



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x - степень вхождения двойки в a , $y=6$,
 $z=6$ с. Тогда, т.к. $ab:2^8; bc:2^{12}; ac:2^{14} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x+y \geq 8 \\ &y+z \geq 12 \quad \Rightarrow 2(x+y+z) \geq 34 \Rightarrow (abc)^2 : 2^{34} \Rightarrow \\ &z+x \geq 14 \quad \Rightarrow abc : 2^{17} \end{aligned}$$

Аналогично, т.к. $ab:3^{14}; bc:3^{20}; ac:3^{21}$

то $(abc)^2 : 3^{55}$ но т.к. $abc \in \mathbb{N}$, то степень

вхождения тройки в abc должна быть четной \Rightarrow

$$\Rightarrow abc : 3^{28}$$

$$abc : ac \Rightarrow abc : 5^{39}$$

Т.к. 2; 3; 5 нонпримо взаимно просты, то

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Пример: $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{19}$ $ab : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$
 $b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$ $bc : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$
 $c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{20}$ $ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2$$

$$\begin{aligned} ab &\geq 2^8 3^{14} 5^{12} \\ bc &\geq 2^8 3^{12} 5^{20} 7^{17} \\ ac &\geq 2^8 3^{14} 5^{21} 7^{33} \end{aligned}$$
$$(abc)^2 \geq 2^8 3^{34} 5^{34}$$

$$\begin{aligned} abc : ab &= 2^8 \\ abc : bc &= 3^{14} \\ abc : ac &= 5^{12} \end{aligned}$$
$$abc : 2^8 3^{14} 5^{12} \Rightarrow abc \geq 2^8 3^{14} 5^{12}$$

Пусть x - степень вхождения двойки в a , y - в b , z - в c . Тогда, т.к. $ab : 2^8$; $bc : 2^{14}$; $ac : 2^{12}$ \Rightarrow

$$\begin{aligned} x+y &\geq 8 \\ y+z &\geq 14 \\ z+x &\geq 12 \end{aligned}$$
$$2(x+y+z) \geq 34 \Rightarrow x+y+z \geq 17 \Rightarrow$$
$$abc : 2^{19}$$

Аналогично $(abc)^2 : 3^{55} \Rightarrow abc : 3^{28}$ (т.к. $abc \in M$)

а также $(abc)^2 : 5^{68} \Rightarrow abc : 5^{34}$

Т.к. $2 \cdot 3 \cdot 5$ идентично входит в обе степенности следует, что

$$abc : 2^{17} 3^{28} 5^{34} \Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{34}$$

Пример: $a = 2^5 3^8 5$
 $b = 2^3 3^7 5$
 $c = 2^9 3^{13} 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

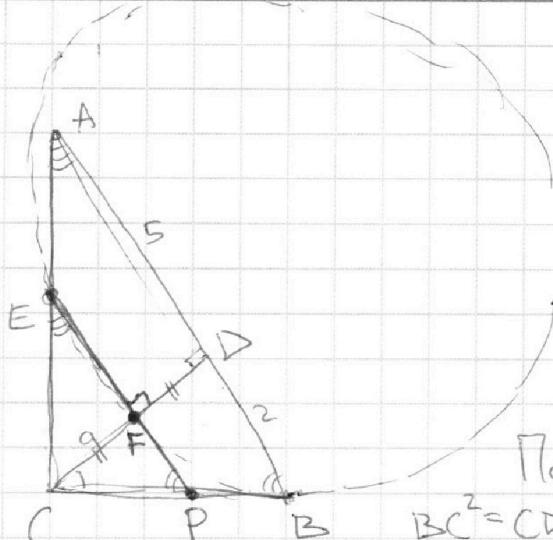
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



В силу масштаба
будем считать, что
 $AB = 7$.
Тогда т.к. $AD : DB = \frac{5}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow AD = 5 \quad DB = 2$
CD - высота в прямоугольнике
предведенном к гипотенузе \Rightarrow
 $\Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{10}$
 $EF \parallel AB \Rightarrow EF \perp CD$
По т.Пифагора в $\triangle CBD$:
 $BC^2 = CD^2 + BD^2 = 10 + 4 = 14 \Rightarrow BC = \sqrt{14}$
P - пересечение EF с BC

Пусть длина $CF = a$.

Тогда т.к. $\triangle CPF \sim \triangle CBD$ (по 2-м углам) \Rightarrow

$$\Rightarrow PF = \frac{BD \cdot CF}{CD} = \frac{2a}{\sqrt{10}}; CP = \frac{BC \cdot a}{CD} = \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{10}} \Rightarrow BP = \sqrt{14} - \frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{10}}$$

$$\triangle CPE \sim \triangle CBA \text{ (по 2-м углам)} \Rightarrow PE = \frac{AB \cdot CF}{CD} = \frac{7a}{\sqrt{10}}$$

По теореме касательной: $PB^2 = PF \cdot PE$

$$\left(\sqrt{14}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{10}}\right)\right)^2 = \frac{14a^2}{10}$$

$$1 - \frac{2a}{\sqrt{10}} + \frac{a^2}{10} = \frac{a^2}{10} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow F - \text{середина } CD$$

$$\begin{aligned} \triangle CEF &\sim \triangle BAC \text{ (по 2-м углам)} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2 = \frac{BC^2}{CF^2} = \\ &= \frac{14}{10} = \frac{28}{10} = \frac{28}{10} = \frac{14}{10} = \frac{56}{70} = 5,6 \end{aligned}$$

Ответ: 5,6



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$N_3 \quad 10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$$

$$10(\frac{\pi}{2} - x) = \pi - 2x$$

$$5\pi - 10x = \pi - 2x$$

$$4\pi = 8x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Проверка: $10 \arcsin(\cos \frac{\pi}{2}) = \pi - \pi$?

$$10 \arcsin(0) = 0$$
 ?

$$0 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

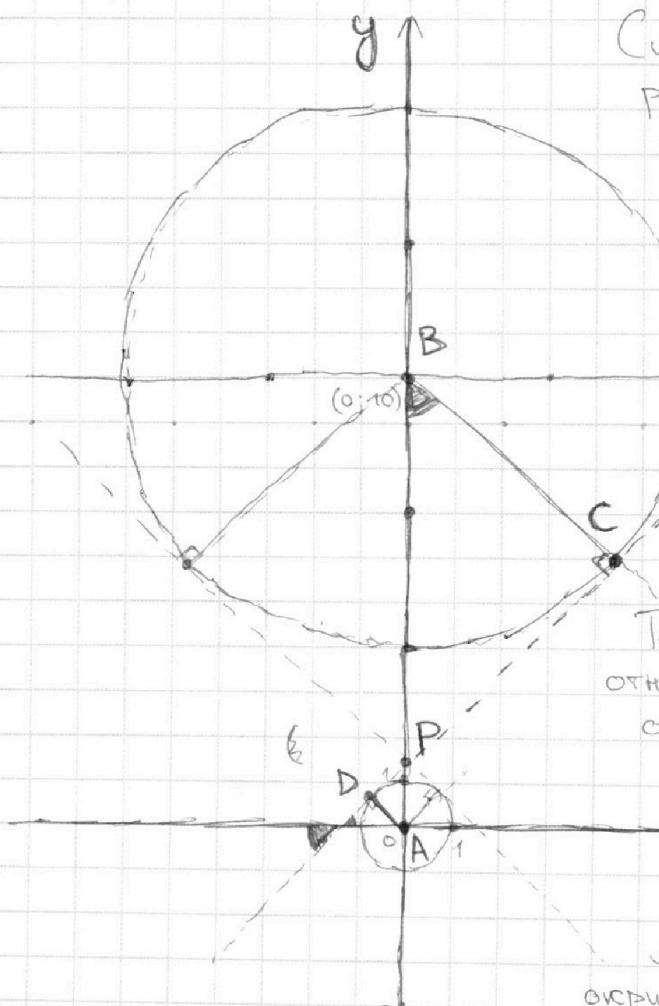


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ ((x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

График первого ур-ия — прямая

Графики второго и третьего ур-ий — окр-ти



Система будет иметь ровно 4 решения тогда и только тогда, когда прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ будет пересекать каждую из этих окр-ти в 2х различных точках

? Построим общие внутренние касательные к этим окр-тиам. Пусть у той из них, у которой положительный коэф. при x этот коэф. равен k . Тогда т.к. окр-ти симметричны относительно оси y , то у второй окр-ти коэф. при $x = -k$.

Заметим, что если $\frac{a}{3} \in [-k; k]$, то прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$

может пересекать только одну окружность либо касаться обеих, но тогда количество корней системы $\neq 4$. И наоборот, если $\frac{a}{3} \notin [-k; k]$, то вдав в такое, чтобы прямая $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$ проходила через точку пересечения обеих внутренних касательных к окр-тиам, мы получим 4 пересечения $\Rightarrow 4$ корня.

(Обозначим)

Осталось посчитать k

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим точкой A центр маленькой окружности
точкой B - центр большой. Точкиами C и D - точки
касания положительной общей касательной с
большой и маленькой окружностями. P - точка
пересечения касательных.

Очевидно что $BC \parallel AD \Rightarrow$ по т. Фалеса $\frac{AP}{BP} = \frac{AD}{BC}$
Пусть $|AP| = d$, тогда $BP = 10 - d$; $AD = 1$; $BC = 6$ (радиусы)
 $\Rightarrow \frac{d}{10-d} = \frac{1}{6} \quad 6d = 10 - d \quad d = \frac{10}{7} \quad BP = 10 - d = \frac{60}{7}$

Задача По определению k -тактичес угла, образованного
положительной касательной с осью X . Очевидно, что этот
угол равен $\angle PBC$

$$\tan \angle PBC = \frac{PC}{BC}$$

По т. Пифагора в $\triangle PCB$: $PC^2 = PB^2 - BC^2 =$
 $= \left(\frac{60}{7}\right)^2 - 6^2 = \frac{36 \cdot 100 - 36 \cdot 49}{49} = \frac{36 \cdot 51}{49} \quad PC = \frac{6}{7} \sqrt{51}$

$$\tan \angle PBC = \frac{\frac{6}{7} \sqrt{51}}{6} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\frac{a}{3} \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; \infty\right)$$

$$a \in \left(-\infty; -3\frac{\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(3\frac{\sqrt{51}}{7}; \infty\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } t = \log_5 2x; s = \log_5 y$$

Тогда

$$\log_5(2x) - 3\log_2 5 = \log_{5^3} 625 - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t - \frac{3}{4} = \frac{4}{3t} - 3 \Leftrightarrow t - \frac{13}{3t} + 3 = 0$$

$$\log_5 y + 4\log_5 5 = \log_{5^4} 0,2 - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s^4 + \frac{4}{5} = -\frac{1}{35} - 3 \Leftrightarrow s^4 + \frac{13}{35} + 3 = 0$$

$$\begin{cases} t^4 - \frac{13}{3t} + 3 = 0 \\ s^4 + \frac{13}{35} + 3 = 0 \end{cases} \quad t, s \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0 \\ s^5 + 3s + \frac{13}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Сложим эти ур-ия: } t^5 + s^5 + 3(s+t) = 0$$

$$(s+t)(s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 + 3) = 0$$

Заметим, что $s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 > 0$, т.к. $s^5 + t^5 = 0$

тогда и только тогда, когда $t = -s$.

Отсюда $s^4 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 + 3 > 3 \Rightarrow$ не обращается в 0

$$\Rightarrow s+t = 0$$

$$\log_5 2x + \log_5 y = 0 \Leftrightarrow \log_5 2xy = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow xy = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x_1 - 5x_2 + y_2 - y_1 = 45 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + \frac{y_2 - y_1}{5} = 9$$

5 5

Теперь давайте уменьшим зауженный
отрезок оси y в $\frac{1}{5}$ раз

Теперь $O = (0; 0)$ $Q = (2; 20)$
 $P = (-16; 20)$ $R = (18; 0)$

У нас надо в таком параллелограмме
найти все пары точек таких что
 $x_1 - x_2 +$

Рассмотрим систему координат такую, что в этой
оси x обычная, а ось y
имеет ед. отрезок равный
из пяти ед. отрезкам
изначальной системы коорд.

Тогда в новой системе коорд:

$$O = (0; 0) P = (-16; 16)$$

$$Q = (2; 16) R = (18; 0)$$

Заметим, что мы можем двигать наш параллелограмм
на вектора с целыми координатами и от этого
подходящих пар точек изменится, т.к :

$$5(x_2 + dx) - 5(x_1 + dx) + (y_2 + dy) - (y_1 + dy) = 5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1
здесь dx и dy - сдвиги по осям x и $y$$$

Рассмотрим паралл-м с вершинами $(-80; 80), (10; 80), (0; 0), (0; 90)$

Заметим, что # исходных пар в парал-м $PQRO =$ # пар точек,
таких, что $x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 45$ в новом парал-м

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

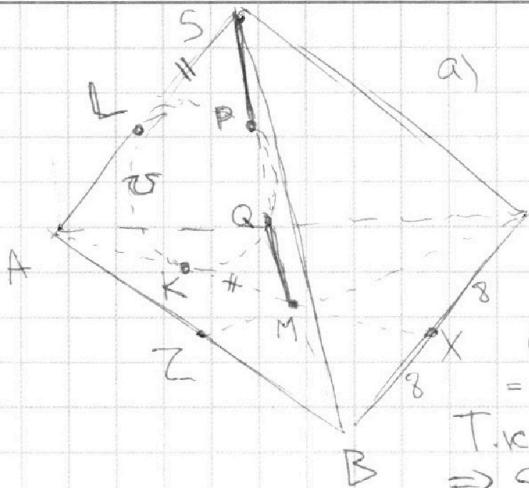
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



a) Пусть X -середина BC
 Y -середина AC
 Z -середина AB

$$\begin{aligned} \text{Степень точки } S \text{ относительно } \odot O &= \\ &= SL^2 = SP \cdot SQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Степень точки } M \text{ относительно } \odot O &= \\ &= MK^2 = MQ \cdot MP. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Т.к. } PR &= MQ = SP \Rightarrow SL^2 = MK^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow SL = MK \end{aligned}$$

$$AK = AL \text{ (отрезки касательных из } A \text{ к } \odot O) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AS = AM = BC = 16$$

$$AX = \frac{3}{2} AM = 24$$

~~M -точка пересечения медиан $\Rightarrow AM = 2MX \Rightarrow$~~

$$\Rightarrow MX = 8. \Delta BMC \text{ медиана } MX \text{ равна половине } BC \Rightarrow$$

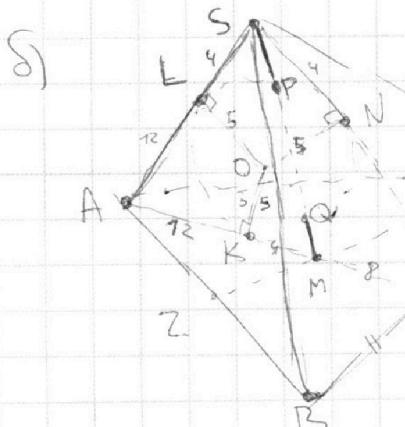
$$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$$

$$M\text{-точка пересечения медиан } \Delta ABC \Rightarrow S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{100}{3}$$

$$\angle BMC = 90^\circ \Rightarrow S_{BMC} = BM \cdot MC \Rightarrow BM \cdot MC = 200$$

$$BM = \frac{2}{3} BY; CM = \frac{2}{3} CZ \Rightarrow \frac{2}{3} BY \cdot \frac{2}{3} CZ = \frac{200}{3} \Rightarrow BY \cdot CZ = 150$$

$$BY \cdot CZ \cdot AX = 24 \cdot 150 = \boxed{3600}$$



$$SN = SL \text{ (отрезки касательных из } S \text{ к } \odot O)$$

$$SL = MK \text{ (доказано в н.а)} \Rightarrow MK = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AK = AL = 12 \text{ (т.к. } AM = 16)$$

$$ON \text{-нормаль к } (BCS) \Rightarrow$$

$$OK \text{-нормаль к } (ABC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle((ABC);(BCS)) = \angle(ON, OK) = 80^\circ - \angle NOK$$

$$AK = KX = 12$$

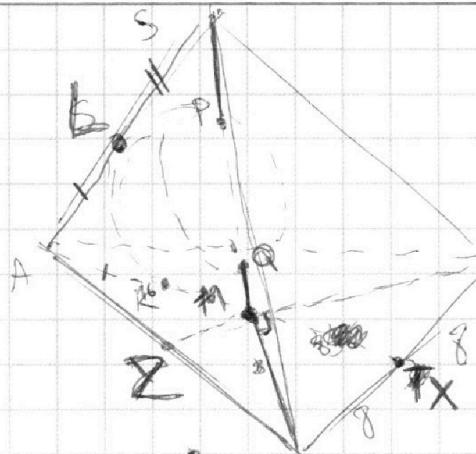
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

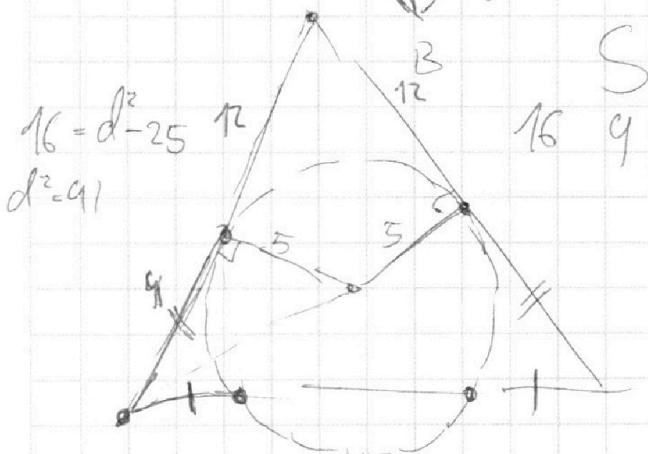
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

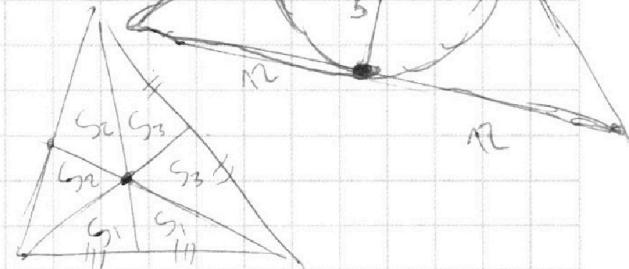


$$SP \cdot MK^2 = MQ \cdot MP \quad || \Rightarrow MK = SL$$
$$SL^2 = SP \cdot SQ$$



$$AM = AS = BC = 16$$

$$AT = \frac{3}{2} AM = 24$$



$$\frac{BM \cdot MC}{2} = \frac{100}{3}$$

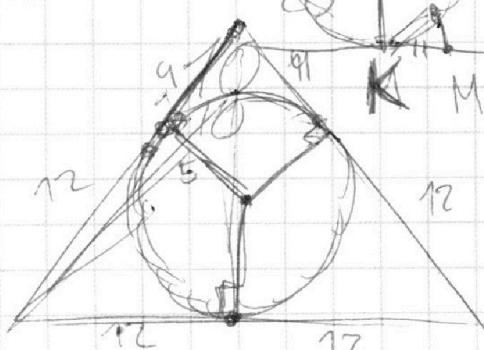
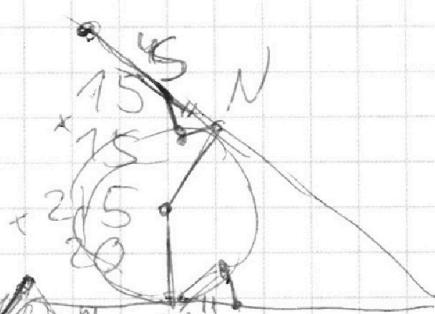
$$\begin{array}{|c|c|} \hline 16 & 16 \\ \hline 24 & \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 256 & 256 \\ \hline 32+24=56 & \end{array}$$
$$P = 28$$

$$\frac{BM \cdot MC}{2} = \frac{200}{3}$$

$$\begin{array}{r} 600 \\ -4 \\ \hline 150 \end{array}$$
$$\sqrt{28 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 4}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 24 \\ \hline 60 \\ 30 \\ \hline 3600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 20 \\ \hline 400 \\ -20 \\ \hline 20 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 169 \\ 20 \\ \hline 3380 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ (x^2 + y^2 = 1) \end{cases}$$

3600 -

$$x^2 + (y-10)^2 = 36$$

$$x^2 + (y-10)^2 = 36$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = sx + t \end{cases} \quad \text{решение}$$

$$x^2 + s^2x^2 + 2stx + t^2 - 1 = 0$$

$$x^2(s^2+1) +$$

$$\frac{d}{10-d} = \frac{1}{6}$$

$$6d = 10 - d$$

$$7d = 10$$

$$d = \frac{10}{7}$$

$$y =$$

$$\frac{70-10}{7}$$

$$1 \quad 6 \quad x^2 = 36$$

$$a = 6$$

$$a-1 = 6-1$$

$$25$$

$$g_+$$

$$18$$

$$6$$

$$2$$

$$100 - 35$$

$$65$$

$$d^2 - 1 = (10-d)^2 - 36$$

$$d^2 - 1 = 100 - 36 + d^2 - 20d$$

$$20d = 65$$

$$d = \frac{13}{4}$$

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 \stackrel{(o,c)}{=} 0$$

$$\frac{d}{10-d} = x +$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{51}}{7}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{51}}{7}; \infty\right)$$

$$100 - 4g = 5 \cdot 2 \cdot 15$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$-\frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\left[-\frac{\sqrt{51}}{7}; \frac{\sqrt{51}}{7} \right]$$

$$\frac{18}{5} = 90^\circ$$

$$-80, 80 \quad 10, 80$$

$$0, 0$$

$$0, 90$$

$$(0,0) \quad (18,0)$$

$$100 - 4g = 5 \cdot 2 \cdot 15$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$-\frac{\sqrt{51}}{7}$$

$$\left[-\frac{\sqrt{51}}{7}; \frac{\sqrt{51}}{7} \right]$$

$$\frac{18}{5} = 90^\circ$$

$$-80, 80 \quad 10, 80$$

$$0, 0$$

$$0, 90$$

$$(0,0) \quad (18,0)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{ab} b = \frac{1}{\log_a a} \quad (s+t)(s^9 - s^3t + s^2t^2 - st^3 + t^4 + 3) = 0$$

$$\log_{2x} 5 = t$$

$$\frac{1}{s^4} - 3t = \frac{4}{3}t - 3$$

$$\boxed{\frac{13t}{3} - \frac{1}{s^4} - 3 = 0}$$

$$\frac{13s}{3} + \frac{1}{s^4} + 3 = 0$$

$$\begin{matrix} 5 \\ 1 \\ 25 \end{matrix}$$

$$\log_5 5 = s$$

$$\frac{1}{s^4} + 4s = -\frac{1}{3}s - 3$$

$$\cancel{\frac{13}{3}s - \frac{1}{s^4}}$$

$$\boxed{t + 3t - \frac{13}{3} = 0}$$

$$\log_5 y = s$$

$$\frac{13}{3t} - t - 3 = 0$$

$$\frac{13}{3s} + s^4 + 3 = 0$$

$$\frac{13}{3} \left(t + \frac{1}{s} \right) + s^4 - t^4 = 0$$

$$s^5 + 3s + \frac{13}{3} = 0$$

$$\frac{13}{3} \left(\frac{t+s}{ts} \right) + (s-t)(s+t)(s^2+t^2) = 0$$

$$s^5 + t^5 + 3t + 3s = 0$$

$$(t+s) \left(\frac{13}{3ts} + (s-t)(s^2+t^2) \right) = 0$$

$$\begin{cases} t+s=0 & \log_5 2x + \log_5 y = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2} \\ \log_5 2x + \log_5 y = 0 \end{cases}$$

$$13 = 3ts(t-s)(s^2+t^2)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab \geq 2^8 3^{14} 5^{12}$$

$$bc \geq 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$ac \geq 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$abc : 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$x+y=28$$

$$y+z=22$$

$$z+x=14$$

$$x+y+z=34$$

$$x+y+z \geq 74$$

$$\begin{array}{r} + 34 \\ 21 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$a =$$

$$7$$

$$x+y=$$

✓

$$x+y+z=77$$

$$z=3$$

$$x=5$$

$$y=3$$

$$y =$$

c

1.

$$a+b \geq 12$$

$$b+c \geq 17$$

$$\boxed{a+c \geq 39}$$

$$x+y+z=28$$

$$x+y=15$$

$$y+z=20$$

$$z+x=21$$

$$z=13$$

$$x=8$$

$$y=7$$

$$\begin{array}{r} + 17 \\ + 29 \\ \hline 68 \end{array}$$

14

$$x+y+z=34$$

$$x+y=12$$

$$y+z=27$$

$$z+x=33$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 68 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2(a+b+c) \geq a+b \geq \\ 68 \end{array}$$

①

$$a+b+c$$

$$E$$

$$F$$

$$C$$

$$B$$

a

$$c=20$$

$$1$$

$$\log_{8x^3} 625 = \frac{1}{\log_{625} 8x^3}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{\log_5 2x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

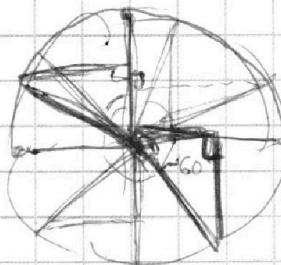
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$s \quad \sin(0) = 0$$

$$0 = 0$$

$$10 \arcsin(0) = 0$$

$$10 \arcsin(\phi) = M$$



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\cos x$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - 2x$$

5

$$\frac{5\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{5x}{CD} = \frac{CD}{2x}$$

$$CE \cdot CA = BC^2$$

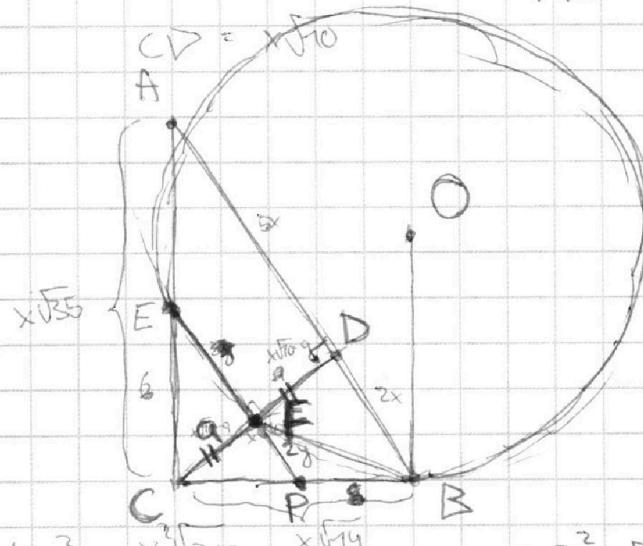
$$PE = 2$$

$$+\frac{35}{14}$$

$$49$$

$$90 - (-60)$$

$$150$$



$$25x^2 + 10x^2$$

$$x\sqrt{35}$$

$$\frac{a}{x\sqrt{10}} = \frac{b}{x\sqrt{35}}$$

$$b = ax\sqrt{35} = \left(ax\sqrt{\frac{4}{2}}\right)$$

$$x\sqrt{35} \cdot ax\sqrt{\frac{4}{2}}$$

2

$$BP^2 = PE \cdot PF$$

$$14x^2 \left(\frac{10x^2 + a^2 + 2ax\sqrt{10}}{10x^2} \right) = \frac{14a^2}{x^2 \cdot 10}$$

$$PF = \frac{2x}{x\sqrt{10}} \cdot a$$

$$PE = \frac{4x}{x\sqrt{10}} \cdot a$$

$$CP = \frac{x\sqrt{4}}{x\sqrt{10}} \cdot a$$

$$BP = x\sqrt{4} \left(1 - \frac{a}{x\sqrt{10}} \right)$$

$$x\sqrt{14} \left(\frac{x\sqrt{10} - a}{x\sqrt{10}} \right)$$

$$14 \left(\frac{10 + a^2 + 2ax\sqrt{10}}{10} \right) = \frac{14a^2}{10}$$

$$14(10 + a^2 - 2ax\sqrt{10}) = 14a^2$$

$$140 = 28ax\sqrt{10}$$

$$5 = ax\sqrt{10}$$

$$a = \frac{5}{x\sqrt{10}} =$$