МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2 - 20y + 64\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x – степень вхождения двойки в a, y – в b, z – в c. Тогда, т.к $ab \vdots 2^8$; $bc \vdots 2^{12}$; $ac \vdots 2^{14}$ ⇒

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y \geq 8 \\ y+z \geq 12 \\ z+x \geq 14 \end{array}\right| \Rightarrow 2(x+y+z) \geq 34 \Rightarrow (abc)^2 \vdots 2^{34} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \vdots 2^{17}$$

Аналогично, т.к $ab \vdots 3^{14}$; $bc \vdots 3^{20}$; $ac \vdots 3^{21}$

то $(abc)^2 \vdots 3^{55}$ но т.к $abc \in \mathbb{N}$, то степень вхождения тройки в abc должна быть целой ⇒

$$\Rightarrow abc \vdots 3^{28}$$

$$abc \vdots ac \Rightarrow abc \vdots 5^{39}$$

Т.к 2; 3; 5 попарно взаимнопросты, то

$$abc \vdots 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Пример:

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{19}$ $\quad ab \vdots 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$

$b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^0$ $\quad bc \vdots 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$

$c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{20}$ $\quad ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2$

$ab \geq 2^{8} 3^{14} 5^{12}$

$bc \geq 2^{12} 3^{20} 5^{17}$

$ac \geq 2^{14} 3^{21} 5^{39}$ $\Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{34} 3$

$abc \vdots ab$, $abc \vdots bc$, $abc \vdots ac$ $\Rightarrow abc \vdots \text{НОК}(2^{8} 3^{14} 5^{12}; 2^{12} 3^{20} 5^{17}; 2^{14} 3^{21} 5^{39}) \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

Пусть x - степень вхождения двойки в a, y - в b, z - в c. Тогда, т.к. $ab \vdots 2^{8}$; $bc \vdots 2^{12}$; $ac \vdots 2^{14}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x+y \geq 8$, $y+z \geq 12$, $z+x \geq 14$ $\Rightarrow 2(x+y+z) \geq 34 \Rightarrow x+y+z \geq 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \vdots 2^{17}$.

Аналогично $(abc)^2 \vdots 3^{55} \Rightarrow abc \vdots 3^{28}$ (т.к. $abc \in \mathbb{N}$)

а также $(abc)^2 \vdots 5^{68} \Rightarrow abc \vdots 5^{34}$

Т.к. 2; 3; 5 попарно взаимнопросты следует, что

$abc \vdots 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

Пример: $a = 2^{5} \cdot 3^{8} \cdot 5$

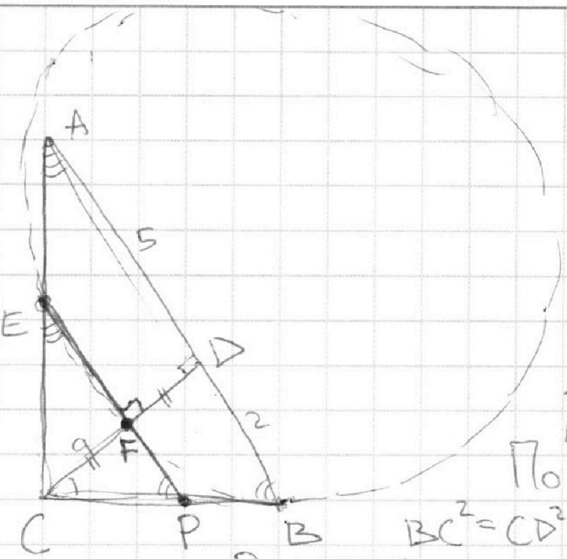
$b = 2^{3} \cdot 3^{7} \cdot 5$

$c = 2^{9} \cdot 3^{13} \cdot 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



В силу масштаба будем считать, что $AB = 7$.

Тогда т.к $AD:DB = \frac{5}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow AD = 5 \quad DB = 2$

CD – высота в прямоуг $\triangle$ проведенная к гипотенузе $\Rightarrow$
$\Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{10}$

$EF \parallel AB \Rightarrow EF \perp CD$

По т. Пифагора в $\triangle CBD$:
$BC^2 = CD^2 + BD^2 = 10 + 4 = 14 \Rightarrow BC = \sqrt{14}$

P – пересечение EF с BC

Пусть длина $CF = a$.

Тогда т.к $\triangle CPF \sim \triangle CBD$ (по 2-м углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow PF = \frac{BD \cdot CF}{CD} = \frac{2a}{\sqrt{10}}$; $CP = \frac{BC \cdot a}{CD} = \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{10}} \Rightarrow BP = \sqrt{14} - \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{10}}$

$\triangle CPE \sim \triangle CBA$ (по 2-м углам) $\Rightarrow PE = \frac{AB \cdot CF}{CD} = \frac{7a}{\sqrt{10}}$

По св-ву касательной: $PB^2 = PF \cdot PE$

$$\left(\sqrt{14}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{10}}\right)\right)^2 = \frac{14a^2}{10}$$

$$1 - \frac{2a}{\sqrt{10}} + \frac{a^2}{10} = \frac{a^2}{10} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow F\text{ – середина } CD$$

$\triangle CEF \sim \triangle BAC$ (по 2-м углам) $\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 = \frac{BC^2}{CF^2} =$

$$= \cancel{\frac{14}{\frac{10}{4}} = \frac{28}{10} = 2{,}8} = \frac{14}{\frac{10}{4}} = \frac{56}{10} = 5{,}6$$

Ответ: 5,6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$10\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x$

$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$

$5\pi - 10x = \pi - 2x$

$4\pi = 8x$

$x = \frac{\pi}{2}$

Проверка: $10\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) \overset{?}{=} \pi - \pi$

$10\arcsin(0) \overset{?}{=} 0$

$0 = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

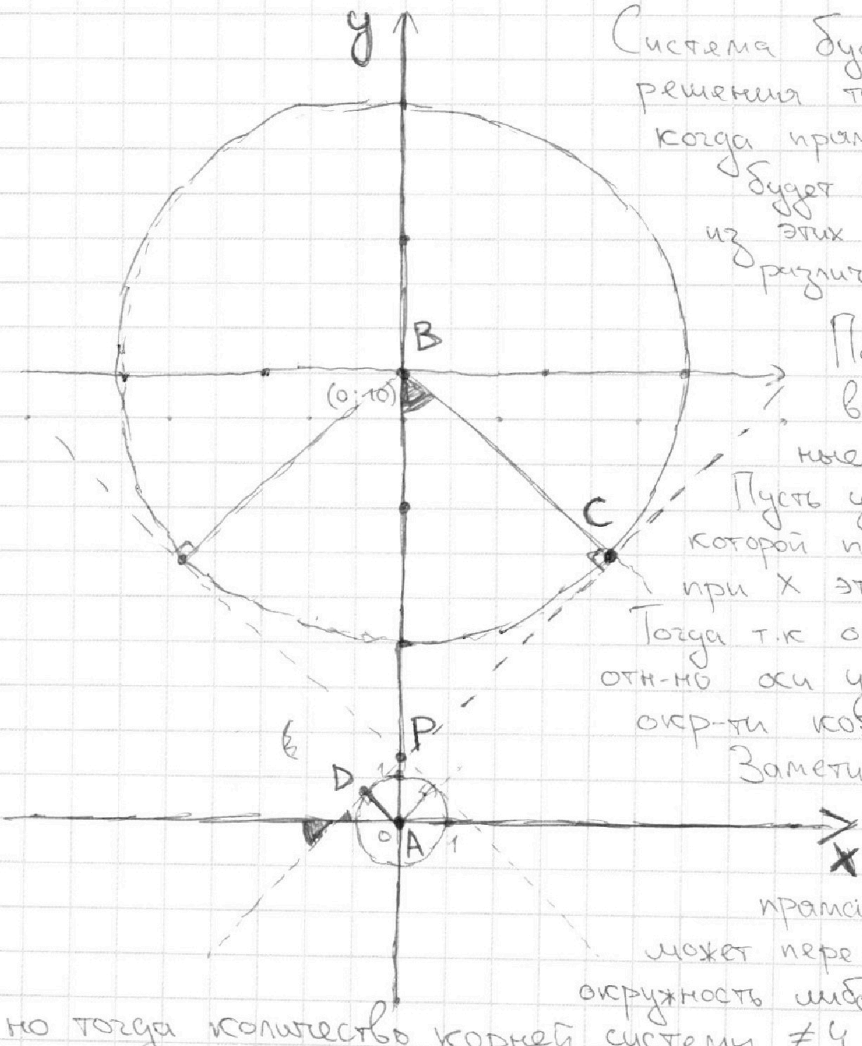
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right. \end{cases}$$

График первого ур-ия – прямая
Графики второго и третьего ур-ий – окр-ти



Система будет иметь ровно 4 решения тогда и только тогда, когда прямая $y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$ будет пересекать каждую из этих окр-тей в 2-х различных точках

Построим общие внутренние касательные к этим окр-там. Пусть у той из них, у которой положительный коэф. при x этот коэф. равен k. Тогда т.к окр-ти симметричны отн-но оси y, то у второй окр-ти коэф при $x = -k$.

Заметим, что если $\frac{a}{3} \in [-k;k]$, то прямая $y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$ может пересекать только одну окружность либо касаться обоих, но тогда количество корней системы $\neq 4$. И наоборот, если $\frac{a}{3} \notin [-k;k]$, то взяв b такое, чтобы прямая $y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$ проходила через точку пересечения общих внутренних касательных к окр-там, мы получим 4 пересечения $\Rightarrow$ 4 корня.

~~Обозначим~~

Осталось посчитать k $\longrightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Обозначим точкой A центр маленькой окр-ти точкой B – центр большой. Точками C и D – точки касания положительной общей касательной с большой и маленькой окружностями. P – точка пересечения касательных.

Очевидно, что $BC \parallel AD \Rightarrow$ по т. Фалеса $\frac{AP}{BP} = \frac{AD}{BC}$

Пусть $|AP| = d$, тогда $BP = 10-d$; $AD = 1$; $BC = 6$ (радиусы)

$\Rightarrow \frac{d}{10-d} = \frac{1}{6}$ $\quad 7d = 10 \quad d = \frac{10}{7} \quad BP = 10 - d = \frac{60}{7}$

~~Очевид~~ По определению k – тангенс угла, образованного положительной касательной с осью X. Очевидно, что этот угол равен $\angle PBC$

$\operatorname{tg} \angle PBC = \frac{PC}{BC}$

~~[illegible]~~ По т. Пифагора в $\triangle PCB$: $PC^2 = PB^2 - BC^2 =$

$= \left(\frac{60}{7}\right)^2 - 6^2 = \frac{36 \cdot 100 - 36 \cdot 49}{49} = \frac{36 \cdot 51}{49} \quad PC = \frac{6}{7}\sqrt{51}$

$\operatorname{tg} \angle PBC = \frac{\frac{6}{7}\sqrt{51}}{6} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$\frac{a}{3} \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; \infty\right)$

$a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; \infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $t = \log_5 2x$; $s = \log_5 y$

Тогда $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3 \iff$

$\iff t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3 \iff t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3 \iff$

$\iff s^4 + \frac{4}{s} = -\frac{1}{3s} - 3 \iff s^4 + \frac{13}{3s} + 3 = 0$

$\begin{cases} t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0 \\ s^4 + \frac{13}{3s} + 3 = 0 \end{cases}$ $t, s \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0 \\ s^5 + 3s + \frac{13}{3} = 0 \end{cases}$

Сложим эти ур-ия: $t^5 + s^5 + 3(s+t) = 0$

$(s+t)(s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 + 3) = 0$

Заметим, что $s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 \geq 0$, т.к $s^5 + t^5 = 0$ тогда и только тогда, когда $t = -s$.

Отсюда $s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 + 3 \geq 3 \Rightarrow$ не обращается в 0

$\Rightarrow s + t = 0$

$\log_5 2x + \log_5 y = 0 \iff \log_5 2xy = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = \frac{1}{2}$

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$

$5x_1 - 5x_2 + y_2 - y_1 = 45 \iff x_1 - x_2 + \frac{y_2}{5} - \frac{y_1}{5} = 9$

~~В~~ Теперь давайте уменьшим единичный отрезок оси y в пять раз

Теперь $O=(0;0)$ $\quad Q=(2;20)$
$P=(-16;20)$ $\quad R=(18;0)$

И нам надо в таком параллелограмме найти все ~~точки~~ пары точек таких что $x_1 - x_2 +$

Рассмотрим систему координат такую, что в ней ось x обычная, а ось y имеет ед. отрезок равный ~~по~~ пяти ед. отрезкам изначальной системы коорд.

Тогда в новой системе коорд:
$O=(0;0)$ $P=(-16;16)$
$Q=(2;16)$ $R=(18;0)$

Заметим, что мы можем двигать наш параллелограмм на вектора с целыми координатами и от этого # подходящих пар не изменится, т.к.:

$5(x_2+\alpha_x) - 5(x_1+\alpha_x) + (y_2+\alpha_y) - (y_1+\alpha_y) = 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1$
где α_x и α_y – сдвиги по осям x и y

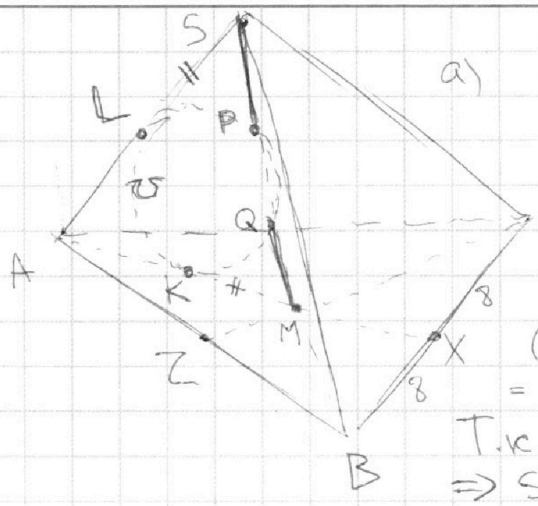
Рассмотрим парал-м с вершинами $(-80;80)(10;80);(0;0)(0;90)$

Заметим, что # искомых пар в парал-ме $PQRO$ = # пар точек, таких, что $x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 45$ в новом парал-ме

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



а) Пусть X – середина BC

Y – середина AC

Z – середина AB

C Степень точки S отн-но ω = $= SL^2 = SP \cdot SQ$

Степень точки M отн-но ω = $= MK^2 = MQ \cdot MP$.

Т.к ~~MQ~~ $MQ = SP \Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow SL = MK$

$AK = AL$ (отрезки касательных из A к ω) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AS = AM = BC = 16$

~~ASC~~ M – точка пересечения медиан $\Rightarrow AM = 2MX \Rightarrow AX = \frac{3}{2}AM = 24$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow MX = 8$. В $\triangle BMC$ медиана MX равна половине BC $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$

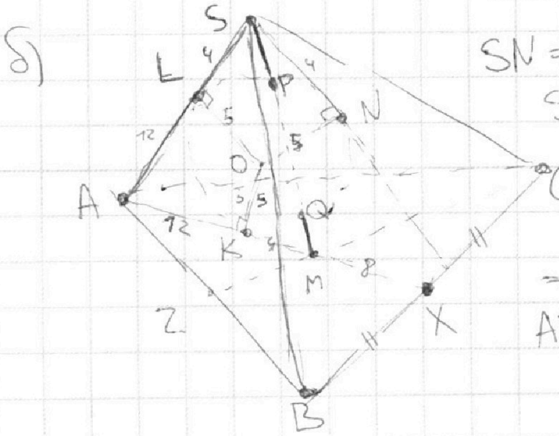
M – точка пересечения медиан $\triangle ABC \Rightarrow S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{100}{3}$

$\angle BMC = 90^\circ \Rightarrow S_{BMC} = \frac{BM \cdot MC}{2} \Rightarrow BM \cdot MC = \frac{200}{3}$

$BM = \frac{2}{3}BY$; $CM = \frac{2}{3}CZ \Rightarrow \frac{4}{9} BY \cdot CZ = \frac{200}{3} \Rightarrow BY \cdot CZ = 150$

$BY \cdot CZ \cdot AX = 24 \cdot 150 = \boxed{3600}$

б)



$SN = SL$ (отрезки касательных из S к ω)

$SL = MK$ (доказано в п.а) $\Rightarrow MK = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow AK = AL = 12$ (т.к $AM = 16$)

ON – нормаль к (BCS)

OK – нормаль к (ABC) $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle((ABC);(BCS)) = \angle(ON;OK) = 180^\circ - \angle NOK$

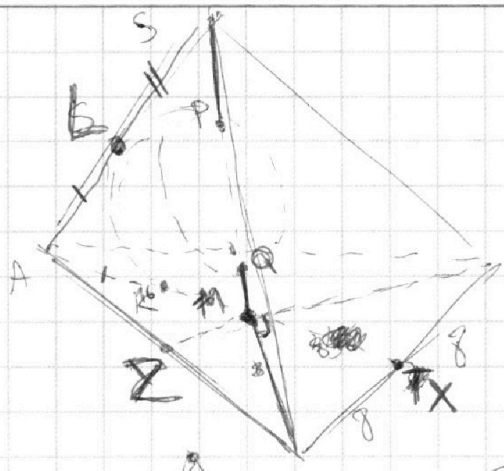
$AK = KX = 12$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



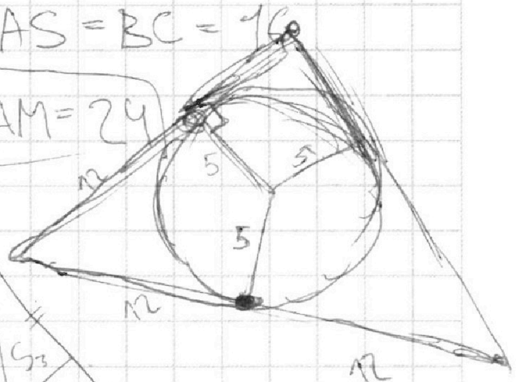
$MK^2 = MQ \cdot MP$

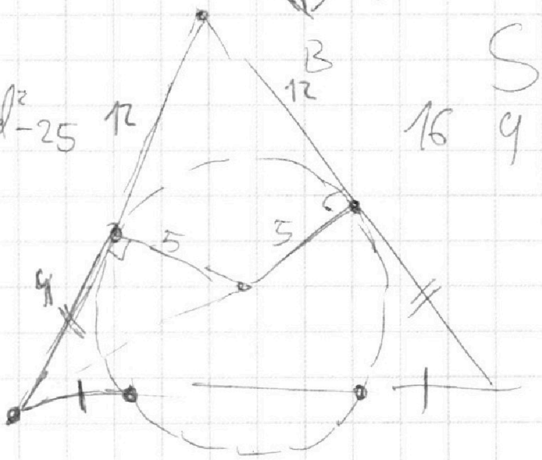
$SL^2 = SP \cdot SQ$

$\Rightarrow MK = SL$

$AM = AS = BC = 16$

$\boxed{AT = \frac{3}{2} AM = 24}$



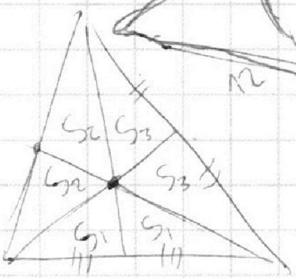


$16 = d^2 - 25$

$d^2 = 41$

S

16 9



$$\frac{BM \cdot MC}{2} = \frac{100}{3}$$

$$BM \cdot MC = \frac{200}{3}$$

24 16 16

$\boxed{16}$ $\boxed{16}$ $\boxed{24}$

$\frac{2}{3}$ 256 + 256

32 + 24 = 56

P = 28

600 | 4
-4 | 150
20

12
150
× 24
60
30
3600

$\sqrt{28 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 4}$

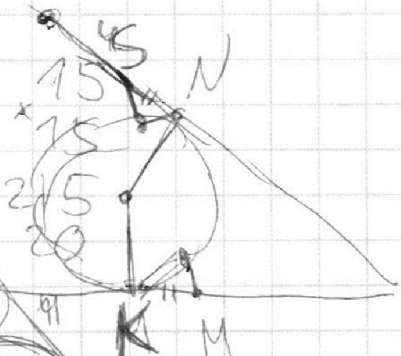
7 ·

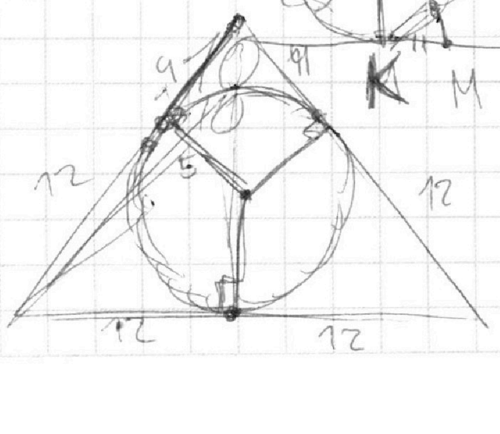
15
× 15

20
× 20
400
× 20

169
× 20
3380

13
× 13
39
13





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

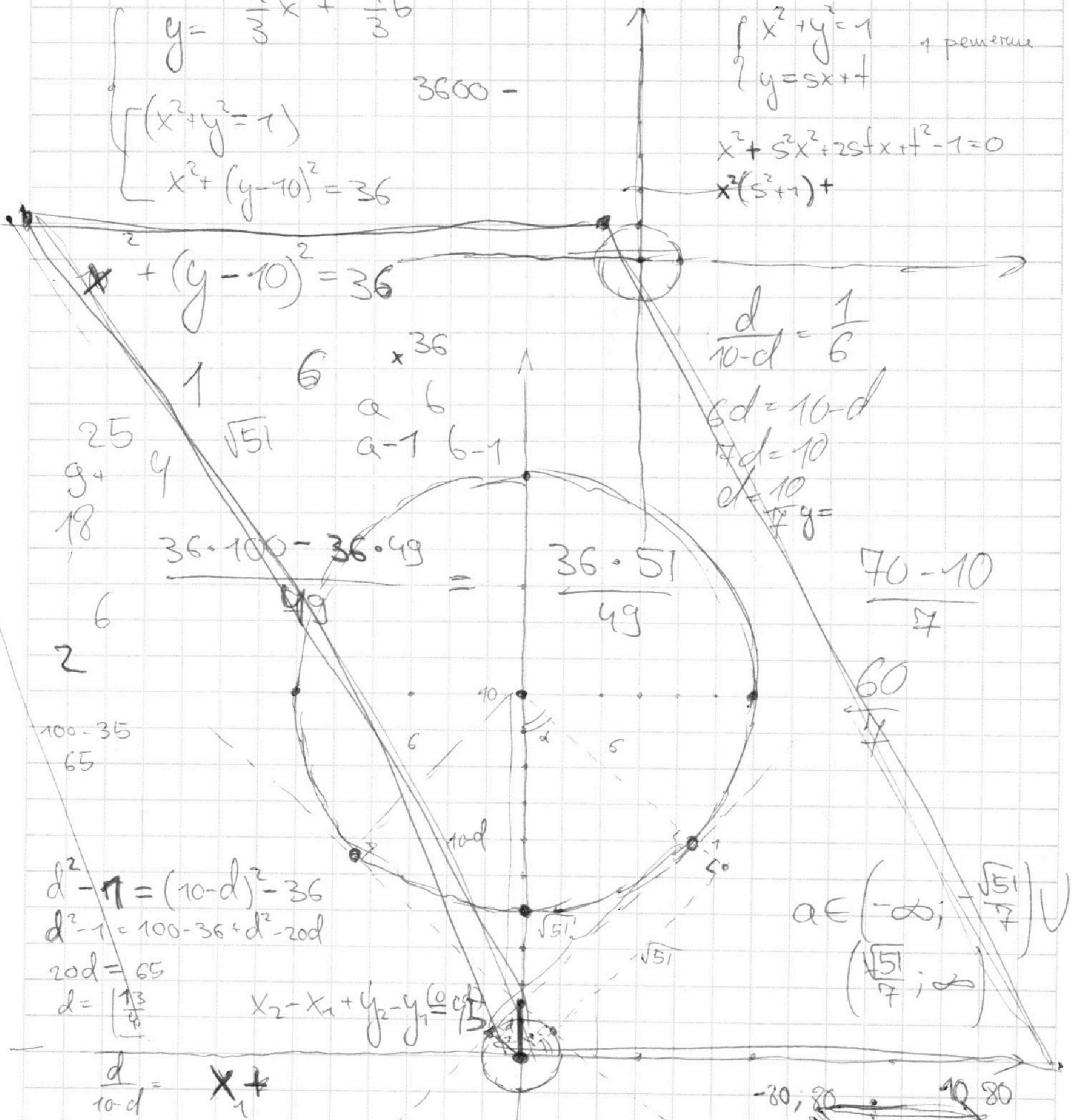
$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ \left[\begin{array}{l} (x^2+y^2=1) \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right. \end{cases}$$

3600 −

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=sx+t \end{cases}$$ 1 решение

$x^2+s^2x^2+2stx+t^2-1=0$

$x^2(s^2+1)+$



$x^2+(y-10)^2=36$

$\frac{d}{10-d}=\frac{1}{6}$

$6d=10-d$

$7d=10$

$d=\frac{10}{7}$ $y=$

$\frac{36\cdot100-36\cdot49}{49}=\frac{36\cdot51}{49}$

$\frac{70-10}{7}$

$\frac{60}{7}$

100 − 35

65

$d^2-1=(10-d)^2-36$

$d^2-1=100-36+d^2-20d$

$20d=65$

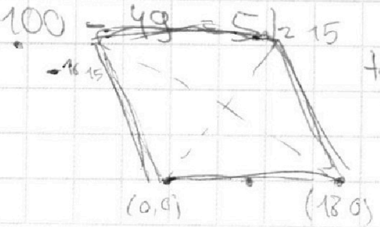
$d=\frac{13}{4}$

$x_2-x_1+y_2-y_1$

$\frac{d}{10-d}=$

$a\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{51}}{7}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{51}}{7};\infty\right)$

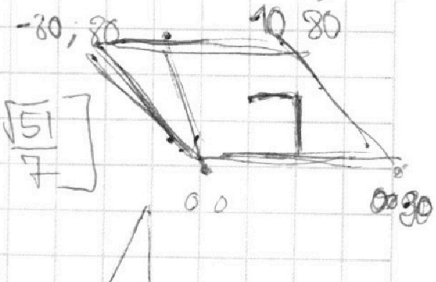
100 − 49 = 51



$\operatorname{tg}\alpha=\boxed{\frac{\sqrt{51}}{7}}$ a $\left[-\frac{\sqrt{51}}{7};\frac{\sqrt{51}}{7}\right]$

$-\frac{\sqrt{51}}{7}$

$18\cdot5=90$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$(s+t)(s^4-s^3t+s^2t^2-st^3+t^4+3)=0$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

5^2

25

$\log_{2x} 5 = t$

$\frac{1}{t^4} - 3t = \frac{4}{3}t - 3$

$\log_y 5 = s$

$\boxed{\frac{13t}{3} - \frac{1}{t^4} - 3 = 0}$

$\frac{1}{s^4} + 4s = -\frac{1}{3}s - 3$

$\frac{13}{3}s + \frac{1}{s^4} + 3 = 0$

$\cancel{\frac{13}{3}s - \frac{1}{s^4}}$

$\log_5 2x = t$

$\boxed{t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0}$

$\log_5 y = s$

$\frac{13}{3t} - t^4 - 3 = 0$

$\frac{13}{3s} + s^4 + 3 = 0$

$s^5 + 3s + \frac{13}{3} = 0$

$\frac{13}{3}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s}\right) + s^4 - t^4 = 0$

$s^5 + t^5 + 3t + 3s = 0$

$\frac{13}{3}\left(\frac{t+s}{ts}\right) + (s-t)(s+t)(s^2+t^2) = 0$

$(t+s)\left(\frac{13}{3ts} + (s-t)(s^2+t^2)\right) = 0$

$\log_5 2x + \log_5 y = 0 \quad \log_5 2xy = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} t+s=0 \\ 13 = 3ts(t-s)(s^2+t^2) \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \geq 2^8 3^{14} 5^{12}$

$bc \geq 2^{12} 3^{20} 5^{17}$

$ac \geq 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$abc \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$x+y \geq 8$

$y+z \geq 12$ $\quad 2(x+y+z) \geq 34$

$z+x \geq 14$ $\quad x+y+z \geq 17$

$+\begin{array}{r}34\\21\\\hline 55\end{array}$

$a=$

7

$x+y=$

$x+y+z=28$

$x+y=15$

$y+z=20$

$z+x=21$

$z=13$

$x=8$

$y=7$

$\begin{array}{r}12\\+17\\\hline 29\\+39\\\hline 68\end{array}$

14

$x+y+z=17$

$z=9$

$x=5$

$y=3$

$y=$

$x+y+z=34$

$x+y=12$

$y+z=17$

$z+x=39$

56

68

c

1.

$a+b \geq 12$

$b+c \geq 17$

$\boxed{a+c \geq 39}$

$2(a+b+c) \geq 68$

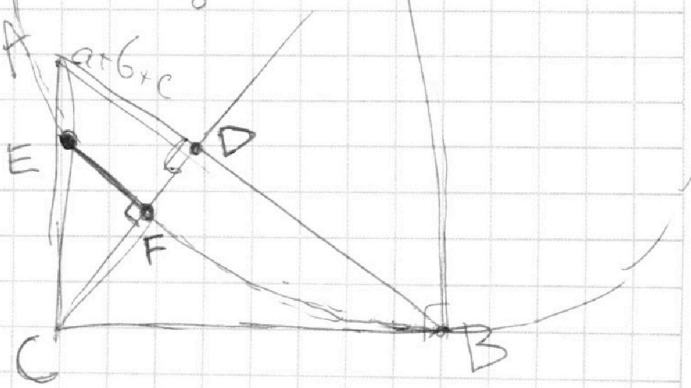
$a+b \geq$

$c=20$

a

$\log_{8x^3} 625 = \dfrac{1}{\log_{625} 8x^3}$

$\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}\log_5 2x}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sin(0)=0$

$0=0$

$10\arcsin(0)=0$

$10\arcsin(\phi)=\pi$

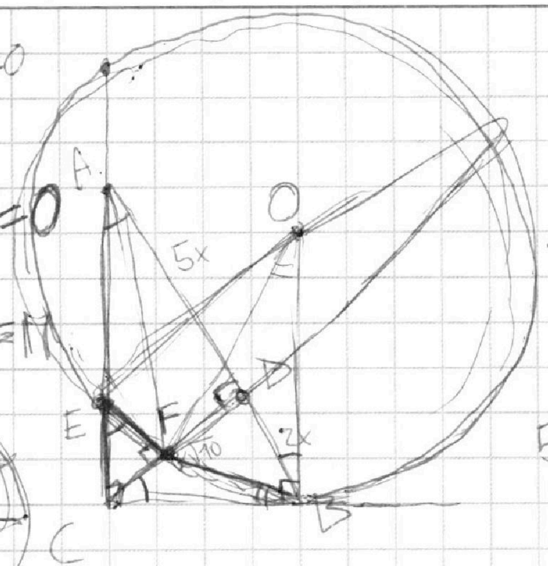
$10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$

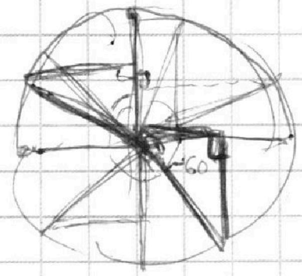
$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$10\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

$10\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\pi-2x$

5





$\frac{5\sqrt{10}}{10}=\boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$

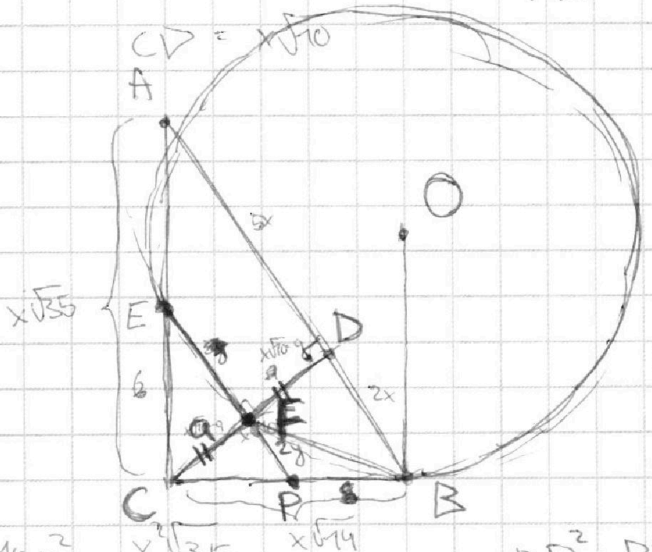
$\frac{5x}{CD}=\frac{CD}{2x}$ $\quad CE\cdot CA=BC^2$

$PE=2$

35
+14
49

$90-(-60)$
$=150$

$CD=x\sqrt{10}$



$PF=\frac{2x}{x\sqrt{10}}\cdot a$

$PE=\frac{7x}{x\sqrt{10}}\cdot a$

$CP=\frac{x\sqrt{14}}{x\sqrt{10}}\cdot a$

$BP=x\sqrt{14}\left(1-\frac{a}{x\sqrt{10}}\right)=x\sqrt{14}\left(\frac{x\sqrt{10}-a}{x\sqrt{10}}\right)$

$25x^2+10x^2$ $\quad x^2\sqrt{35}$

$BP^2=PE\cdot PF$

$14x^2\left(\frac{10x^2+a^2-2ax\sqrt{10}}{10x^2}\right)=\frac{14x^2a^2}{x^2 10}$

$x\sqrt{35}$ $\quad \frac{a}{x\sqrt{10}}=\frac{b}{x\sqrt{35}}$

$b=\frac{ax\sqrt{35}}{\sqrt{10}}=\boxed{ax\sqrt{\frac{7}{2}}}$

$x\sqrt{35}=ax\sqrt{\frac{7}{2}}$

$7ax^2\sqrt{\frac{5}{2}}$

2

$14\left(\frac{10+a^2-2a\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{14a^2}{10}$

$14(10+a^2-2a\sqrt{10})=14a^2$

$140=28a\sqrt{10}$

$5=a\sqrt{10}$

$a=\boxed{\frac{5}{\sqrt{10}}}=$