МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$m \geqslant 3 \cdot 5^{10}$.

$k \vdots 3 \to k \geqslant 3$

$n \geqslant 3$

$\to kmn \geqslant 3^3 5^{10}$.

$abc \geqslant 2^{17} 3^{27} 5^{34} \sqrt{3^4 5^{10}} = 2^{17} 3^{29} 5^{39}$.

Пример: $a = 2^5 3^8 5^{12}$, $b = 2^3 3^7$, $c = 2^{9} 3^{14} 5^{27}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} k$, $k, m, n \in N$.
$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17} m$
$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} n$

$\to b = \frac{2^8 3^{14} 5^{12} k}{a} = \frac{2^{12} 3^{20} 5^{17} m}{c}$.

$\to \frac{c}{a} = 2^4 3^6 5^5 \frac{m}{k}$.

тогда $ac \cdot \frac{c}{a} = c^2 = 2^{16} 3^{27} 5^{44} \frac{nm}{k}$.

$\to c = 2^8 3^{13} 5^{22} \sqrt{\frac{3nm}{k}}$.

$ac \cdot \frac{a}{c} = a^2 = 2^{10} 3^{15} 5^{34} \frac{nk}{m}$ $\to a = 2^5 3^7 5^{17} \cdot \sqrt{\frac{3nk}{m}}$.

$b = \frac{2^3 3^7 k}{5^5} \sqrt{\frac{m}{3nk}} = \frac{2^3 3^7}{5^5} \sqrt{\frac{km}{3n}}$

тогда $\sqrt{\frac{3nm}{k}} \in Z$, $\sqrt{\frac{3nk}{m}} \in Z$, $\sqrt{\frac{km}{3n}} \in Z$.

~~При этом~~ $\cancel{ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (2^3 3^1}$

При этом $abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = 2^{17} 3^{27} 5^{34} \sqrt{3kmn}$.

значит $\sqrt{3kmn} \in Z$

$\sqrt{\frac{3nm}{k}} \in Z \to k \vdots 3$ $\sqrt{\frac{3nk}{m}} \in Z \to m \vdots 3$

$\sqrt{\frac{km}{3n}} \in Z$ $\cancel{\to km \vdots 3n}$ ~~но~~ $\cancel{km \vdots 9 \to}$

$\cancel{k \geq 3, m \geq 3, n \geq 1}$.

$\to$ $\cancel{abc \geq}$

$\sqrt{3kmn} \in Z$ тогда степень вхождения 3 в n - нечетная $\cancel{\to n \geq 3}$. $\to n \geq 3$

$\cancel{\to k \geq 3, m \geq 3, n \geq 3 \to kmn \geq 3^3}$

$\to \cancel{abc \geq 2^{17} 3^{27} 5^{34} \cdot 3^2} = 2^{17} 3^{29} 5^{34}$

~~Пример:~~ $\cancel{a = 2^8 3^{15} 5^{12}, b =}$

$a = \cancel{2^5 3^7 5^{17} \cdot 3}$, $b =$

$b \in N \to \sqrt{\frac{m}{3nk}} \vdots 5^5 \to \frac{m}{3nk} \vdots 5^{10}$. $\to m \vdots 5^{10}$.

т.к. $m \vdots 3$ то $m \vdots 3 \cdot 5^{10}$.

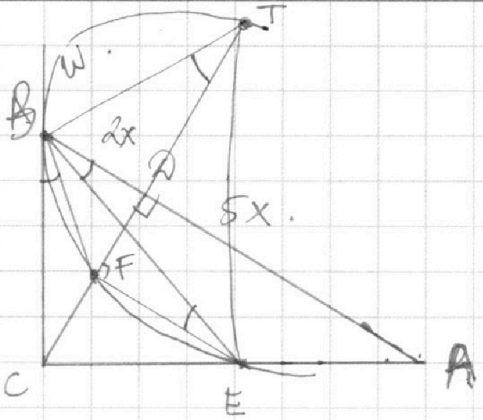
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Дано: $\triangle ABC$
$\angle C = 90^\circ$
$\omega \cap BC = \omega$.
$CD \perp AB$
$\omega \cap CD = F$
$\omega \cap AC = E$
$AB \parallel EF$
$AD : DB = 5 : 2$
$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$ — ?



Решение: Пусть $BD = 2x$, $AD = 5x$
$\to AB = 7x$.

$\triangle BDC \sim \triangle ABC \to \frac{BC}{BD} = \frac{7x}{BC}$ $\quad BC^2 = 14x$

$BC = x\sqrt{14}$.
$AC = x\sqrt{35}$.

$\angle CBF = \angle BEF = \angle ABE$
$T = \omega \cap CD$
$BC^2 = CF \cdot \cancel{B}T$
$14x = CF \cdot (CF + \sqrt{ET^2 - EF^2})$ ^{38}

$\angle TFE = 90^\circ \to TE$ - диаметр ω.

$\sin$ $\frac{EF}{CF} = \frac{AD}{DC}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$

$\Leftrightarrow 10\left(\frac{\pi}{2}-\arccos(\cos x)\right)=\pi-2x.$

$\Leftrightarrow 4\pi+2x=10\arccos(\cos x).$

~~$\Leftrightarrow 4\pi+2x=10(x+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$~~

По ОДЗ уравнение:

$-5\pi\le\pi-2x\le5\pi \Leftrightarrow \quad -4\pi\le2x\le6\pi \Leftrightarrow -2\pi\le x\le3\pi$

① $x\in[-2\pi;-\pi]$.

Уравнение равносильно:

~~$4\pi+2x=10(-x+\pi$~~ $\quad 4\pi+2x=10($

$4\pi+2x=10(x+2\pi)$

$\Leftrightarrow 8x+16\pi=0.$

$\Leftrightarrow x=-2\pi.$

② $x\in[-\pi;0]$

$4\pi+2x=10(-x) \Leftrightarrow 4\pi+12x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}.$

③ $x\in[0;\pi]$

$4\pi+2x=10x. \Leftrightarrow 4\pi=8x \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}.$

④ $x\in[\pi;2\pi]$

$4\pi+2x=10(-x+2\pi) \Leftrightarrow 12x=16\pi. \Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{3}.$

⑤ $x\in[2\pi;3\pi]$.

$4\pi+2x=10(x-2\pi) \Leftrightarrow 4\pi+2x=10x-20\pi \Leftrightarrow 24\pi=8x \Leftrightarrow x=3\pi.$

Ответ: $-2\pi;\ -\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{4\pi}{3};\ 3\pi.$

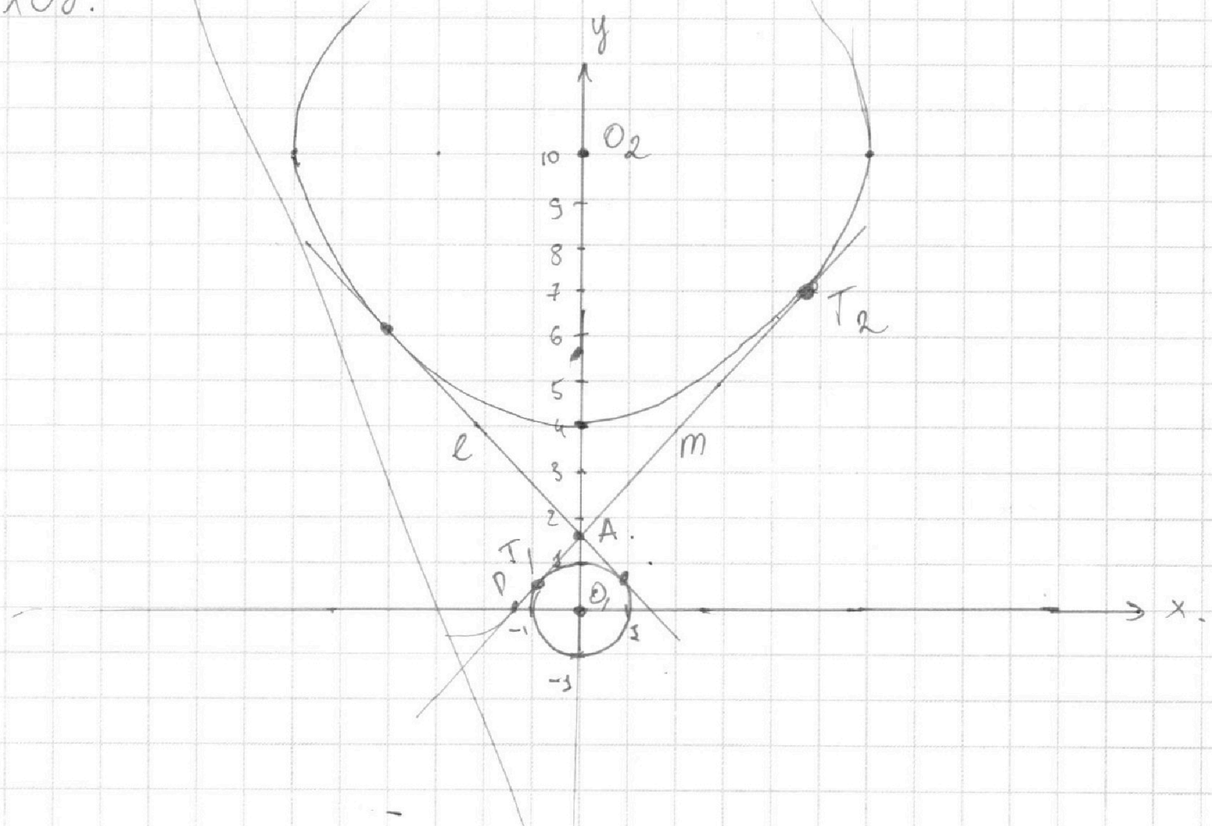
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right. \end{cases}$$

Изобразим график системы в системе координат XOY.



Графиком 1 уравнения является некоторая прямая, 2 уравнения ($x^2+y^2=1$) — окружность с центром (0;0) и радиусом 1, 3 уравнения — окружность с центром (0;10) и радиусом 6. ~~т.к. окружности~~ решения системы изображаются точками пересечения прямой и окружностей.

Изобразим l и m — общие касательные к окружностям. Т.к. окружности симметричны относительно OY, то и l, m — симметричны относительно OY. Пусть $l \cap m = A$. Тогда $A \in OY$. Пусть $A(0;a)$.

Тогда большая окружность получается из меньшей через гомотетию относительно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

точки A с коэффициентом (−6). Значит $\frac{O_1A}{O_2A} = \cancel{\frac{6}{1}}\ \frac{1}{6}$.

$\Leftrightarrow \frac{q}{10-q} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow q = \frac{10}{7}$.

Пусть $m: kx + \cancel{b}$ тогда $a = t = \frac{10}{7}$

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y = kx + \frac{10}{7} \\ k>0 \end{cases}$ имеет 1 решение.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-y^2 = x^2 \\ y = kx + \frac{10}{7} \\ k>0 \end{cases}$ ~~Т.к. абсцисса точки касания~~ m с ~~меньшей окружностью положительна~~;

~~$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = kx + \frac{10}{7}$.~~

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 = k^2x^2 + \frac{20}{7}kx + \frac{100}{49} \\ x^2+y^2=1 \\ k>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$m: kx + \frac{10}{7}$. Пусть T_2 − т. касания m с большей окружностью, T_1 − с меньшей, $P = m \cap OX$

$\sin\angle O_2AT_2 = \frac{6}{\left(\frac{60}{7}\right)} = \frac{7}{10}$.

$\angle APO_1 = 90 - \angle O_2AT_2$

$\to \cos\angle APO_1 = \frac{7}{10}$. $\sin\angle APO_1 = \sqrt{1-\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$\to \operatorname{tg}\angle APO_1 = \frac{\sqrt{51}}{7} \to k = \frac{\sqrt{51}}{7}$.

$\to m: \frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$.

Из симметрии: $l: -\frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$.

Все прямые пересекающие каждую окружность в 2 точках находятся между l и m, и проходящие через A

тогда: $-\frac{\sqrt{51}}{7} < \frac{a}{3} < \frac{\sqrt{51}}{7} \Leftrightarrow -3\frac{\sqrt{51}}{7} < a < \frac{\sqrt{51}}{7}\cdot 3$

$\frac{4}{3}b = \frac{10}{7} \to b = \frac{3}{4}\cdot\frac{10}{7} = \frac{15}{14}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Если $\frac{a}{3}x \notin (-\infty; \frac{\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty)$ общих точек прямой и окружностей ≤ 2

Иначе перенесем прямую так, чтобы она проходила через A. тогда точек пересечения будет 4

Ответ: $(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{51}}{7}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

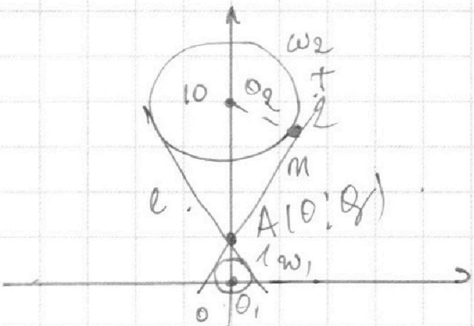
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4. $\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b. \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \end{array}\right. \end{cases}$

Изобразим график системы в XOY:



~~Но~~ $x^2+y^2=1$ – окружность с центром $(0;0)$ и радиусом 1. $x^2+(y-10)^2=6^2$ – Окружность с центром $(0;10)$ и радиусом 6.

$y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$ – некоторая прямая.

Пусть l и m – общие касательные окружностей
$l\cap m=A(0;q)$

2 окружность получается из первой через гомотетию относительно A с коэффициентом (-6).

тогда $O_1A:O_2A=1:6$.

$\rightarrow \frac{q}{10-q}=\frac{1}{6} \rightarrow q=\frac{10}{7}$.

$m: kx+\frac{10}{7}$, где k - некоторое число.

Пусть $k>0$. , $m\cap\omega_2=T$

$\sin\angle O_2AT=\frac{6}{\frac{60}{7}}=\frac{7}{10}$

$\rightarrow k=\operatorname{ctg}\angle O_2AT=\frac{\frac{\sqrt{51}}{10}}{\frac{7}{10}}=\frac{\sqrt{51}}{7}$.

тогда l: $-\frac{\sqrt{51}}{7}+\frac{10}{7}$.

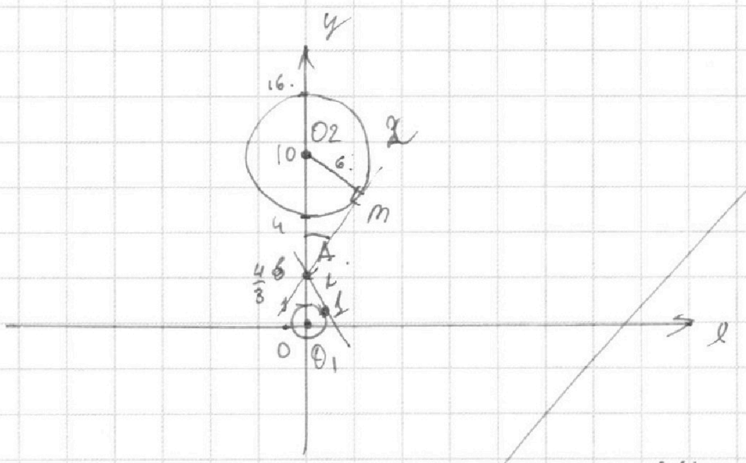
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Если $a=0$
то прямая будет
горизонтальной и
пересечений будет ≤ 2.



Пусть ~~l~~ прямая пересекает OY в $A(0;\frac{4b}{3})$
Найдем касательного k и m к 1 и 2 окружностям.
~~Для удобства рассмотрим $a>0$~~:
Угол между m и OY — α

$\sin\alpha = \frac{6}{O_2A} = \frac{6}{10-\frac{4b}{3}} = \frac{18}{30-4b} = \frac{9}{15-2b}$

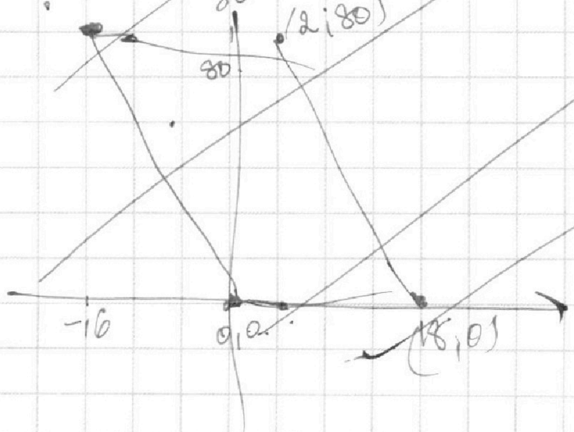
Пусть $m: kx+\frac{4b}{3} \to |k| = ctg\,\alpha = \frac{\sqrt{1-\frac{81}{(15-2b)^2}}}{\left(\frac{9}{15-2b}\right)}$

$l: px+\frac{4b}{3}$

Угол между l и OY — β:

$\sin\beta = \frac{1}{\frac{4}{3}b} = \frac{3}{4b} \to |p| = ctg\,\beta = \frac{\frac{\sqrt{17}}{4b}}{\left(\frac{3}{4b}\right)} = \frac{\sqrt{17}}{3}$

Тогда $\frac{a}{3} \in (-\infty; -\min\{|k|,|p|\}) \cup (\min\{|k|,|p|\}; +\infty)$



$A(x_1;y_1)$
$B(x_2;y_2)$ $\in Z$.
$5x_2-5x_1+y_2-y_1=45$
$5(x_2-x_1-9)=y_1-y_2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3.$

Пусть $t = \log_5(2x)$. из ОДЗ ур-ие $t \neq 0$.
Уравнение примет вид:

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3t^5 - 9 - 4 + 9t}{3t} = 0 \Leftrightarrow \frac{3t^5 + 9t - 13}{t} = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^5 + 9t - 13 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$
Пусть $p = \log_5 y$.

Уравнение примет вид.

$$p^4 + \frac{4}{p} = \frac{-1}{3p} - 3 \Leftrightarrow \frac{3p^5 + 12 + 1 + 9p}{3p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3p^5 + 9p + 13}{p} = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} 3p^5 + 9p + 13 = 0 \\ p \neq 0 \end{cases}$$

Составим систему:

$$\begin{cases} 3t^5 + 9t - 13 = 0 \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \\ p \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^5 + 3p^5 + 9t + 9p = 0. \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \\ p \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t+p)(t^4 - t^3p + t^2p^2 - tp^3 + p^4) + 3(t+p) = 0. \\ p \neq 0 \\ t \neq 0 \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p + t = 0. \\ t^4 - t^3p + t^2p^2 - tp^3 + p^4 + 3 = 0 \end{array}\right. \\ p \neq 0 \\ t \neq 0 \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{p + t = 0} \quad \left(\frac{t}{p}\right)$$

$f(t) = 3t^5 + 9t - 13$. $f'(t) = 15t^4 + 9 > 0$ при $\forall t$.
$\rightarrow f(t)$ возрастает на R
$\rightarrow f(t) = 0$ имеет 1 решение.
Аналогично $3p^5 + 9p + 13$ имеет 1 решение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случай $p+t=0$.

тогда. $p=-t$.

$0=3p^5+9p+13=-3t^5-9t+13=-(3t^5+9t-13)=0$
значит случай $p+t=0$ удовлетворяет системе (*). Если $p\neq 0$ и $t\neq 0$.

~~Система примет вид~~:
$p+t=0=\log_5 y+\log_5(2x)=\log_5(2xy)$, $y>0$.

$2xy=1$, $y>0$

$xy=\frac{1}{2}$.

$f(t)=3t^5+9t-13$ возрастает на R т.к

$f'(t)=15t^4+9>0$ при $\forall t\in R$.
значит $3t^5+9t-13=0$ имеет единственное решение.
аналогично $3p^5+9p+13=0$ имеет единственное решение.
заметим, что $p=-t_0$ - решение уравнения. где t_0-корень $3t^5+9t-13=0$
Значит

$$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}p+t=0\\p\neq 0\\t\neq 0\\3p^5+9p+13=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p+t=0\\3p^5+9p+13=0\end{cases}$$

$$p+t=0\Leftrightarrow\log_5 y+\log_5 2x=0\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5(2xy)=0\\y>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2xy=1\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow xy=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

б) Пусть O - центр Ω.

$ON \perp BCS. \to ON \perp SN$

$\to \triangle SON$ - прямоугольный

~~$\to OS = 5$~~

$\to OS = \sqrt{25+16} = \cancel{\sqrt{8}} = \sqrt{41}$.

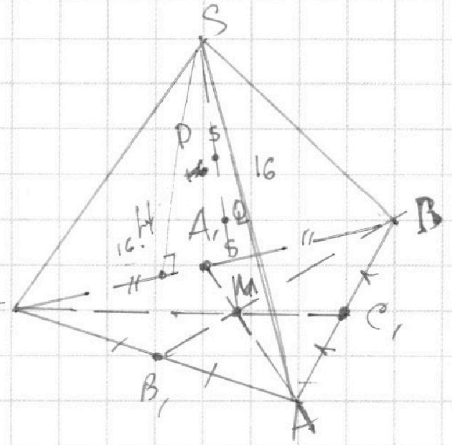
$S_{BCS} \cos \angle SBCA = S_{BCM}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
						X

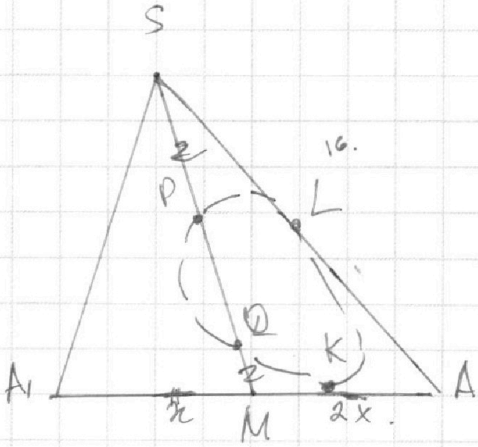
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:
$SABC$.
AA_1, BB_1, CC_1 – медианы $\triangle ABC$
$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = M$.
сфера Ω
Ω касается AS в L
Ω касается (ABC) в K,
$K \in AM$.
$\Omega \cap SM = \{P, Q\}$
$SP = MQ$.
$S_{ABC} = 100$
$SA = BC = 16$.
а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1$ – ?
б) $\angle SBCA$ – ?
Ω касается BCS в N
$SN = 4$
радиус Ω равен 5



Решение:
а) Рассмотрим $\triangle SA_1A$.
Пусть $\omega = \Omega \cap SA_1A$.
тогда ω – окружность.
$\deg_\omega S = SP \cdot SQ = SL^2$

$SL^2 = SP \cdot SQ =$
$= SP(SP + SQ) =$
$= MQ \cdot MP = \deg_\omega M =$
$= MK^2$.



как известно:
$\Rightarrow SL = MK$. $LA = AK$
значит $SA = MA$.
значит $MA = 16$.
тогда $AA_1 = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24$.

$MA_1 = \frac{16}{2} = 8$. $CA_1 = 8$.
$S_{CA_1M} = S_{BMC}/2 = \frac{S_{ABC}}{6} = \frac{100}{6} = \frac{CA_1 \cdot A_1M}{2} \sin \angle CA_1M$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{100}{6} = 32 \sin\angle CA_1M.$

$\sin\angle CA_1M = \frac{100}{6\cdot 32} = \frac{25}{48}.$

$\cos\angle CA_1M = \sqrt{\frac{48^2-25^2}{48^2}} = \frac{\sqrt{23\cdot 73}}{48}$ (не умаляя общности $\cos\angle CA_1M \geq 0$).

по теореме косинусов $\triangle CA_1M$:

$CM^2 = 2\cdot 8^2 - 2\cdot 8^2 \cdot \frac{\sqrt{23\cdot 73}}{48} = \frac{128(48-\sqrt{23\cdot 73})}{48} =$

$= \frac{26}{6}(48-\sqrt{23\cdot 73}) = \frac{13}{3}(48-\sqrt{23\cdot 73})$

$CM = \sqrt{\frac{13}{3}(48-\sqrt{23\cdot 73})}$

$CC_1 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{13}{3}(48-\sqrt{23\cdot 73})}$

$= \frac{2\cdot 8^2}{48}(48-\sqrt{23\cdot 73}) = \frac{8^2}{3\cdot 8}(48-\sqrt{23\cdot 73}) =$

$= \frac{8}{3}(48-\sqrt{23\cdot 73})$

$CM = 2\sqrt{\frac{2}{3}(48-\sqrt{23\cdot 73})}$

$CC_1 = 3\sqrt{\frac{2}{3}(48-\sqrt{23\cdot 73})} = \sqrt{6(48-\sqrt{23\cdot 73})}$

$\cos\angle MA_1B = -\frac{\sqrt{23\cdot 73}}{48}$. По теореме косинусов $\triangle MA_1B$:

$BM^2 = \frac{2\cdot 8^2(48+\sqrt{23\cdot 73})}{48}$

$BB_1 = \sqrt{6(48+\sqrt{23\cdot 73})}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24\cdot 6\cdot \sqrt{48^2-23\cdot 73} = 24\cdot 6\cdot 25.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$15t^4+9$

$$\begin{cases} ax-3y+46=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$

$x^2+(y-10)^2=36$

4 реш.

$\frac{2x}{t}=\frac{t}{\sqrt{x}}$

$t=x\sqrt{35}$

$x^2 35 = a\cdot(a+\sqrt{4R^2-a^2})$

$35x^2=CF\cdot(CF+\sqrt{D^2-EF})$

$CF=\frac{35x^2}{2r}$

$\sin\alpha=\frac{x\sqrt{35}}{4x}$

$BC^2=CE\cdot ET$

$35x^2=CE\cdot ET$

$=CF\cdot D$

$=2rCF$

$\frac{50}{3}=8$

$\frac{25}{3\cdot 16}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

$\frac{1}{5}, \frac{1}{3} \log_y \frac{5}{5}$

$-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$.

$\log_5 2x = t$.

$\cos x > 0$ то $\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$.

5π

$\frac{10\pi}{2}$ $\frac{10}{}\arccos(\cos x) = \pi - 2x$.

$\frac{t^5 - 3 - \frac{4}{3} + 3t}{t} = 0$

$4\pi + 2x = \arccos(\cos x)$

-2π

$-\pi$ 0

$-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$

$-4\pi \le 2x \le 6\pi$

$-2\pi \le x \le 3\pi$

$-\frac{\pi}{2}$.

$\frac{3t^5 - 9 - 4 + 9t}{t} = 0$

$-pt(t^2+p^2)$
$+t^4+p^4$

~~$4\pi + 2x = x + 2\pi n, n \in z$.~~

$3t^5 + 9t - 13 = 0$.

4π

$4\pi + 2x = \pm x + 2\pi n$, $\cos x > 0$

$3t(t^4 + 3) - 13 = 0$.

$-x + 2\pi n$, $\cos x < 0$.

3π

π 2π

$x = 2\pi(n-2)$

$x = \frac{2\pi(n-2)}{3}$.

$3t^4 - 4t^2 + 9t - 9 = 0$

1 2 3 4 5 6 7
+ + + + + +

$pt = \log_5 y + \log_5 2x$

$-\frac{3\pi}{2}$. $= \log_5 2xy$.

$2\pi(n-2) \le 3\pi$

$3t^2(t^2-1) + 9(t-1)$
$= t^2$

$3(t-1)(t(t+1)+9) = t^2$.

$x^4 - x^3 + x^2 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{3}{p^4} = 0$ $xy - ?$

$-\frac{3\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$.

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$.

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$.

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3}\log_{2x} 5 - 3$.

$t^3 - 3$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3}t - \frac{9t}{3t}$

$\frac{3t^4 - 9 - 4t^2 + 9t}{3t} = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} k$ min abc - ?

$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17} m$

$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} n$.

$a^2b^2c^2 = 2^{34} 3^{55} \cdot 5^{68} \cdot kmn$.

$b = \frac{2^8 3^{14} 5^{12} k}{a} = \frac{2^{12} 3^{20} 5^{17} m}{c}$. ? $abc = 2^{17} 3^{28} 5^{34}$

$\frac{c}{a} = 2^4 3^6 5^5 \frac{m}{k}$.

$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} n$.

$a^2 c^2 = 2^{18} 3^{27} 5^{34} \frac{mn}{k}$

$2^8 3^{14} 5^{12} k c = 2^{17} 3^{28} 5^{34}$.

$ck = 2^9 3^{14} 5^{22}$.

$a \cdot \frac{2^9 3^{14} 5^{22}}{k} = 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$b = 2^3 3^7$.

$\begin{cases} ab = 2^8 3^{14} 5^{12} \cdot 3 \\ bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17} \\ ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} \end{cases}$

$a = 2^8 3^{14} 5^{12}$.

$b = 3$

c

$a^2 = 2^{10} 3^{15} 5^{34} \frac{nk}{m}$

$a = 2^5 3^7 5^{17} \sqrt{\frac{3nk}{m}}$

$abc = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots$

$\alpha \geq 17$

$\beta \geq 28$

$\gamma \geq 34$.

$b = \frac{2^3 3^7}{5^5} \sqrt{\frac{3nk}{m}}$

$c = 2^9 3^{13} 5^{17} \cdot \sqrt{\frac{3mn}{k}}$.

$b = 2^3 3^7 m \sqrt{\frac{3mn}{k}}$.

$b = \frac{2^8 3^{15} 5^{12}}{a} = \frac{2^{12} 3^{20} 5^{17}}{c}$.

$\frac{c}{a} = 2^4 3^5 5^5$. $\sqrt{\frac{3nk}{m}} \geq 5^5$

$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39}$ $\frac{3nk}{m} \geq 5^{10}$.

$c^2 = 2^{18} 3^{26} 5^{34}$.

$c = 2^9 3^{13} 5^{17}$. $m = 3$.

$a = 2^5 3^8 5^{22}$.

$c = 2^9 3^{14} 5^{22}$.

$kmn = 3$.

ab

bc 10

ac

abc.

1. $k = 3$ x

2. $m = 3$.

$\begin{cases} ab = 2^8 3^{14} 5^{12} \\ bc = 2^{12} 3^{21} 5^{17} \\ ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} \end{cases}$

$\frac{2^8 3^{14} 5^{12}}{a} = \frac{2^{12} 3^{21} 5^{17}}{c}$

3. $n = 3$.

$\begin{cases} ab = 2^8 3^{14} 5^{12} \\ bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17} \\ ac = 2^{14} 3^{22} 5^{39} \end{cases}$

$b = \frac{2^8 3^{14} 5^{12}}{a} = \frac{2^{12} 3^{20} 5^{17}}{c}$

x $\frac{c}{a} = 2^4 3^6 5^5$.

$ac = 2^{14} 3^{22} 5^{39}$

$\frac{c}{a} = 2^4 3^7 5^5$.

$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39}$.

$c^2 = 2^{18} 3^{28} 5^{44}$

$c = 2^9 3^{14} 5^{22}$.

$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

$\Rightarrow 10\sqrt{1-x^2} = \pi - 2x$., $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$\sqrt{1-x^2} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$1-x^2 \in [0; \frac{\pi^2}{4}]$.

$0 \leq 1-x^2 \leq \frac{\pi^2}{4}$

$x^2 \leq 1$

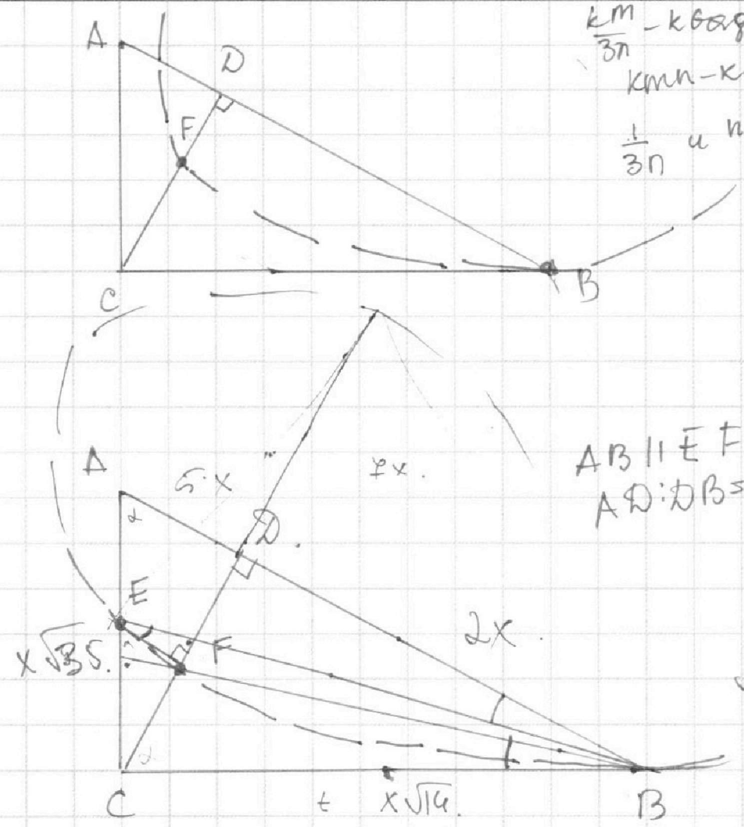
$ac =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\frac{km}{3n}$ – квадр
kmn – квадр.
$\frac{1}{3n}$ и n – квадр противоп.

4   7
6   10
7.   10 5

$\sqrt{\frac{km}{n}}$ n 6

$\frac{km}{n}$ – квадр.

56
28.

AB || EF
AD:DB=5:2.

$\frac{km}{n} \geq 3^2 5^{10}$.

$\frac{km}{3n}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$

3^4

$\frac{km}{n} \geq 3 \cdot 5^{10}$.

$k = 3^2$
$n = 3$
$m = 5^{10}$.

$abc = 2^5 3^7 5^{17}$ $\frac{2^3 3^7}{5^5}\sqrt{\frac{km}{3n}}$ $2^9 3^{13} 5^{22}$

$\sqrt{\frac{3nk}{m}}\sqrt{\frac{3mn}{k}}$

$= 2^{17} 3^{20} 5^{34}$

$\frac{5x}{y} = \frac{y}{7x}$. $49x^2 - 35x^2 = 14x^2$

$35x^2 = y^2$

$y = x\sqrt{35}$

$b = 2^8 3^{14} 5^{12} \frac{k}{a} = 2^{12} 3^{20} 5^{17} \frac{m}{c}$.

$\sqrt{kmn}$
$= \sqrt{\frac{km}{3n}} \cdot n\sqrt{3}$.
$\cancel{3n\sqrt{3}\,5^{10}}$.
$\geq 5^5 n\sqrt{3}$.

$\frac{c}{a} = 2^4 3^6 5^5 \frac{m}{k}$.

$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} k$
$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17} m$
$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} n$.

$c^2 = 2^{18} 3^{27} 5^{44} \frac{mn}{k}$
$a^2 = 2^{10} 3^{15} 5^{34} \frac{nk}{m}$

$a = 2^5 3^7 5^{17} \sqrt{\frac{3nk}{m}}$ 3.

$c = 2^9 3^{13} 5^{22} \sqrt{\frac{3mn}{k}}$.

$2^8 3^{13} 5^{22}$
$\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 5^{10}}$
$3 \cdot 5^5$

$b = \frac{2^3 3^7}{5^5} \cdot k\sqrt{\frac{m}{3nk}} = \frac{2^3 3^7}{5^5}\sqrt{\frac{km}{3n}} = \frac{2^3 3^7}{5^5} m\sqrt{\frac{k}{3mn}} = \frac{2^3 3^7}{5^5}\sqrt{\frac{km}{3n}}$.

$\sqrt{\frac{km}{3n}} \geq 5^5$ $\frac{km}{3n} \geq 5^{10}$.