



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc . $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{24}$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Введем несколько переменных:

$a_2; a_3; a_5$ — стороны вписанной в a 2; 3; 5 соответственно

аналогично $b_2; b_3; b_5; c_2; c_3; c_5$. Все индексы, очевидно, целые и неотрица-
тельные

Из условия: $ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}; ac: 2^{16} \cdot 3^{28} \cdot 5^{28}; bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

Тогда выпишем несколько систем:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6 \\ a_2 + c_2 \geq 18 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 18$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 13 \\ a_3 + c_3 \geq 25 \\ b_3 + c_3 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 \in \mathbb{Z} \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 29,5 \end{cases} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 11 \\ a_5 + c_5 \geq 28 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_5 + b_5 + c_5 \geq 26 \\ a_5 + c_5 \geq 28 \\ b_5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 28$$

Вполне очевидно, что в текущих обозначениях $a_2 + b_2 + c_2; a_3 + b_3 + c_3; a_5 + b_5 + c_5$ — стороны вписанной 2; 3; 5 соответственно в abc

Тогда $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ достижимо, к примеру, при $\begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14} \\ b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14} \end{cases}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Высота делит гипотенузу в отношении 5:2 (из условия),

это даёт нам нормальные токи, то стороны прямоугольного
треугольника как $\sqrt{14} : \sqrt{35} : 7$

вернёмся к координатному методу:

$A(0; \sqrt{14}t)$; $C(0;0)$; $B(\sqrt{35}t; 0)$, где $t > 0$, t — какое-то некое
координатное

Тогда очевидно находим
координаты точки D

Пусть E имеет абсциссу a .
Тогда (если $E \in CD$), ордината
равна $a\sqrt{\frac{5}{2}}$

$AB \parallel EF \Rightarrow CF = BC \cdot \frac{CE}{CB} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ имеет координаты $(\frac{7}{2}a; 0)$

Центр окружности O лежит

где-то на $y = \sqrt{14}t$ (ибо окружность $AO \perp AC$)
из условия

$\rho(A; D) = \rho(E; O) = \rho(F; O)$, так что сер. пер. к AE; ср. пер. к EF и

$y = \sqrt{14}t$ должны пересекаться в одной точке

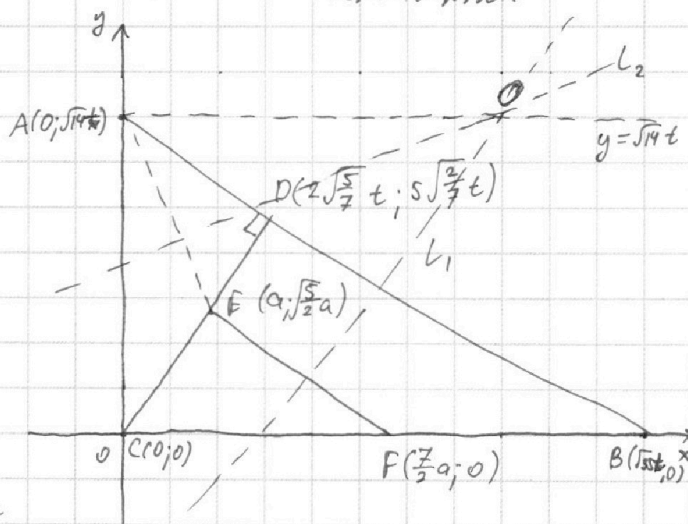
Пусть ср. пер. к EF — L_1 . Тогда $L_1 \perp EF$ и $\rho(L_1; E) = \rho(L_1; F)$,

L_1 задаётся как: $y = \sqrt{\frac{5}{2}}x - \frac{7\sqrt{5}a}{4\sqrt{2}}$

Аналогично найдём L_2 , ср. пер. к AE: $y = \frac{ax}{\sqrt{14}t - \sqrt{5}a} + \frac{\frac{5}{2}a^2 - 14t^2}{2\sqrt{14}t - \sqrt{10}a}$

$(y = \sqrt{14}t) \cap L_1 = (2\sqrt{\frac{7}{5}}t + \frac{7}{4}a; \sqrt{14}t)$

Эта точка должна принадлежать L_2





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Получа: $\sqrt{14}t = \frac{a(2\sqrt{\frac{7}{5}}t + \frac{7}{4}a)}{\sqrt{14}t - \sqrt{\frac{5}{2}}a} + \frac{\frac{3}{2}a^2 - 14t^2}{2\sqrt{14}t - \sqrt{10}a}$

Отсюда $a =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

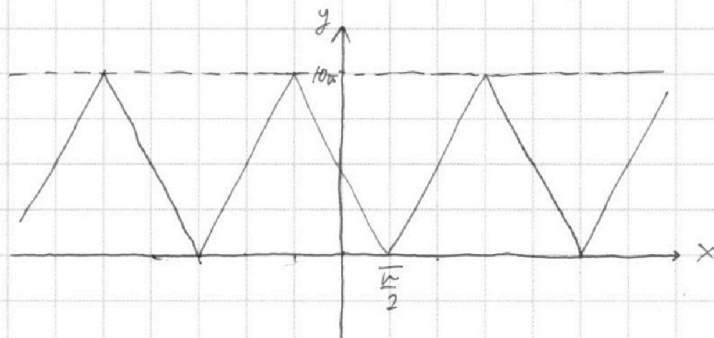
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим графики $y = 10 \arccos(\sin x)$ и $y = 9\pi - 2x$

$y = 10 \arccos(\sin x)$, внешне очевидно, имеет график такого вида:



Поняв периодичность $f(x) = 9\pi - 2x$. Она убывает

$f(-\frac{\pi}{2}) = 10\pi$, а значит при $x \in (-\omega; \frac{\pi}{2})$ решений нет

$f(4,5\pi) = 0$, а значит при $x \in (4,5\pi; +\omega)$ решений нет

Рассмотрим пересечения со всеми фрагментами $10 \arccos(\sin x)$

между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{9\pi}{2}$. Каждый фрагмент имеет угловой координат

10 или -10 , а значит пересекать $9\pi - 2x$ с фрагментами может

либо единицы. Пересечения с фрагментами $[-\frac{\pi}{2}; 0\frac{\pi}{2}]$ и $[3,5\pi; 4,5\pi]$

или две пары рассмотрим $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$, $[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

Первый фрагмент - часть прямой $y = 10x - 5\pi$.

$(y = 10x - 5\pi) \cap (y = 9\pi - 2x) = (1\pi; 4\pi)$, что лежит на фрагменте

Второй - часть прямой $y = 25\pi - 10x$

$(y = 25\pi - 10x) \cap (y = 9\pi - 2x) = (2\pi; 5\pi)$, что лежит на фрагменте

Третий - часть $y = 10x - 25\pi$

$(y = 10x - 25\pi) \cap (y = 9\pi - 2x) = (\frac{17\pi}{6}; \frac{10\pi}{3})$, что лежит на фрагменте

Ответ: $\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{19\pi}{6}\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Удобства ради будем считать, что происхождение
в системе YOX .

Генерид $(x^2+y^2-5^2)(x^2+(y+9)^2-2^2)=0$, очевидно, лежат на
совокупности окружностей $\omega_1((0;0);5)$ и $\omega_2((-9;0);2)$.

$5x+6ay-b=0$ задаёт прямую $x=-\frac{6a}{5}y+\frac{b}{5}$.

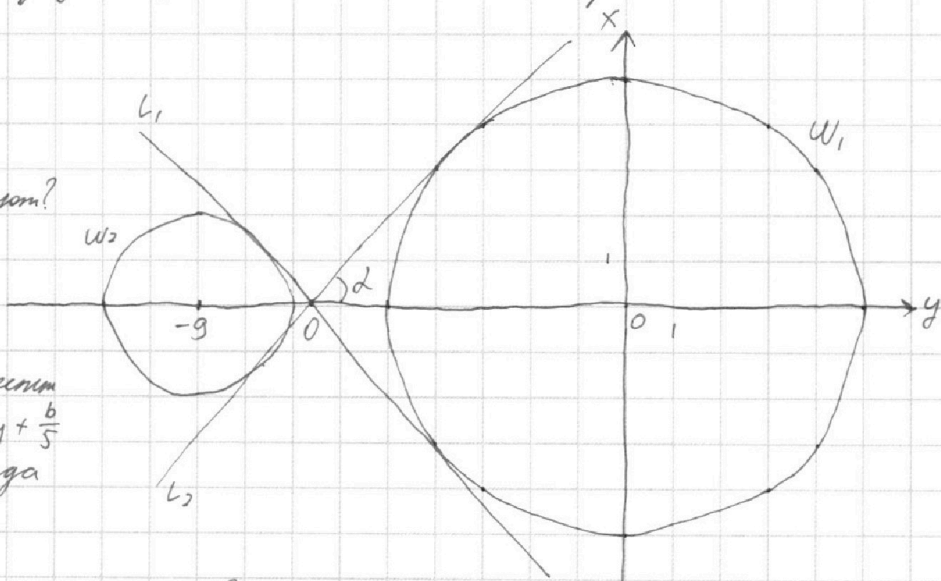
Чтобы система имела 4 решения, прямая должна
пересекать ω_1 и ω_2 в двух точках каждая.

Построим пару общих касательных ^{окружностям} к ω_1 и ω_2 .

касательные
назовём l_1 и l_2 .
 $l_1 \cap l_2 = O$

Что от нас дают?

Поскольку мы
свободно меняем b ,
мы можем переместить
прямую $x=-\frac{6a}{5}y+\frac{b}{5}$
параллельно куда
угодно.



Переместим так, чтобы она проходила через O .

Если $|\frac{6a}{5}|$ больше ^{или равен} углового коэффициента l_1 , то решений 4 не будет.

Действительно: сдвинем прямую в одну сторону - никогда не пересечём,
в обратную сторону - никогда не пересечём ω_2 .

Зная радиусы окружностей и расстояние между центрами, вполне



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

очевидно находим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{4\sqrt{2}}$.

Определим, когда $|\frac{80}{5}| < \frac{7}{4\sqrt{2}}$ $\alpha \in (-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}})$

Ответ: $(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Преобразуем до удобного нам вида данные в условии равенства

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{11} - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{-\frac{2}{3}}{\log_{11} x} - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x - 5 \frac{1}{3} = 0, \log_{11} x \neq 0 \Leftrightarrow \log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x = 5 \frac{1}{3}$$

$$\text{Аналогично } \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{\frac{1}{3}}) - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^5 0,5y + 5 \log_{11} 0,5y + 5 \frac{1}{3} = 0, \log_{11} 0,5y \neq 0 \Leftrightarrow \log_{11}^5 0,5y + 5 \log_{11} 0,5y = -5 \frac{1}{3}$$

Введем в рассмотрение $f(z) = z^5 + 5z$:
① она всегда возрастает
② она ~~всегда~~ не имеет корней

Тогда $f(z) = 5 \frac{1}{3}$ и $f(z) = -5 \frac{1}{3}$ имеют ^{одному} по корню, причем эти корни противоположны

$$\text{Тогда } \begin{cases} f(\log_{11} x) = 5 \frac{1}{3} \\ f(\log_{11} 0,5y) = -5 \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \log_{11} x + \log_{11} 0,5y = 0 \Rightarrow 0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим прямые вида $6x + y = t$, $t \in \mathbb{Z}$

Первое, что можно заметить - прямые такого вида параллельны
отрезкам PQ и QR параллелограмма $PQRO$.

То есть если у прямой такого вида есть ~~любая~~ точка ~~на~~ внутри
параллелограмма, то множество таких точек - отрезок,
параллельный и равный PQ с концами на PQ и RO .

Посмотрим на точки с целыми координатами, таких
отрезков: вполне очевидно, они идут с шагом 6 по ~~у~~ ~~и~~ ~~по~~ ~~у~~, а
поскольку концы отрезка имеют $y = 0$ и 90 , целых точек на
таком отрезке 15 или 16: 16 если есть по точке на концах
и 15 во всех иных случаях. То точки на концах, очевидно, есть,
если $t:6$ для прямой $6x + y = t$, содержащей этот отрезок.

То есть $6x + y = t$ содержит 16 целых точек в $PQRO$, если $t:6$ и
содержит 15 целых точек в $PQRO$ если $t \not: 6$. (Всё верно
только для $t \in \mathbb{Z}; t \in [0; 102]$ ибо иначе прямая и $PQRO$ не пересекается)

Поймем теперь, что все пары $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ такие, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$
лежат на ~~каждой~~ ^{каждой} прямой $6x + y = t_1 - 48$ и $6x + y = t_1$, соответственно, где $t_1 \in \mathbb{Z}$
 $t_1 \in [48; 102]$

Посчитаем количество пар точек $(A; B)$, ~~для~~ ^{для} лежачих на каждой паре
прямых $6x + y = t_1 - 48$ и $6x + y = t_1$, соответственно для каждого ~~допускаемого~~ ^{допускаемого} t_1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку $t_1 \equiv -48 \pmod{6}$, нагр. точек будет 15^2 для $t_1 \not\equiv 6$ и 16^2 для $t_1 \equiv 6$

Среди допустимых t_1 нас 10 развел $t_1 \equiv 6$ и 55 $t_1 \not\equiv 6$.

Значит ответ: $10 \cdot 16^2 + 55 \cdot 15^2 = 2560 + 12375 = 14935$

Ответ: 14935



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

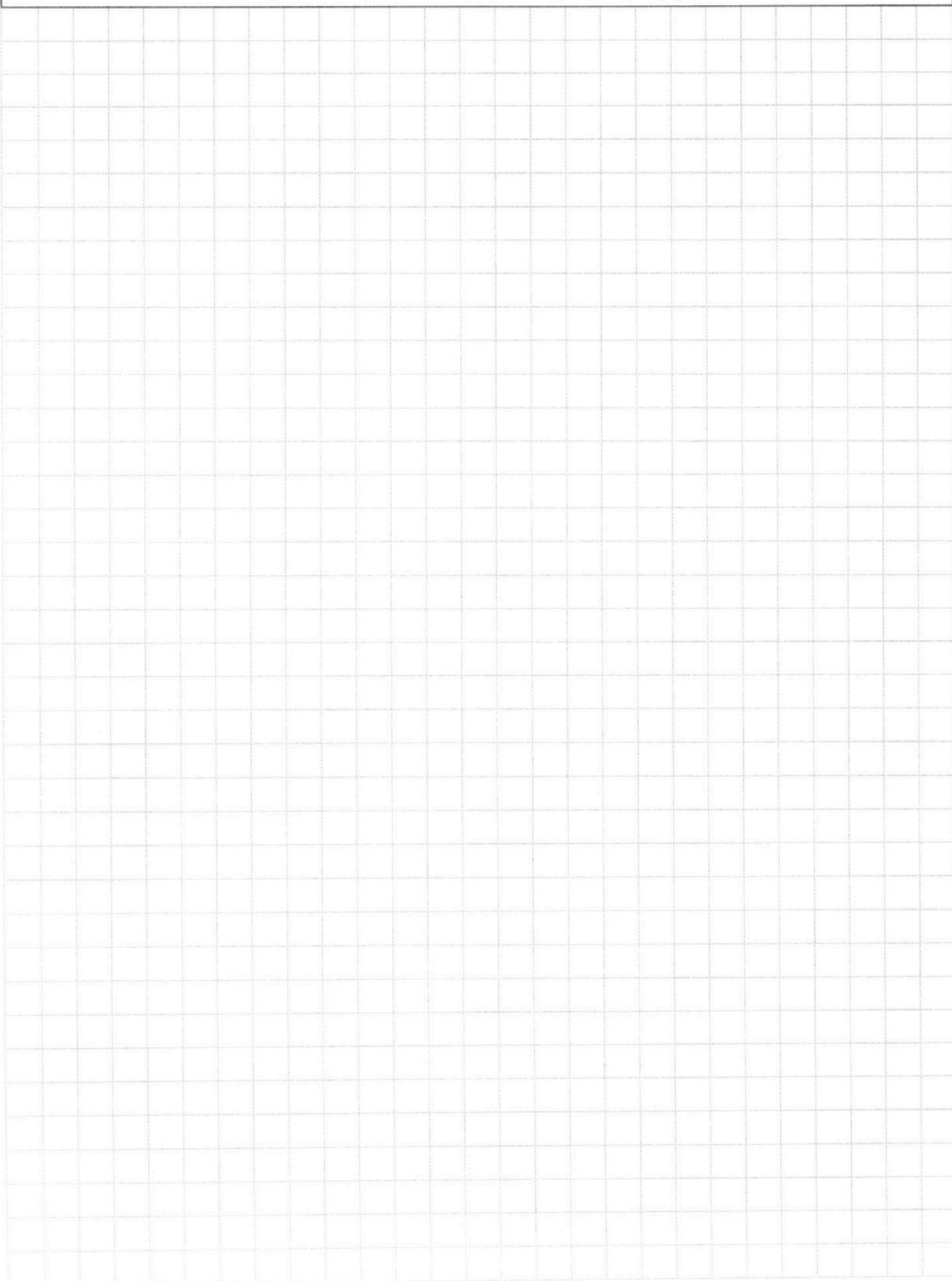
☐

7

☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

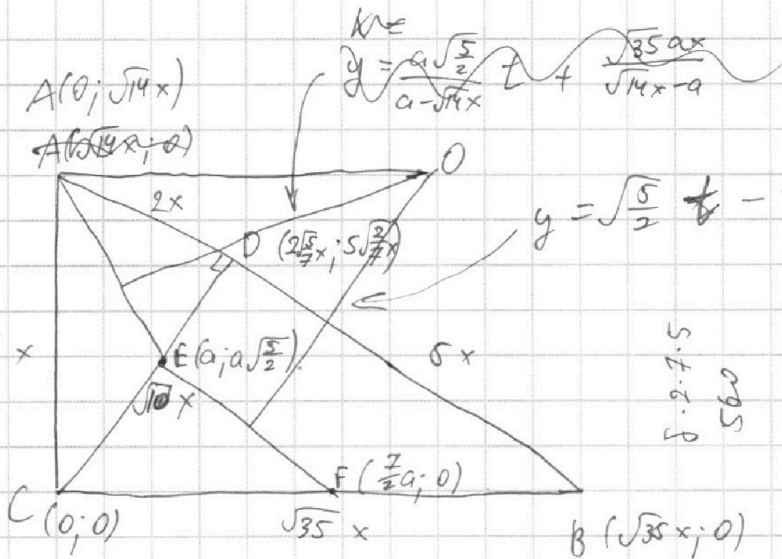
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

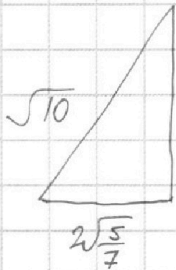


$$2(\sqrt{14}t)(\sqrt{14}t - \sqrt{\frac{5}{2}}a) = 2a(2\sqrt{\frac{7}{2}}t + \frac{7}{4}a) + \frac{3}{2}a^2 - 14t^2$$

$$28t^2 - \sqrt{140}at = 4\sqrt{\frac{7}{2}}at + \frac{7}{2}a^2 + \frac{3}{2}a^2 - 14t^2$$



$$\sqrt{35} \cdot \frac{a}{\sqrt{\frac{10}{7}}} = a \sqrt{\frac{35 \cdot 7}{20}} = a \sqrt{\frac{5 \cdot 7^2}{5 \cdot 2^2}} = a \frac{7}{2}$$



$$5\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{50}{7}}$$

$$100 \cdot 210t^2 - 100 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{250}{35}} = \sqrt{\frac{50}{7}} = 5\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$y = \sqrt{\frac{5}{2}}x - d$$

$$0 = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{7a}{2} - d$$

$$d = \frac{7\sqrt{5}a}{4\sqrt{2}}$$

$$42t^2 - \sqrt{140}at - 4\sqrt{\frac{7}{2}}at - 5a^2 = 0$$

$$25a^2 - a(t(5\sqrt{140} + 4\sqrt{\frac{35}{2}})) + 42t^2 = 0$$

$$10 - \frac{50}{7} = \frac{20}{7}$$

$$y = kx + b$$

$$0 = k\sqrt{14}x + b$$

$$a\sqrt{\frac{5}{2}} = ka + b$$

$$a\sqrt{\frac{5}{2}} = k(a - \sqrt{14}x)$$

$$k = \frac{a\sqrt{\frac{5}{2}}}{a - \sqrt{14}x} \quad b = \frac{\sqrt{35}ax}{\sqrt{14}x - a}$$

$$b = -k\sqrt{14}x = \frac{\sqrt{14}x a \sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{14}x - a} = \frac{\sqrt{35}ax}{\sqrt{14}x - a}$$

$$t^2(25 \cdot 140 + 40 \cdot 70 + 16 \cdot 35 - 100 \cdot 210)$$

$$t^2(3500 + 2800 + 560 - 21000) =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

0:45 → 14/34

1:00 → 18/34

1:15 → 23/34

$$|a| < \frac{7.5}{6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

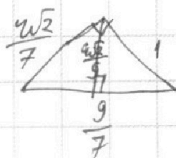
$$y = \frac{a \cdot \frac{9}{2}}{\sqrt{14t} - \sqrt{5}a} + b = \frac{\sqrt{5}a + \sqrt{14t}}{2}$$

$$2b = \sqrt{\frac{5}{2}}a - \sqrt{14t} - \frac{a^2}{\sqrt{14t} - \sqrt{5}a}$$

$$b = \frac{\frac{5}{2}a^2 - (14t^2 - a^2)}{2\sqrt{14t} - \sqrt{10}a}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2 - \left(\frac{1}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{49} - \frac{1}{81}} = \sqrt{\frac{32}{(7 \cdot 9)^2}} =$$

$$\frac{\frac{4\sqrt{2}}{7} \cdot 1}{\frac{9}{7}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$



$$\frac{81}{49} - 1 = \frac{81 - 49}{49} = \frac{32}{49} = \frac{4}{7} \sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{14t}$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}}a - \sqrt{14t} + 2b = \sqrt{\frac{5}{2}}a + \sqrt{14t}$$

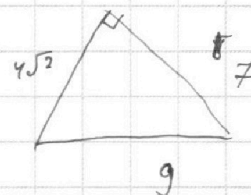
$$y = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}a - \sqrt{14t}}{a} \cdot \frac{a}{2} + 2b = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}a + \sqrt{14t}}{2}$$

$$y = \frac{-\sqrt{14t} + \sqrt{\frac{5}{2}}a}{a}x + b$$

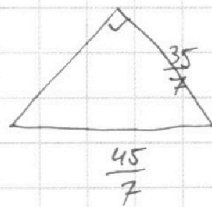
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}a + \sqrt{14t}}{2}$$

$$\frac{7}{4\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$



$$\sqrt{81 - 49} = 32$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



0A

$$\sqrt{14}x = \frac{a\sqrt{\frac{5}{2}}}{a-\sqrt{14}x}t + \frac{\sqrt{35}ax}{\sqrt{14}x-9}$$

$$xa\sqrt{14} - 14x^2 = at\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{35}ax$$

$$b\frac{5}{9} - \frac{5}{9} = \frac{5}{b-9} = x$$

$$t(34/5) = 16$$

$$6t^5 + 25t -$$

$$\begin{aligned} 3t^5 + 15t - 16 &= 0 \\ t &= \log_{14} x \\ 3t^5 + 15t + 16 &= 0 \\ t &= \log_{14} 0.5y \end{aligned}$$

$$\log_{14} x = -\log_{14} 0.5y$$

$$\log_{14} 0.5xy = 0$$

$$xy = 2$$

$$\begin{aligned} f(k) &= 3k^5 + 15k \\ f'(k) &= 15k^4 + 15 = 15(k^4 + 1) \end{aligned}$$

$$C = (k^4 + 1)15$$

$$\log_{14} x - \frac{6}{\log_{14} x} = \frac{\frac{2}{3}}{\log_{14} x} - 5$$

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$t^5 + 5t - 5\frac{1}{3} = 0$$

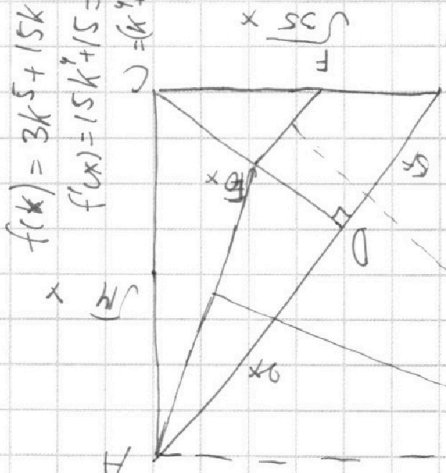
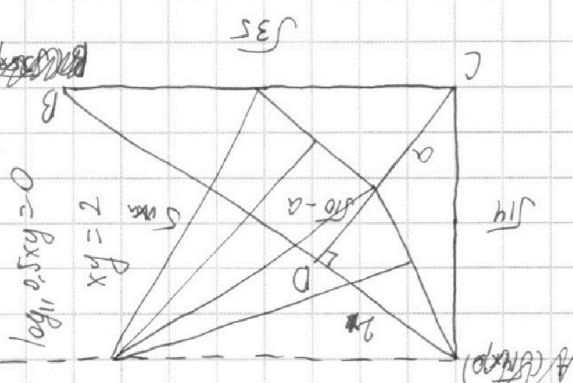
$$(\log_{x^3} 11) =$$

$$= -2 \log_{x^3} 11 =$$

$$= -\frac{2}{3} \log_{x^3} 11$$

$$S_{ACD} / S_{CBF}$$

$$AB = \frac{BD}{x}$$



$$\log_4 \frac{1}{1} = \log_4 1 = -5$$

$$3 \log_5 15 \log_5 16 = 0$$

$$0 = (x^2 - y^2 - (6+y) + x)(x^2 - y^2 - x)$$

$$0 = (x^2 + y^2 + 18y + 7)(x^2 - y^2 - x)$$

$$x^2y - 6xy + x^2y$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



[48; 102]
6-8 6-12 17

$$17-8+1=10$$

$$102-48+1=103-48=55$$

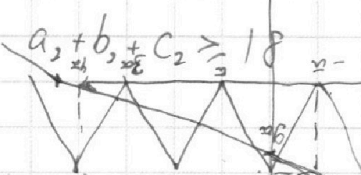
$$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

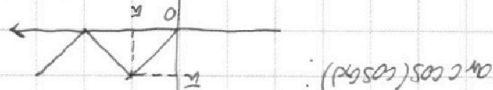
$$a^2 b^3 c^2: 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \\ a_2 + c_2 \geq 16 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 19 \text{ (общо 13)} \\ b_3 + c_3 \geq 21 \rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 + c_3 \geq 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 11 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 28 \\ a_5 + c_5 \geq 28 \end{cases}$$



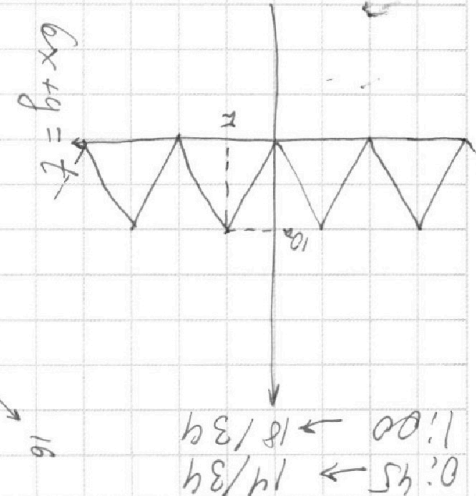
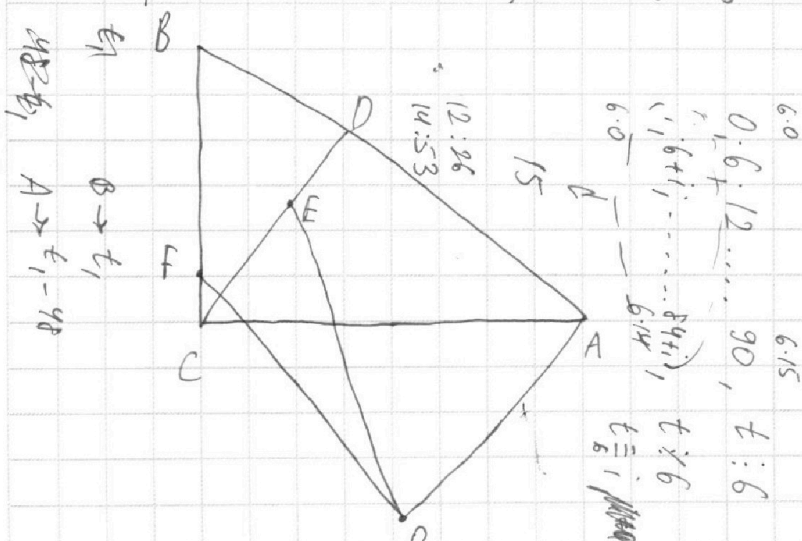
$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

$$\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$48=t$
 $t_1 - 48 \in [0; 102]$ 46
 $t_1 \in [48; 102]$ 59
 $t_1 \in [48; 102]$ 60



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{14}x = \frac{a\sqrt{\frac{5}{2}}t}{a - \sqrt{14}x} + \frac{\sqrt{35}ax}{\sqrt{14}x - a}$$

$$\sqrt{14}ax = \sqrt{\frac{5}{2}}at - \sqrt{35}ax$$

$$ax(\sqrt{14} + \sqrt{35}) - 14x^2 = \sqrt{\frac{5}{2}}at$$

$$\sqrt{7}ax(\sqrt{2} + \sqrt{5}) - 14x^2 = \sqrt{\frac{5}{2}}at$$

$$t = \frac{\sqrt{7}ax(\sqrt{2} + \sqrt{5}) - 14x^2}{\sqrt{\frac{5}{2}}a} = \frac{\sqrt{\frac{14}{5}}x(\sqrt{2} + \sqrt{5}) - 14\sqrt{\frac{2}{5}}\frac{x^2}{a}}{\sqrt{\frac{5}{2}}a}$$

$$t = 2\sqrt{\frac{7}{5}}x + \frac{7}{4}a$$

$$2\sqrt{\frac{7}{5}}x + \frac{7}{4}a =$$

$$\sqrt{14}x = \sqrt{\frac{5}{2}}t - \frac{7\sqrt{5}a}{4\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{14}x \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = t - \frac{7}{4}a$$

$$\sqrt{\frac{28}{5}}x + \frac{7}{4}a = t$$

$$2\sqrt{\frac{7}{5}}x + \frac{7}{4}a = t$$

$$16^2 = 256$$

$$\begin{array}{r} 1125 \\ \times 225 \\ \hline 5625 \\ 2250 \\ 11250 \\ \hline 253125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11250 \\ + 2375 \\ \hline 14935 \\ + 450 \\ \hline 200 \\ + 1125 \\ \hline 14935 \end{array}$$

$$16:9/$$

$$9:5/1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$25a - 10x = 9a - 2x$$

$$16a = 8x$$

$$x = 2a$$

$$10x - 25a = 9a - 2x$$

$$12x = 34a$$

$$x = \frac{17a}{6}$$

$$9a - \frac{17a}{3}$$

$$\frac{27a}{3} - \frac{17a}{3} = \frac{10a}{3}$$

3

$$0 = (x, y, z)$$

$$10x - 5a = 9x - 2a$$

$$x = 3a$$

$$10x - 5a = 9x - 2a$$

$$12x = 14a$$

$$x = \frac{7a}{6} = 1,1\bar{6}a$$

$$\frac{70}{6} - 5 = \frac{70 - 30}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

