdot 1{,}5 = 3$$

~~Ответ: AI = ...~~

$$AI = 2AG = 6$$

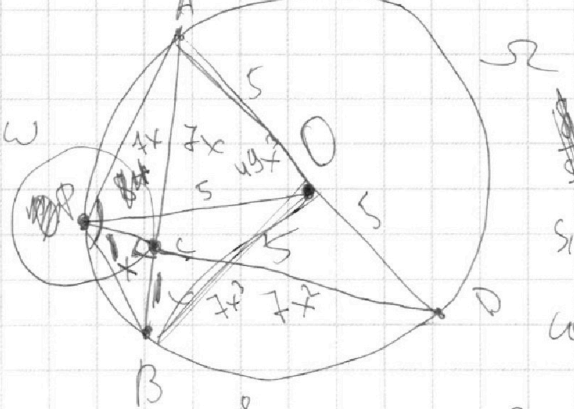
Ответ: $AI = 6$

Лист 2 из 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sin\alpha = \frac{4}{5}x$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}x$

$50x^2$

$50\cdot 9 = 450$

$x^2+1+49x^2+1-2\cdot\frac{3}{5}x\cdot\sqrt{\ }\sqrt{\ }$

$=64x^2$

$49\cdot 9$

$2\frac{3}{5}x\sqrt{\ }\sqrt{\ } = 2-14x^2$

$3x\sqrt{\ }\sqrt{\ } = 5-35x^2$

$2\cdot 5^2\cdot 9$

$349x^6+450x^4+9x^2=$

$5^2\cdot 7^2$

$=1225x^4-350x^2+25$

$9x^2(49x^2+1)(x^2+1)=$

$49x^4+50x^2+1$

$25+35^2x^4-350x^2$

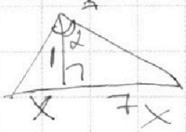
$441x^6-775x^4+341x^2-25=0$

$BP^2 = x\cdot 8x$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}x$

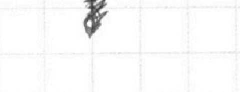
$775 : 5 = 155$, $155 : 5 = 31$

$31\cdot 25$



$8x = \sqrt{\ }\sqrt{\ }\ \frac{4}{5}x$

$1^2+7^2 = 50$



$\frac{\sqrt{50}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 10$

$35\cdot 3 = 105$

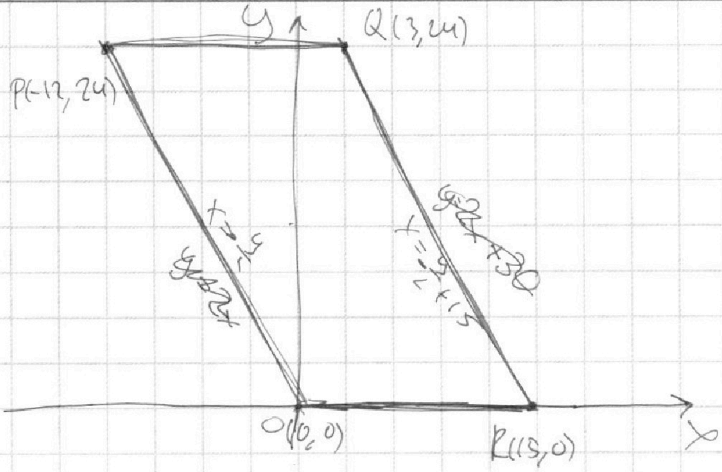
$35\cdot 35 = 1225$

$175\cdot 7 = 1225$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$0 \le y \le 24$

$-\frac{y}{2} \le x \le -\frac{y}{2} + 15$

$-y \le 2x \le y + 30$

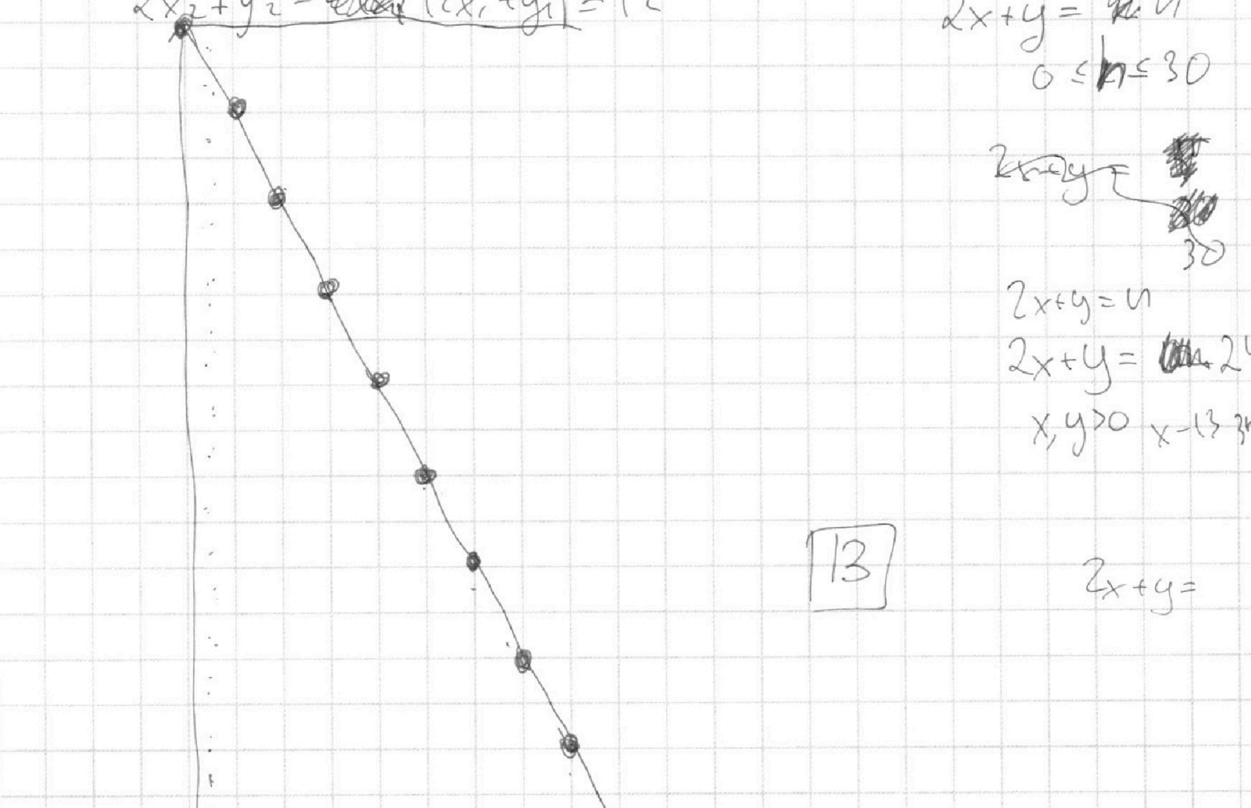
$0 \le 2x + y \le 30$

$2x + y = n$

$0 \le n \le 30$

$2x + y = 30$

$2x_2 + y_2 - (2x_1 + y_1) = 12$



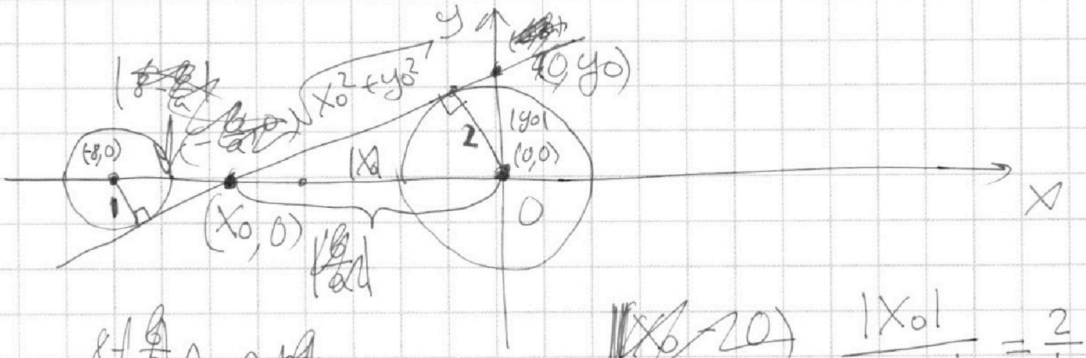
$2x + y = n$

$2x + y = 24$

$x, y > 0$ $x - 13$ знач.

$\boxed{13}$

$2x + y =$



$\frac{|x_0|}{|x_0+8|} = \frac{2}{1}$

$|x_0| = 2|x_0+8|$

$x_0^2 = 4(x_0^2+16x_0+64)$

$3x_0^2+64x_0+256=0$

$x_0 = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2-256\cdot 3}}{3} = \frac{-32\pm 16}{3} = \left[\begin{array}{l} -\frac{16}{3} \\ -16 \end{array}\right.$

$16 = 3\frac{b}{a}$

$x_0 = -\frac{16}{3}$

$x_0 = -\frac{b}{a}$

$y_0 = b$

$a = -\frac{y_0}{x_0}$

$\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cdot 2}{2} = \frac{y_0 x_0}{2}$

$-\frac{y_0}{x_0}$

$4(x_0^2+y_0^2) = x_0^2 y_0^2$

$y_0^2(x_0^2-4) = 4x_0^2$

$y_0^2 = \frac{4x_0^2}{x_0^2-4}$

$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 = \frac{\frac{4x_0^2}{x_0^2-4}}{x_0^2} = \frac{4}{4x_0^2-4} =$

$ax+b=y$

$y_0 = b \quad x_0 = -\frac{b}{a}$

$\frac{y_0}{x_0} = \frac{b}{-\frac{b}{a}} = -a$

$\frac{1}{64-4}$

$a = \frac{y_0}{x_0}$

$\frac{1}{\frac{64}{3}-4} = \frac{3}{64-12} = \frac{3}{52}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{\ } + \sqrt{\ } = 1 - \sqrt{\ }$

$2x^2-5x+3 = 1+2x^2+2x+1-2\sqrt{\ }$

$-7x+1 = 2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$49x^2-14x+1 = 8x^2+8x+4$

$41x^2-22x-3=0$

$5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot 3}$ / 4

$244/4$ 61

$2x^2-5x+3 = 1+2x^2+2x+1-2\sqrt{2x^2+2x+1}$

$2x^2-5x+3\le 1$

$2x^2-5x+2\le 0$

$(2x-1)(x-2)\le 0$

$\frac{1}{2}\le x\le 2$

$2x^2+2x+1\le 1$

$x(x+2)\le 0$

$-2\le x\le 0$

$0\le 2x^2-5x+3$

$0\le(x-1)(2x-3)$

$2x^2+2x+1$

$x\ge 1{,}5$

$2x^2+2x+1\ge$

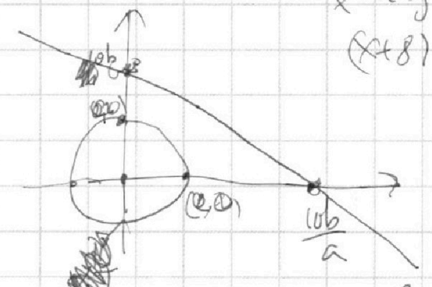
$2\cdot 2{,}25+3+1{,}5$

$4{,}5$

$x^2+y^2-4\le 0$

$(x+8)^2+y^2-1=0$

$y=ax+10b$ — прямая

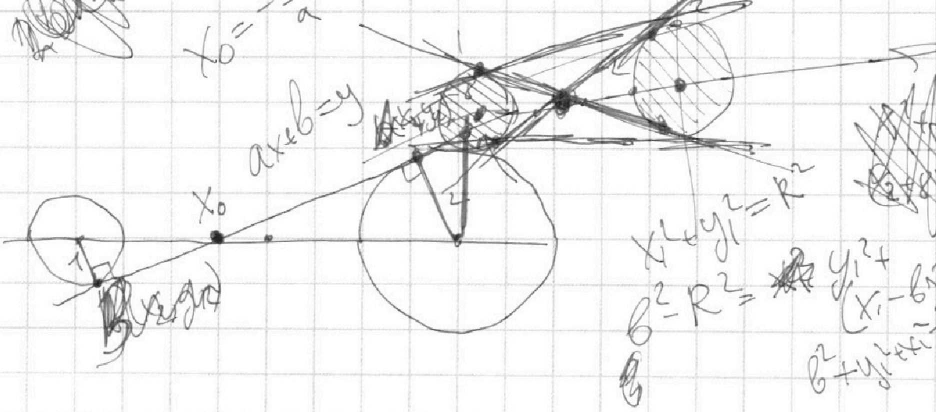


$5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot 2}$ / 5

$bx_1=R^2$

$x_0=-\frac{b}{a}$

$ax+b=y$



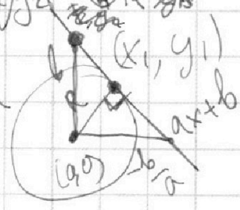
$x_1^2+y_1^2=R^2$

$b^2-R^2 = y_1^2+(x_1-b)^2$

$b^2+y_1^2+x_1^2-2bx_1$

$x^2+y^2=4$

$(x+8)^2+y^2=1$

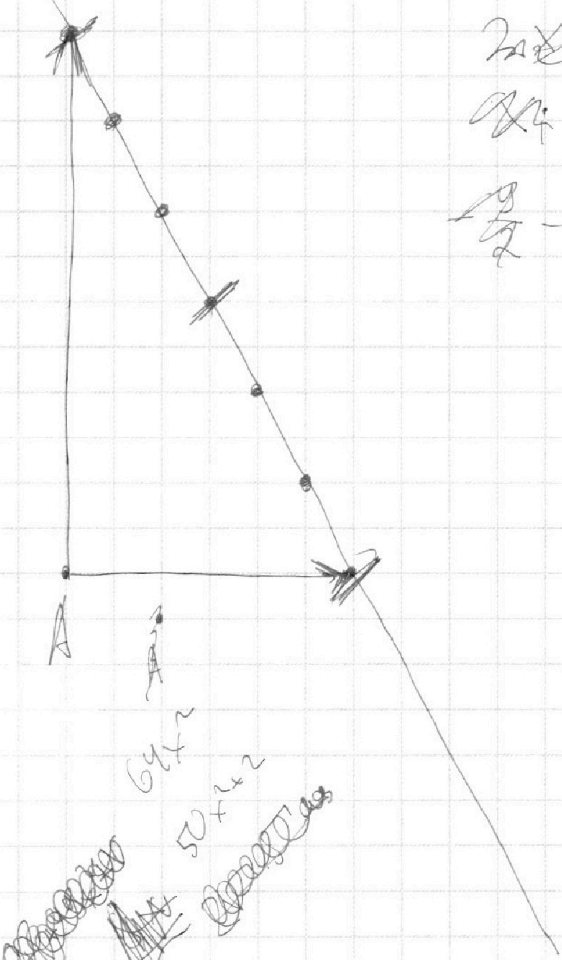


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$0 \le y_i \le 24$

$-\frac{y}{2} \le x_i \le -\frac{y}{2} + $ 15

$-y_1 \le 2x_1 \le -y_1 + 30$

$-y_2 \le 2x_2 \le -y_2 + 30$

$0 \le 2x_1 + y_1 \le 30$

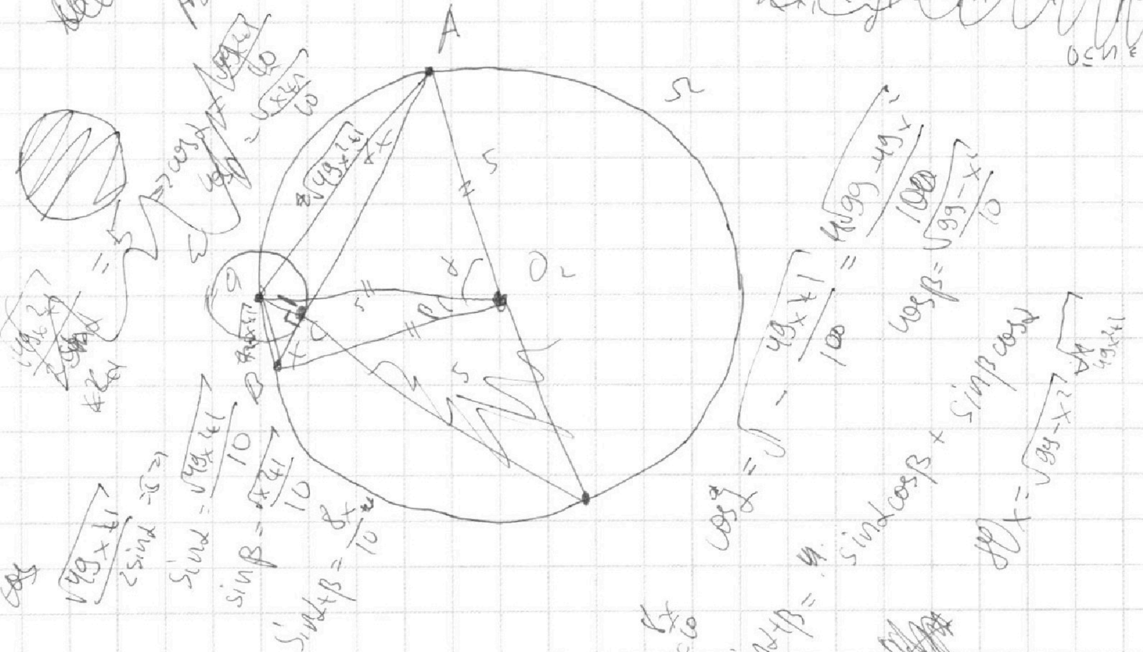
$0 \le 2x_2 + y_2 \le 30$

$(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 12$

$2x_1 + y_1 = 0, 1, 2, 3$

$2x_2 + y_2 = 12, 13, 14, 15$

$0 \le n \le 15$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

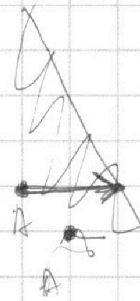
МФТИ

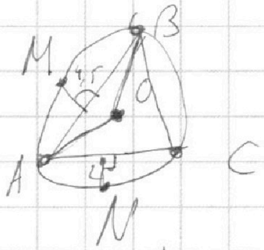
$$\begin{cases} ax+y+tg\,b=0 \\ ((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ (x+8)^2+y^2\le 1 \end{cases}$$

$x_1^2+y_1^2=4-\varepsilon_1$

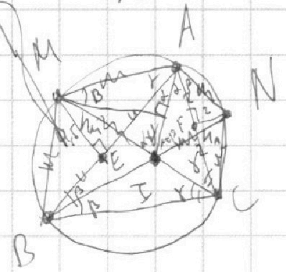
$(x+8)^2+y^2=1-\varepsilon_2$





AI - ?

$\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$



$$\frac{AB}{\sin 2\gamma}=\frac{AC}{\sin 2\beta} \Rightarrow \frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}$$

$h_m = EM = AE\,tg\gamma$

$h_n = NF = AF\,tg\beta$

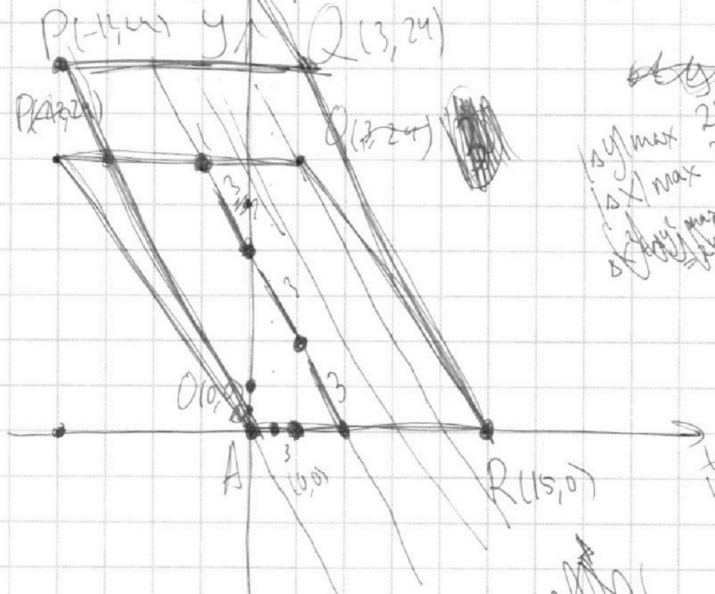
$$\frac{4{,}5}{2}=\frac{EM}{NF}=\frac{AE}{AF}\cdot\frac{tg\gamma}{tg\beta}=$$

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\sqrt{\frac{4{,}5}{2}}=\sqrt{2{,}25}=1{,}5 = \frac{\sin 2\gamma\, tg\gamma}{\sin 2\beta\, tg\beta}=$$

$$=\frac{2\sin\gamma\cos\gamma\cdot\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}}{2\sin\beta\cos\beta\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}$$

$$\frac{AI}{2}=AM\sin\beta=\frac{EM}{\sin\gamma}\cdot\sin\beta= EM\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{4{,}5}{1{,}5}=3$$

$$\frac{AI}{2}=AN\sin\gamma=\frac{NF}{\sin\beta}\cdot\sin\gamma=2\cdot 1{,}5=3 \rightarrow \boxed{AI=6}$$



P(-4, 24) Q(3, 24)

O(0,0) R(15,0)

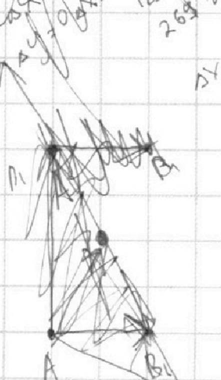
$|\Delta y|_{max}$ 24

$|\Delta x|_{max}$ 27

$2\Delta x+\Delta y=12$

$=5\Delta x^2-48\Delta x+144$

$\Delta x, \Delta y \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab : 2^{14} 7^{10}$

$bc : 2^{17} 7^{17}$

$ac : 2^{20} 7^{37}$

$ord_2(a) = \alpha_1$
$ord_2(b) = \beta_1$
$ord_2(c) = \gamma_1$

34
17
51

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 14$
$\beta_1 + \gamma_1 \geq 17$
$\gamma_1 + \alpha_1 \geq 20$

$2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geq 51$
$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 26$
$\gamma_1 = 12$
$\alpha_1 = 9$
$\beta_1 = 5$

10 17
37
54

$\alpha_2+\beta_2 \geq 10$
$\beta_2+\gamma_2 \geq 17$
$\gamma_2+\alpha_2 \geq 37$
$\alpha_2+\gamma_2+\beta_2 \geq \gamma_2+\alpha_2 \geq 37$
$\beta_2 = 0$
$\gamma_2 = 27$
$\alpha_2 = 10$

$\frac{a}{b}$ $(a,b)=1$

max НОД

$(a+b, a^2-6ab+b^2) =$

$= (a+b, 8ab) = (a+b, 8)$

$(a+b, ab) = 1$ max НОД $= 8$ $m=8$

$a=1, b=7$

$\frac{8}{1-6\cdot1\cdot7+7^2} = \frac{8}{1-42+49} = \frac{8}{8} = 1$

$\frac{24}{\sqrt{6}} \cdot 5 = 24 \cdot \frac{25}{5} + 144$

A, ω, Ω, $7x$, C, x, B

A, ω, Ω, O_1, O_2, B, 5

$8x$?

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} > 2-7x$

$(\sqrt{\ } - \sqrt{\ })(\sqrt{\ } + \sqrt{\ }) = (2-7x)(\sqrt{\ } + \sqrt{\ })$

$2x^2-5x+3-2x^2-2x-1 = (2-7x)(\sqrt{\ } + \sqrt{\ })$

$-7x+2$

37
51

3380
169
3221

$x = 3.5$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$2(x_2-x_1)$

$|AB|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$

1 2 3 4 5 6 7
+ + + + +

$\Delta y = 12 - 2\Delta x$

$2\Delta x + \Delta y = 12$

$\Delta x^2 + \Delta y^2 =$
$= \Delta x^2 + 4\Delta x^2 + 144 - 48\Delta x$
$5\Delta x^2 - 48\Delta x + 144$
$5(\Delta x^2 - \frac{48}{5}\Delta x) + 144$

$Q(3, 14)$, $R(0, 14.5)$, $(0,0)$, $(-14, 24)$

$144 - 5(\Delta x - 4.8)^2$