



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 3

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
- [6 баллов] Данна треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

Задача 1

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\text{Но есть } ab = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}, bc = l \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}, ac = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 = k \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot l \cdot 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot m \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} = k \cdot l \cdot m \times$$

$$\times 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

Н.д. $k \cdot l \cdot m$ должны быть互质的, чтобы abc было互质的

$$ab \cdot bc \cdot ac = k \cdot l \cdot m \cdot 2^{70} \cdot 3^{34} \cdot 5^{29}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ac = m \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \\ \end{array} \right.$$

$$b = \frac{k \cdot l}{m} \cdot 2^6 \cdot 3^{18} \cdot 5^{-10}$$

Н.д. b - натуральное, $\frac{k \cdot l}{m} : 5^{10}$, т.к. k, l 互质, то $k \cdot l : 5^{10}, k \cdot l : 5^{11}$

также k, l 互质, т.к. k, l 互质, то $k \cdot l : 5^{10}, k \cdot l : 5^{11}$

$$\text{также } k, l \text{互质, то } k \cdot l : 5^{10}, k \cdot l : 5^{11} \Rightarrow ab \geq \overline{5^{10} \cdot 3 \cdot 2^{34} \cdot 3^{16} \cdot 5^{68}} = \\ = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{70}$$

Пример такой задачи $abc = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}, b = 2^3 \cdot 3^7, c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{27}$,

$$ab \cdot c = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

задача 1 из 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$14a^2(1-k)^2 = 7a \cdot 2a \cdot k^2 \Rightarrow (1-k)^2 = k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}, \text{ тогда } \frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = k^2 =$$

$$= \frac{1}{4}, \text{ но } \frac{S_{CAD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AD+BD} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{EF}} = \frac{28}{5}$$

$$\text{Тогда: } \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5}$$

Изображение 2 из 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

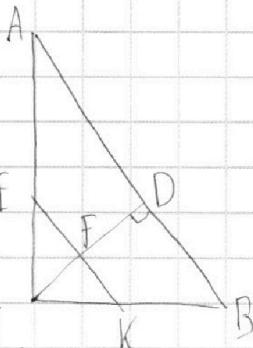
5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2

Реш.

$\triangle ABC$ - прямой

(D) - высота

$$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{2}$$

Найдем:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle CEF} = ?$$

Решение:

1. Найдем $AD = 5a$, тогда $DB = 2a$.

2. $\sin \angle CAD = \sin \angle BCD$, m.r. $\angle CAD = \angle BCD \Rightarrow CD = \sqrt{50}a$ катета
в прямой. треугольнико.

3. $CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = 7a$ по теореме Пифагора

значит

4. Из гипотезы + непротиворечия в тезисе, предположим $EK \parallel AB$
показательно для AB $\frac{EF}{AD} = \frac{EK}{AB} = \frac{KF}{BD} = \frac{LK}{CB} = k$, где k - некоторый
коэффициент

5. Найдём степень подобия K относительно C определите каким?

одной стороны это KB^2 , а с другой $KF \cdot KE$, то

$$BC^2 (1-k)^2 = BD \cdot AB = k^2$$

степень подобия

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$$

Задача arcsin имеет лемнискату от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, т.е. \Rightarrow

$$\arcsin(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, \text{ если } (\frac{\pi}{2} - x) \in [\frac{\pi}{2} - 2\pi n, \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2}], n \in \mathbb{Z}, \text{ но}$$

$$\arcsin(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, \text{ если не применяется. Такое } n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x + 20\pi n = \pi - 2x \\ (\frac{\pi}{2} - x) \in [2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\pi + 10x + 20\pi n = \pi - 2x \\ (\frac{\pi}{2} + x) \in [2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \cancel{\frac{\pi - 5\pi n}{2}} \\ x = \frac{\pi + 5\pi n}{2} \end{cases}$$

$$\frac{5\pi n}{2} \geq 2\pi n - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi n}{2} \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x = \cancel{\frac{5\pi n + \pi}{2}} \\ 5 + 3 \end{cases}$$

$$\frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3} \geq 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3} \leq 2\pi n + \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{cases} n \in [-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}] \vdash -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \\ x = \cancel{\frac{\pi + 5\pi n}{2}} \end{cases}$$

Черновик 11032

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} n \in [-2; 1] \\ -3 \leq n \leq 1 \\ -1 \leq n \leq 4 \end{array} \right. \Rightarrow n \in [-1, 1]$$
$$x = \frac{5\pi n - \pi}{3}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} \\ x &= -\frac{4\pi}{3} \\ x &= \frac{8\pi}{3} \\ x &= \frac{10\pi}{3} \\ x &= \frac{4\pi}{3} \\ x &= -\frac{4\pi}{3} \\ x &= -\frac{10\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 3\pi \\ x &= \frac{\pi}{2} \\ x &= -2\pi \\ x &= 3\pi \\ x &= \frac{4\pi}{3} \\ x &= -\frac{4\pi}{3} \\ x &= -2\pi \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi; \frac{\pi}{2}; -7\pi; -\frac{10\pi}{3}; -2\pi; -\frac{11\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4\pi}{3}, 3\pi$$

$$\text{Ответ: } -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$$

Итоговый ответ



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Ответ: } \sigma \in (-\infty, -\frac{3\sqrt{57}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{57}}{7}, +\infty)$$

Ирина Гуз

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$6x - 3y + 4b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y) + 64 = 0$$

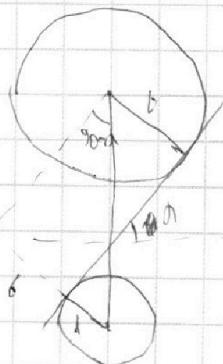
$$\begin{cases} y = \frac{ax}{3} + \frac{4b}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

Графически решаем задачу умножением окружностей:

(радиусом 1 и центром $(0, 0)$) и с радиусом 6 и центром $(0; 10)$
сместившись от x до y ,
координатами. Тогда x касаются в точке $(0, 10)$ а для которой $y = \frac{ax}{3} + \frac{4b}{3}$
не более чем
не касаются и пересекают две эти окружности в двух
точках, имеющих такое значение a , что $\frac{a}{3}$ - коэффициент большей
при большем a получаем малое b , это означает $y = \frac{ax}{3} + \frac{4b}{3}$ про-
ходит окружность в четырех местах.

Из рисунка видно, что $\sin(\theta - \alpha)$ равен

$$\frac{7}{10}, \text{ значит } \cos \alpha = \frac{7}{10} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{51}}{10} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow \alpha_{\text{пр.}} = \frac{3\sqrt{51}}{7}$$



аналогично, если для биссектрисы угла α и θ , рис. 1.

то, так как график функции $y = \frac{ax}{3} + \frac{4b}{3}$ линия, то $a \in (-\infty, -\frac{3\sqrt{51}}{7})$
имеющая из x



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_2 x + \log_5 y = 0$$

$$\log_{15} 2xy = 0$$

$$2xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{2}$$

Следует вуз 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$\log_5^4(2x) - 3\log_2 5 = \log_3 3625 - 3 \quad \text{Приоделюю}$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{8}{3 \log_5 2x} - 3 + \log_5 2x$$

$$\begin{cases} \log_5^5 2x + 3\log_5 2x - \frac{13}{3} = 0 \\ \log_5 2x \neq 0 \end{cases}$$

Изолюю

$$\log_5^4 y + 4 = \frac{1}{3 \log_5 y} - 3 + \log_5 y$$

$$\begin{cases} \log_5^5 y + 3\log_5 y + \frac{13}{3} = 0 \\ \log_5 y \neq 0 \end{cases}$$

Конечно получившееся уравнение.

$$\begin{cases} \log_5^5 2x + \log_5^5 y + 3\log_5 2x + 3\log_5 y = 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y \neq 1 \end{cases}$$

Заметим, что $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$, при этом бывают

два корня? исключим один.

$$\begin{cases} (\log_5 2x + \log_5 y) \cdot (\log_5^4 2x - \log_5^3 2x \cdot \log_5 y + \log_5^2 2x \cdot \log_5^2 y - \log_5 2x \cdot \log_5^3 y + \log_5^4 y) = 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y \neq 1 \end{cases}$$

Второй корень приведший к тому же итогу \Rightarrow нужно решить

уравнение 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Найдите угол наклона графика линейки - α . $\frac{6}{20} = \frac{1}{5} = \frac{80}{-16} = -5$

$$5x_2 + 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

Разделим это равенство на 5

$$y_1 = 10 - 5x_1$$

$$y_2 = 6 - 5x_2$$

При этом $b-a=45$. Значит, что градусы этого угла

равны 45° . Будем увеличивать a на 1, тогда b будет

$$80-45=35$$
, при $a=0$ $y_1=-5x_1$, т.е. А лежит на прямой $y_1=-5x_1$

И таких целочисленных x и y получится b при $y_1=-5x_1$

$$17 \in \mathbb{N}, \text{ при } x=1, y_1=17, b=17+1=18$$
, т.е. при $y_2=15-5x_2$ получим

17

также при $a=1$, то $y_1=15-5x_1$ тогда тоже можно записать, т.к.

$[-15; 0]$

$x \in [0, 18-15]$, т.к. при $x=-15$, $y_1=81$, что уже вне пределов,

значит x и y , будем 17 , при $a=5$ мы будем 16 .

Так

при $a=5$ такие x и y , будем 17 , при $a=5$ мы будем 16 .

значит $x_1 y_2 = 6 - 5x_2$ будем 30 пределы $a=1, 2, 3, 4, 5$

$$\text{при } b=18-5=13, \text{ т.е. при } a=80-45=45$$

$$\text{но } \left(\frac{45}{5}+1\right) \cdot 17^2 + 45 - \frac{45}{5} + 16^2 = 289 + 26 \cdot 256 = 2890 + 92 + 16 = 1270$$

нужно из 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6



7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: 12106

Страница 2 из 2



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AA_1 BB_1 LL_1 = \frac{9}{4} \cdot 24 \cdot \sqrt{128 - 16\sqrt{64 - \frac{625}{36}}} \cdot \sqrt{128 + 16\sqrt{64 - \frac{625}{36}}} = 9 \cdot 24 \cdot 4 \times$$
$$\times \sqrt{64 - (64 - \frac{625}{36})} = 9 \cdot 24 \cdot 4 \cdot \frac{25}{6} = 3600$$

• Ответ: $AA_1 BB_1 LL_1 = 3600$

математика 2нз²

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

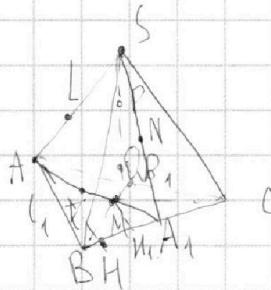
7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7



Доказ.

$$SP = MQ, S_{ABC} = 100, R = 5$$

$$SA = BC = 16$$

$$SN = 4.$$

Найти:

$$AA_1, BB_1, CC_1 - ?$$

$$a = ? \quad AA_1 + a = ?$$

Решение:

1. Пл. р. L, K, Q, P ∈ AMS, они & точки лежат на одной окружности.

ночка.

2. Наибольшее значение между S и M должно получиться, так как в треугольнике.

$$\begin{cases} SL^2 = SP \cdot (SP + PQ) \\ KM^2 = MQ \cdot (MQ + PQ) \end{cases} \Rightarrow SP = MQ \Rightarrow SL = KM, \text{ но } AL = AK \Rightarrow AS = AM \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \triangle ASM \sim \triangle PQL, AM = AS = BL = 16, \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 24, MA_1 = \frac{1}{2} AM = 8$$

$$3. AH = 2 \frac{S_{ABC}}{BC} = 12,5$$

$$4. MH_1 = \frac{AH}{3}, \text{ т.е. } MH_1 \text{ - перпендикуляр к } BC.$$

$$H_1 A_1 = \sqrt{8^2 - \frac{625}{36}}$$

$$5. BM = \sqrt{8^2 - \left(8^2 - \frac{625}{36}\right)^2 + \frac{625}{36}} \Rightarrow \sqrt{64 - 16 \cdot 128 + 16 \cdot \frac{625}{36}}$$

$$6. LM = \sqrt{\left(8 + \sqrt{8^2 - \frac{625}{36}}\right)^2 + \frac{625}{36}} = \sqrt{128 + 16 \cdot \frac{625}{36}}$$

супер! 100%

