



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЛМФТИ.

$$m \geq 3 \cdot 5^{10}.$$

$$k \cdot 3 \rightarrow k \geq 3$$

$$h \geq 3$$

$$\rightarrow kmh \geq 3^{35^{10}}.$$

$$abc \geq 2^{14} 3^{87} 5^{34} \sqrt{35^{10}} = 2^{14} 3^{29} 5^{39}.$$

$$\text{Ответ: } a = 2^5 3^8 5^{12}, b = 2^3 3^7, c = 2^9 3^{14} 5^{27}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^8 3^{14} 5^{12} k, \quad k, m, n \in N.$$

$$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{14} m$$

$$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} n$$

$$\rightarrow b = \frac{2^8 3^{14} 5^{12} k}{a} = \frac{2^{12} 3^{20} 5^{14} m}{c}$$

$$\rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2^4 3^{6} 5^5 m}{k}.$$

$$\text{тогда } ac \cdot \frac{c}{a} = c^2 = 2^{16} 3^{27} 5^{34} \frac{hm}{k}.$$

$$\rightarrow c = 2^8 3^{13} 5^{28} \sqrt{\frac{30m}{k}}.$$

$$ac \cdot \frac{a}{c} = a^2 = 2^{10} 3^{15} 5^{34} \frac{nk}{m} \rightarrow a = 2^5 3^7 5^{17} \sqrt{\frac{3nk}{m}}.$$

$$b = \frac{2^3 5^4 k}{5^5 \sqrt{8nk}} = \frac{2^3 3^7}{5^5} \sqrt{\frac{km}{3n}}$$

$$\text{тогда } \sqrt{\frac{8nm}{k}} \in Z, \sqrt{\frac{3nk}{m}} \in Z, \sqrt{\frac{km}{3n}} \in Z.$$

$$\text{таким образом } ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (2^9 3^1)^2$$

$$\text{таким образом } abc = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = 2^{14} 3^{27} 5^{34} \sqrt{3kmn}.$$

$$\text{значит } \sqrt{3kmn} \in Z$$

$$\sqrt{\frac{8nm}{k}} \in Z \rightarrow k:3 \quad \sqrt{\frac{3nk}{m}} \in Z \rightarrow m:3$$

$$\sqrt{\frac{km}{3n}} \in Z \rightarrow km:3n \quad \text{точно } km:9 \rightarrow$$

$$k \geq 3, m \geq 3, n \geq 1.$$

$$\rightarrow abc \geq$$

$$\sqrt{8kmn} \in Z \text{ тогда имеем вложение 3}$$

$$b \mid n \quad \text{-неравнол.} \rightarrow n \geq 3 \rightarrow n \geq 3$$

$$\rightarrow k \geq 3, m \geq 3, n \geq 3 \rightarrow kmn \geq 3^3$$

$$\rightarrow abc \geq 2^{14} 3^{27} 5^{34} \cdot 3^2 = 2^{14} 3^{29} 5^{34}$$

$$\text{таким образом } a = 2^8 3^{15} 5^{12}, b =$$

$$a = 2^{5} 3^{7} 5^{17} \cdot 3, b =$$

$$b \in N \rightarrow \sqrt{\frac{m}{3nk}} : 5^5 \rightarrow \frac{m}{3nk} : 5^{10} \rightarrow m:5^{10}.$$

$$m \cdot k \cdot m:3 \quad \text{то есть } m:3 \cdot 5^{10}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано: $\triangle ABC$
 $\angle C = 90^\circ$

$W \cap BOC = W$.

$CD \perp AB$

$W \cap CD = F$

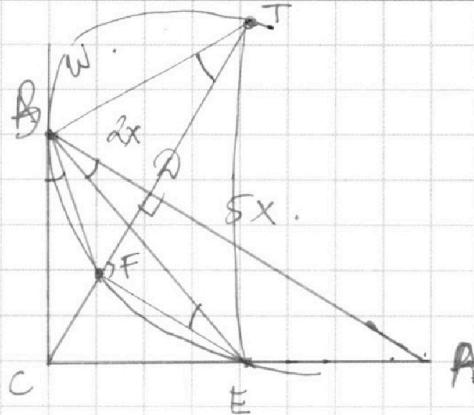
$W \cap AC = E$

$AB \parallel EF$

$AD : DB = 5 : 2$

$S_{ABC} - ?$

$S_{CEF} - ?$



Решение: Так как $BD = 2x$, $AD = 5x$
 $\rightarrow AB = 7x$.

$$\triangle BDC \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{BC}{BD} > \frac{7x}{2x} \quad BC^2 = 14x$$

$$BC = x\sqrt{14}$$

$$AC = x\sqrt{35}$$

$$\angle CBF = \angle BEF = \angle ABE$$

$$T = W \cap CD$$

$$BC^2 = CF \cdot BT$$

$$14x = CF \cdot (CF + \sqrt{BT^2 - EF^2})$$

$$\angle TFE = 90^\circ \rightarrow TE - \text{диаметр } W.$$

$$\text{Но } \frac{EF}{CF} > \frac{AD}{AC}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x \\ \Leftrightarrow 10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x \\ \Leftrightarrow 4\pi + 2x = 10\arccos(\cos x)$$

$$\Leftrightarrow 4\pi + 2x = 10(x + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$$

По ОДЗ уравнение:

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi \Leftrightarrow -4\pi \leq 2x \leq 6\pi \Leftrightarrow -2\pi \leq x \leq 3\pi$$

① $x \in [-2\pi; -\pi]$.

Уравнение равносильно:

$$4\pi + 2x = 10(-x + \pi) \quad 4\pi + 2x = 10($$

$$4\pi + 2x = 10(x + 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow 8x + 16\pi = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = -2\pi.$$

② $x \in [-\pi; 0]$

$$4\pi + 2x = 10(-x) \Leftrightarrow 4\pi + 12x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}.$$

③ $x \in [0; \pi]$

$$4\pi + 2x = 10x \Leftrightarrow 4\pi = 8x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

④ $x \in [\pi; 2\pi]$

$$4\pi + 2x = 10(-x + 2\pi) \Leftrightarrow 12x = 16\pi \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3}.$$

⑤ $x \in [2\pi; 3\pi]$.

$$4\pi + 2x = 10(x - 2\pi) \Leftrightarrow 4\pi + 2x = 10x - 20\pi \Leftrightarrow 24\pi = 8x \Leftrightarrow x = 3\pi.$$

Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



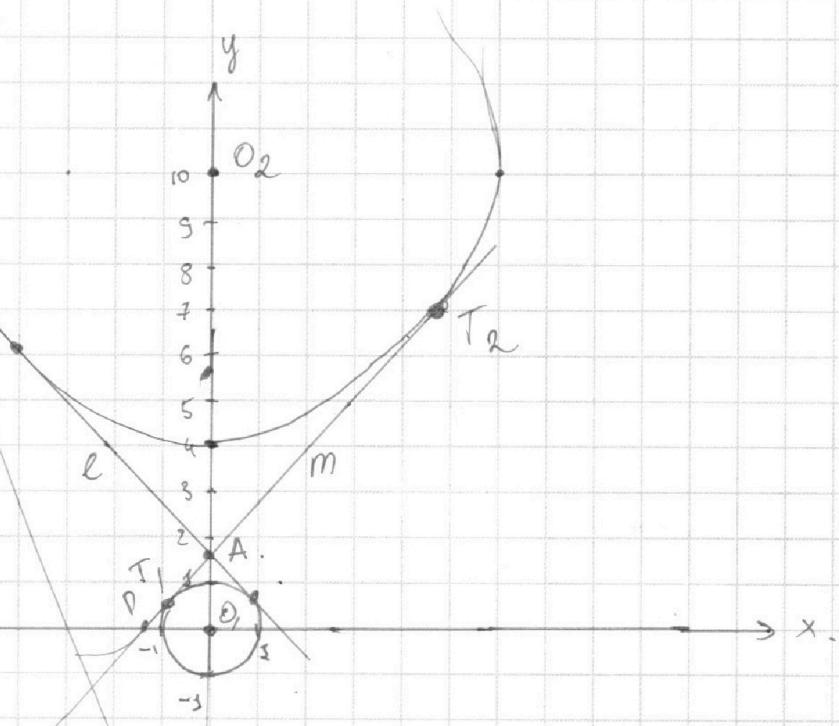
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \alpha x - 3y + 48 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\alpha x}{3} + \frac{48}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

Изображение графиков систем в системе координат XOY :



Графиком 1 уравнения является некоторая кривая, 2 уравнения $(x^2 + y^2 - 1)$ — окружность с центром $(0, 10)$ и радиусом 6, 3 уравнение — окружность с центром $(0, -10)$ и радиусом 6. т.к. окружности решений системы изображаются точками пересечения кривой 1 и окружностей.

Изображение l и m — общее касательное к окружностям. Д.к. окружности симметричны относительно оси Oy то l, m — симметричны относительно оси Oy . Пусть $l \cap m = A$. Тогда $A \in Oy$. Пусть $A(0, q)$.

Тогда общая окружность полученная из двух данных через симметрию относительно оси Oy

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

точка A с координатами (-6). Задача $O_2A = \frac{6}{\sqrt{6}}$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{10-q} = \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow q = \frac{10}{7}$$

Пусть m: $kx + t$ тогда $q = t = \frac{10}{7}$
имеет 1 решение.

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 1 \\ y = kx + \frac{10}{7} \\ k > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - y^2 = x^2 \\ y = kx + \frac{10}{7} \\ k > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = kx + \frac{10}{7}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 = k^2x^2 + \frac{20kx}{7} + \frac{100}{49} \\ k > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ k > 0 \end{cases}$$

$$m: kx + \frac{10}{7}$$

Н.к. однозначно точки касания с
легко есть ограниченностью количества точек;

Пусть T_2 - т. касание m с внешней окружностью

T_1 - с внешней, $P = m \cap OX$

$$\sin \angle O_2AT_2 = \frac{6}{\left(\frac{60}{7}\right)} = \frac{7}{10}$$

$$\angle APO_1 = 90 - \angle O_2AT_2$$

$$\Rightarrow \cos \angle APO_1 = \frac{7}{10}$$

$$\sin \angle APO_1 = \sqrt{1-\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$\Rightarrow \tan \angle APO_1 = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\Rightarrow m: \frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$$

Линия: $l: -\frac{\sqrt{51}}{7}x + \frac{10}{7}$.

Все прямые пересекающие внешнюю окружность б
2 точкам лежат между l и m, и проходящие через A
точка: $-\frac{\sqrt{51}}{3} < a < \frac{\sqrt{51}}{3}$ $\Leftrightarrow 3\frac{\sqrt{51}}{7}a < \frac{\sqrt{51}}{7}3$

$$\frac{4}{3}b = \frac{10}{7} \Rightarrow b = \frac{3 \cdot 10}{4 \cdot 7} = \frac{15}{14}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $\alpha x \in (-\infty; \frac{\sqrt{5}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{5}}{7}, +\infty)$

общих точек

принадлежит открытости ≤ 2

Число пересечений прямой так, что
она проходила через A. общих точек

пересечения будет 4.

Ответ: $(-\infty; -\frac{\sqrt{5}}{7}) \cup (\frac{\sqrt{5}}{7}, +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.



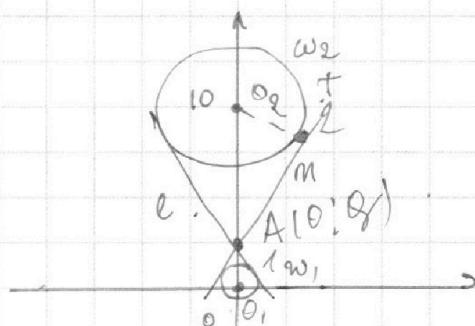
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

Изображение графика
системы в ХОУ:



Все $x^2 + y^2 = 1$ - окружность с центром $(0,0)$ и радиусом 1.
 $x^2 + (y - 10)^2 = 6^2$ - окружность с центром $(0,10)$ и радиусом 6.

$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ - некоторое уравнение.

Пусть l и m - общие касательные окружностей w_1 и w_2 .
 $l \cap m = A(0; 0)$.
Линия l получается из первой через
взаимное отображение A с горизонти-
алью (-6) .

$$\text{тогда } O_2A : O_1A = 1:6.$$

$$\rightarrow \frac{q}{10-q} = \frac{1}{6} \rightarrow q = \frac{10}{7}.$$

$m: kx + \frac{10}{7} = 0$, где k - некоторое число.

Пусть $k > 0$. $m \cap w_2 = T$

$$\sin \angle O_2AT = \frac{6}{\sqrt{10^2 + k^2}} = \frac{6}{\sqrt{10 + k^2}}$$

$$\rightarrow k = \operatorname{ctg} \angle O_2AT = \frac{\sqrt{51}}{\frac{6}{\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{51}}{6}.$$

$$\text{тогда: } -\frac{\sqrt{51}}{6} + \frac{10}{7}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

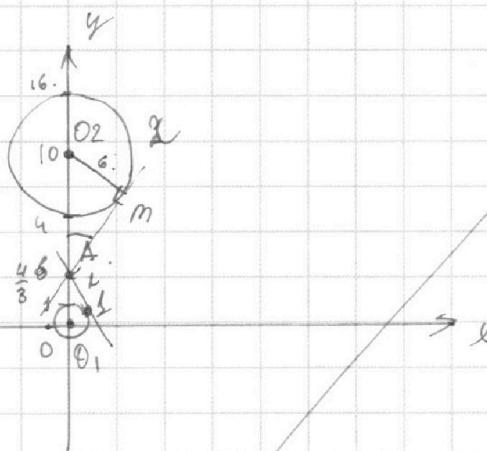
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если $a > 0$
то прямая будет
однозначно и
пересекать окружность.

Пусть ℓ прямая пересекает OY в $A(0, \frac{6}{3})$.
Найдем касательной в A и k - радиусы.
Две уравнения касательных $a > 0$:

Уравнение m и $OY - d$.

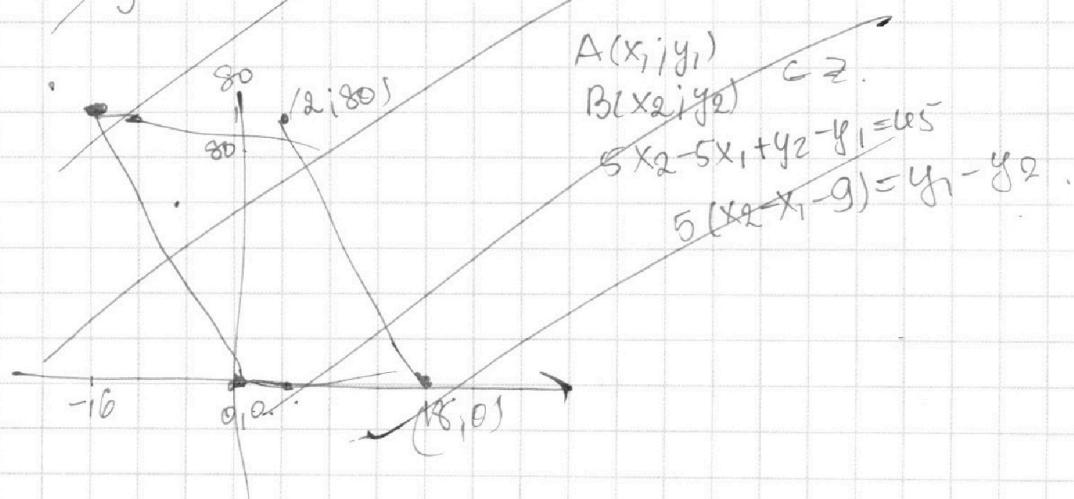
$$\sin \alpha = \frac{6}{O_2 A} = \frac{6}{10-4\sqrt{3}} = \frac{18}{30-4\sqrt{3}} = \frac{9}{15-2\sqrt{3}}$$

$$\text{Пусть } m: kx + y\sqrt{3} = 0 \Rightarrow |k| = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1-\frac{81}{(15-2\sqrt{3})^2}}}{(\frac{9}{15-2\sqrt{3}})}$$

Уравнение ℓ и $OY - \beta$:

$$\sin \beta = \frac{1}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{4\sqrt{3}} \Rightarrow |P| = \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sqrt{1-\frac{48}{(3\sqrt{3})^2}}}{(\frac{3}{4\sqrt{3}})} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

Итого $\frac{a}{3} \in (-\infty; -\min\{|k|, |P|\}) \cup (\max\{|k|, |P|\}, +\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3.$$

Пусть $t = \log_5(2x)$. из ОДЗ $t \neq 0$.
Уравнение примет вид:

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3t^5 - 9 - 4 + 9t}{3t} = 0 \Leftrightarrow \frac{3t^5 + 9t - 13}{3t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^5 + 9t - 13 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y^3 0,2 - 3$$

Пусть $p = \log_5 y$.

Уравнение примет вид.

$$p^4 + \frac{4}{p} = -\frac{1}{3p} - 3 \Leftrightarrow \frac{3p^5 + 12 + 1 + 9p}{3p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3p^5 + 9p + 13}{p} = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} 3p^5 + 9p + 13 = 0 \\ p \neq 0 \end{cases}$$

Составим систему:

$$\begin{cases} 3t^5 + 9t - 13 = 0 \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \\ p \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^5 + 3p^5 + 9t + 9p = 0 \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \\ p \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (t+p)(t^4 - t^3p + t^2p^2 - tp^3 + p^4) + 3(t+p) = 0.$$

$$\begin{cases} p \neq 0 \\ t \neq 0 \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p+t=0 \\ t^4 - t^3p + t^2p^2 - tp^3 + p^4 + 3 = 0 \\ p \neq 0 \\ t \neq 0 \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} p+t=0 \\ (p) \end{matrix}$$

$$f(t) = 3t^5 + 9t - 13. \quad f'(t) = 15t^4 + 9 > 0 \text{ при } t.$$

$\rightarrow f(t)$ возрастает на R

$\rightarrow f(t)=0$ имеет 1 решение.

Аналогично $3p^5 + 9p + 13$ имеет 1 решение.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случай $p+t=0$.

тогда $p=-t$.

$$0 = 3p^5 + 9p + 13 = -3t^5 - 9t + 13 = -(3t^5 + 9t - 13) = 0$$

значит $3t^5 + 9t - 13 = 0$ имеет единственный
корень $(*)$. Если $p \neq 0$ и $t \neq 0$.

Следующий шаг:

$$p+t=0 = \log_5 y + \log_5 (2x) = \log_5 (2xy), y > 0.$$

$$2xy = 1, y > 0$$

$$xy = \frac{1}{2}.$$

$f(t) = 3t^5 + 9t - 13$ возрастает на \mathbb{R} м.к.

$$f'(t) = 15t^4 + 9 > 0 \text{ при } t \in \mathbb{R}.$$

значит $3t^5 + 9t - 13 = 0$ имеет единственное
решение.

значит $3p^5 + 9p + 13 = 0$ имеет единственное
решение.

значит, если $p = -t_0$ — корень $3t^5 + 9t - 13 = 0$

значит

$$(*) \Leftrightarrow 3p + t = 0.$$

$$\begin{cases} p \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$(3p^5 + 9p + 13 = 0)$$

$$\Leftrightarrow 3p + t = 0.$$

$$\begin{cases} 3p + t = 0 \\ 3p^5 + 9p + 13 = 0 \end{cases}$$

$$p+t=0 \Leftrightarrow \log_5 y + \log_5 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 (2xy) = 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2xy = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

б) Две точки O -центр $\angle BCS$.

$$ON \perp BCS \rightarrow ON \perp SN$$

$\Rightarrow \triangle SON$ - прямодолейоний

$$\Rightarrow OS = 5$$

$$\Rightarrow OS = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} \neq \sqrt{49}.$$

$$S_{BCS} \cos \angle BCA = S_{BCM}.$$

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано: $\triangle ABC$. AA_1, BB_1, CC_1 - высоты $\angle ABC$ $AA_1 \perp BB_1, CC_1 = M$.сфера Ω Ω касается AS & L Ω касается (ABC) & K , $K \in AM$. $\Omega \cap SMC = \{P, Q\}$ $SP = MQ$. $S_{ABC} = 100$ $SA \perp BC \leq 16$.a) AA_1, BB_1, CC_1 - ?b) $\angle SBCA - ?$ Ω касается BCS & N $SN = 4$ изображе Ω на рисунке 5

решение:

a) Рассмотрим $\triangle SA_1A$.Пусть $w = \Omega \cap SA_1A$.тогда w - окружность.

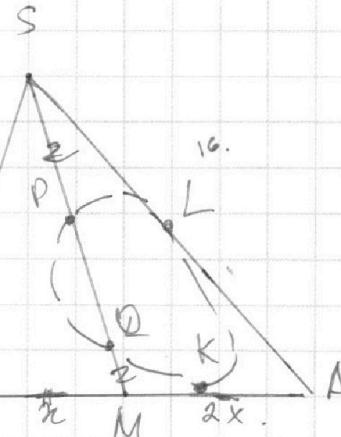
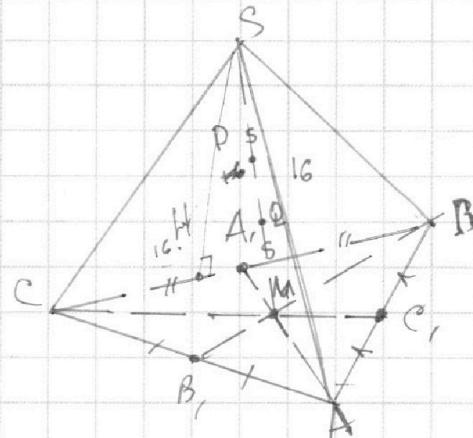
$$\deg_w S = SP \cdot SQ = SL^2$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ =$$

$$= SP(SP + SQ) =$$

$$= MQ \cdot MP = \deg_w M =$$

$$= MK.$$



рассмотрим:

$$\rightarrow SL = MK.$$

$$\angle A = \angle K$$

$$\text{значит } SA = SKA.$$

$$\text{значит } MA = 16.$$

$$\text{тогда } AA_1 = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24.$$

$$\angle A = \frac{16}{2} = 8.$$

$$CA_1 = 8.$$

$$S_{CA_1M} = S_{BMC}/2 = \frac{S_{ABC}}{6} = \frac{100}{6} = \frac{CA_1 \cdot A_1M \sin \angle CA_1M}{2}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$100 = 32 \sin \angle CA_1 M.$$

$$\sin \angle CA_1 M = \frac{100}{6 \cdot 32} = \frac{25}{48}.$$

$$\cos \angle CA_1 M = \frac{48}{\sqrt{48^2 - 25^2}} = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} \quad (\cos \angle CA_1 M > 0).$$

по теореме косинусов в $\triangle CA_1 M$:

$$CM^2 = 28^2 + 8^2 - 2 \cdot 28 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48} = 128 \left(\frac{48 - \sqrt{23 \cdot 73}}{48} \right) =$$

$$= \frac{26}{6} (48 - \sqrt{23 \cdot 73}) = \frac{13}{3} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})$$

$$CM = \sqrt{\frac{13}{3} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})}$$

$$CC_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{13}{3} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})}$$

$$= \frac{2 \cdot 8^2}{48} \left(\frac{48 - \sqrt{23 \cdot 73}}{48} \right) = \frac{8^2}{3 \cdot 8} \left(\frac{48 - \sqrt{23 \cdot 73}}{48} \right) =$$

$$= \frac{8}{3} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})$$

$$CM = 2 \sqrt{\frac{2}{3} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})}$$

$$CC_1 = 3 \sqrt{\frac{2}{3} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})} = \sqrt{6} (48 - \sqrt{23 \cdot 73})$$

$\cos \angle MA_1 B = -\frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{48}$. По теореме косинусов

$\triangle MA_1 B$:

$$BM^2 = 2 \cdot 8^2 \left(\frac{48 + \sqrt{23 \cdot 73}}{48} \right)$$

$$BM = \sqrt{6} (48 + \sqrt{23 \cdot 73})$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot 6 \cdot \sqrt{48^2 - 23 \cdot 73} = 24 \cdot 6 \cdot 25.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$$

$$\frac{1}{5} \log_5 \frac{5}{3}$$

$$\cos x > 0 \text{ TO } \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$$

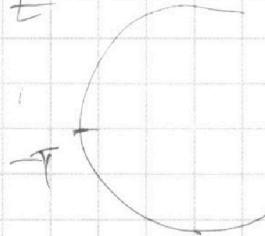
5π

$$\log_{\frac{10}{3}} \arccos(\cos x) = \pi - 2x.$$

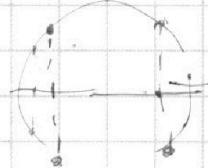
$$4\pi + 2x = \arccos(\cos x)$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3.$$

$$\frac{t^5 - 3 - \frac{4}{3} + 3t}{t} = 0$$



$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$



$$-4\pi \leq 2x \leq 6\pi$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$-pt^8 + p^8$$

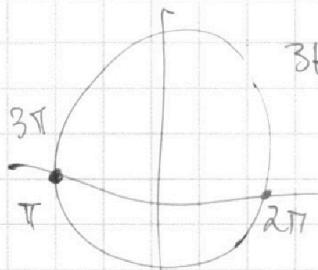
$$+ t^4 + p^4$$

$$4\pi + 2x = x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

4π

$$4\pi + 2x = \frac{1}{2}x + 2\pi n, \cos x > 0$$

$$-x + 2\pi n, \cos x < 0.$$



$$x = 2\pi(n-2)$$

$$x = \frac{2\pi(n-2)}{3}$$

$$3t^4 - 4t^2 + 9t - 9 = 0$$

2
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

$$pt = \log_5 y + \log_5 2x$$

$$-\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \log_5 2xy.$$

$$-\frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$3t^2(t^2 - 1) + 9(t - 3) = t^2$$

$$x^4 - x^3 + \frac{x^2}{x^3} - 1 + \frac{1}{x^4} + 9 = 0$$

$$3(t-1)(t(t+1)+9) = t^2$$

$$xij - ?$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_5 2x = \log_5 3625 - 3. \quad \log_5^4 y + 4 \log_5 5$$

$$= \log_5 3^{10} - 3.$$

$$\log_5^4(2x) - 3 = \frac{4}{3} \log_5 5 - 3.$$

Б23

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3}t - \frac{9}{3t}$$

$$\frac{3t^4 - 9 - 4t^2 + 9t}{3t} = 0$$

1

1

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^{83^{14}5^{12}}k$$

$$bc = 2^{123^{20}5^{14}}m$$

$$ac = 2^{143^{21}5^{39}}n$$

$$a^2b^2c^2 = 2^{345568} \text{ kmn.}$$

$$\frac{ab}{a} < b = 2^{83^{14}5^{12}} = 2^{123^{20}5^{14}}m$$

$$\frac{c}{a} = 2^{43^{65}}m$$

$$ac = 2^{143^{21}5^{39}}n$$

$$a^2c^2 = 2^{183^{24}5^{34}}mn$$

$$2^{83^{14}5^{12}}k c = 2^{143^{28}34}.$$

$$ck = 2^{93^{14}5^{22}}$$

$$a \cdot 2^{93^{14}5^{22}} \leq 2^{143^{21}5^{39}}$$

$$\frac{1}{k}$$

$$b = 2^{83^{14}5^{12}}$$



$$kmn = 3.$$

$$a^2$$

$$1-x^2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$1. k=3 \quad x$$

$$2. m=3.$$

$$10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x.$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$E_1 \approx$$

$$E_1 \approx$$



$$2^{83^{14}5^{12}} = 2^{123^{21}5^{14}} \frac{x}{c}$$

$$\begin{matrix} ab \\ bc \\ ac \\ abc. \end{matrix}$$

$$3. n=3.$$

$$\begin{cases} ab = 2^{83^{14}5^{12}} \\ bc = 2^{123^{20}5^{14}} \\ ac = 2^{143^{21}5^{39}} \\ b = 2^{83^{14}5^{12}} = 2^{123^{20}5^{14}} \end{cases}$$

$$\frac{c}{a} \leq 2^{43^{65}}.$$

$$ac = 2^{143^{22}5^{39}}$$

$$\frac{c}{a} = 2^{43^{75}}.$$

$$ac = 2^{143^{21}5^{39}}.$$

$$c^2 = 2^{183^{28}5^{44}}$$

$$c = 2^{93^{14}5^{82}}.$$

20
..

1-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

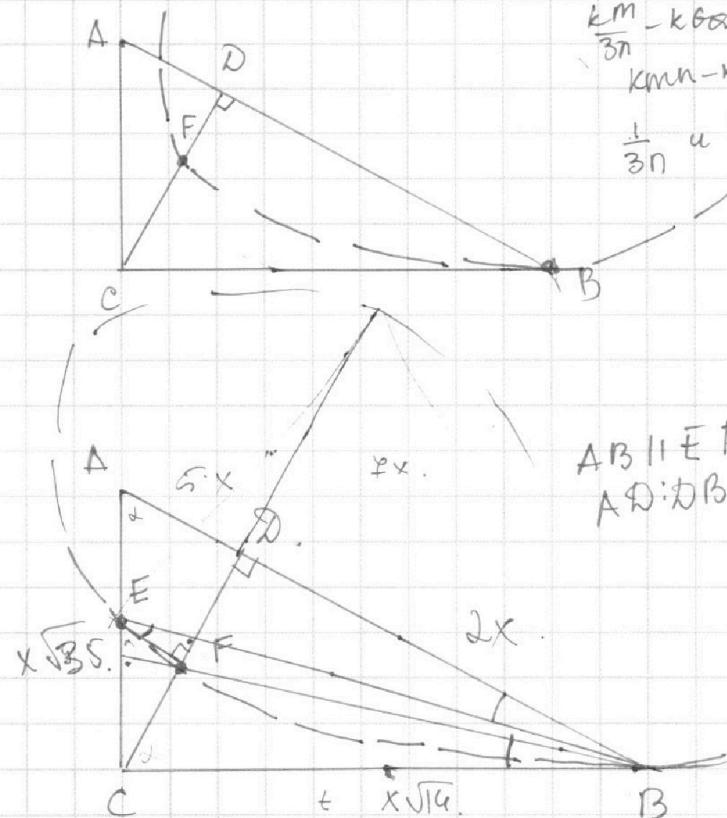
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{km}{3n} - \text{квадр}$$

$$kmn - \text{квадр}$$

$$\frac{1}{3n} u n - \text{квадр}$$

иначе.

- | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

$$\frac{km}{n} - \text{квадр}$$

$$56 \cdot 2^8$$

$$km > 3^8 \cdot 5^{10}$$

$$\frac{km}{3n} \cdot 3^4$$

$$8 \cdot 5^6$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$$

$$km > 3 \cdot 5^{10}$$

$$k = 3^2 \\ n = 3 \\ m = 5^{10}$$

$$\frac{5x}{y} = \frac{y}{4x}$$

$$49x^2 - 35x^2 \\ < 44x^2$$

$$35x^2 = y^2$$

$$y = x\sqrt{35}$$

$$ab = 2^8 3^{10} 5^{12} k$$

$$fc = 2^{12} 3^{20} 5^{14} m$$

$$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39} n$$

$$b = 2^8 3^{14} 5^{12} \frac{k}{a} = 2^{12} 3^{20} 5^{14} \frac{m}{c}$$

$$\frac{c}{a} = 2^4 3^6 5^5 \frac{m}{k}$$

$$c^2 = 2^{18} 3^{24} 5^{44} \frac{mn}{k}$$

$$a^2 = 2^{10} 3^{15} 5^{34} \frac{nk}{m}$$

$$a = 2^{5} 3^{4} 5^{14} \sqrt{\frac{nk}{m}} \quad 3.$$

$$c = 2^{9} 3^{13} 5^{22} \sqrt{\frac{mn}{k}}$$

$$b = 2^{3} 3^{7} \cdot \sqrt{\frac{m}{8nk}} = 2^{3} 3^{7} \sqrt{\frac{km}{8n}} = 2^{3} 3^{7} m \sqrt{\frac{k}{8mn}} < 2^{3} 3^{4} \sqrt{\frac{km}{3n}}$$

$$\sqrt{\frac{km}{3n}} > 5^5$$

$$\sqrt{\frac{km}{3n}} > 5^{10}$$

$$\begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \\ 13 \\ 15 \\ 17 \\ 19 \\ 21 \\ 23 \\ 25 \\ 27 \\ 29 \\ 31 \\ 33 \\ 35 \\ 37 \\ 39 \\ 41 \\ 43 \\ 45 \\ 47 \\ 49 \\ 51 \\ 53 \\ 55 \\ 57 \\ 59 \\ 61 \\ 63 \\ 65 \\ 67 \\ 69 \\ 71 \\ 73 \\ 75 \\ 77 \\ 79 \\ 81 \\ 83 \\ 85 \\ 87 \\ 89 \\ 91 \\ 93 \\ 95 \\ 97 \\ 99 \end{matrix}$$

$$abc = 2^{5} 3^{17} 2^{3} 3^{4} \sqrt{\frac{km}{5^5}} \sqrt{\frac{3mn}{k}}$$

$$= 2^{12} 3^{20} 5^{34} \sqrt{\frac{kmn}{k}}$$

$$\sqrt{\frac{kmn}{k}} \cdot \sqrt{\frac{kmn}{k}}$$

$$3n\sqrt{3} \cdot 5^{10}$$

$$\geq 5^5 n \sqrt{3}$$

$$2^8 \\ 3^3 \\ 5^3 \\ 7^3 \\ 11^3 \\ 13^3 \\ 17^3 \\ 19^3 \\ 23^3 \\ 29^3 \\ 31^3 \\ 37^3 \\ 41^3 \\ 43^3 \\ 47^3 \\ 53^3 \\ 59^3 \\ 61^3 \\ 67^3 \\ 71^3 \\ 73^3 \\ 79^3 \\ 83^3 \\ 89^3 \\ 91^3 \\ 97^3 \\ 99^3$$