



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - Найдите произведение длии медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Условие задачи. $\exists k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$, такие что

$$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k_1$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot k_2$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{20} \cdot k_3;$$

значит $(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{59}$

значит $(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k_1 k_2 k_3$

т.е $(abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

т.к. $(abc)^2$ - это квадрат, то 3 входит

в разложение $(abc)^2$ в четной степени \Rightarrow

$(abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$, откуда получаем, что

$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$, однако т.к. $ac : 5^{20}$, то

$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$; $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$; $c = 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$

Тогда $ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$; $bc = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{14}$; $ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$

Покажем, что условие задачи выполнено.

В свою очередь $abc = 2^{48} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Объем: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

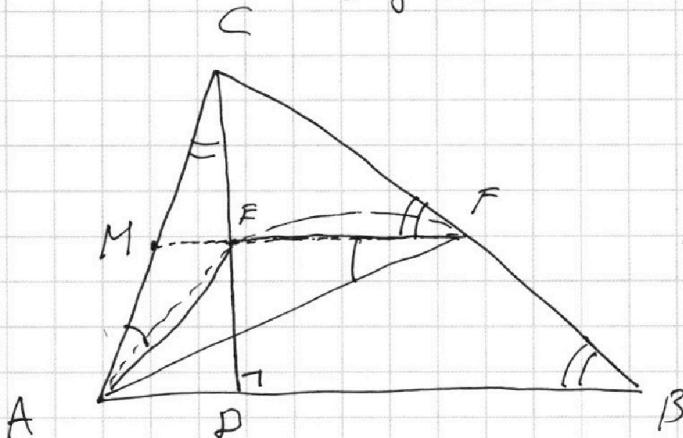
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2



1) т.к. AC касается
окружности (AEF)

$$\angle CAE = \angle EFA$$

2) т.к. $EF \parallel AB$, то

$\angle C \geq \angle ACD = \angle CBD = \angle CFE$, первое равенство
следует из $\angle ACD + \angle BCD = 90^\circ = \angle BCD + \angle CBD$, отсюда
AC касается окружности (CEF)

3) Получить теперь $M = EF \cap AC \Rightarrow$ из касания
прямой AC и окружностей (CEF) и (AEF)

$$MC^2 = ME \cdot MF = MA^2 \Rightarrow MC = MA \Rightarrow M - \text{ср.} \text{ AC}$$

т.к. $EF \parallel AB$, EF проходит через середину AC,

$EF - \text{ср. линия } \triangle CAB \Rightarrow EF = \frac{1}{2} AC \Rightarrow$

$$EF = \frac{BP}{2}$$

4) $AD = AB - BD = 1,4 \text{ BP} - BP = 0,4 \text{ BP} \Rightarrow$

$$CD^2 = AD \cdot BP = 0,4 \cdot BP^2 \Rightarrow CD = \sqrt{0,4} \cdot BP \Rightarrow *$$

при этом $\triangle CAD$ и $\triangle CEF$ подобны по 2-ум углам

$$(\angle CFE = \angle ACD (\text{п.2}); \angle CEF = 90^\circ = \angle ADC) \Rightarrow \frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = \frac{(CD)^2}{(EF)^2} = \frac{0,4 \cdot BP^2}{0,25 \cdot BP^2} = \frac{8}{5}$$

Омбем: $\frac{8}{5}$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (стр. 1)

$$10 \arccos(\sin x) + 10 \arcsin(\sin x) = 5\pi \Rightarrow$$

$$10 \arccos(\sin x) = 5\pi - 10 \arcsin(\sin x) \Rightarrow$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$2x - 4\pi = 10 \arcsin(\sin x) \quad (*)$$

Заметим, что $\arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$

$$10 \arcsin t \in [-5\pi, 5\pi] \Rightarrow$$

$$2x - 4\pi \geq -5\pi \quad \text{т.е. } x \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$2x - 4\pi \leq 5\pi \Rightarrow x \leq \frac{9\pi}{2}$$

Разберём 5 случаев.

$$1) x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]; \text{ тогда } \arcsin(\sin x) = x \Rightarrow$$

(*) переписывается в виде

$$10x = 2x - 4\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, \text{ такой } x \text{ попадает}$$

на требуемый отрезок $\Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ - корень

$$2) x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]; \text{ тогда } \arcsin(\sin x) = \pi - x, \text{ получаем } 6(*)$$

$$2x - 4\pi = 10\pi - 10x$$

$$12x = 14\pi \Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi, \text{ так как } \frac{7}{6}\pi \notin [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \Rightarrow$$

$\frac{7}{6}\pi$ - корень.

$$3) x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]; \text{ тогда } \arcsin x = \text{тогда } \arcsin(\sin x) = x - 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3. Продолжение (стр. 2)

Поставив $\neq 0$ б (x)

$$10x - 2\pi = 2x - 4\pi$$

$x = 2\pi$; $2\pi \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow 2\pi$ - корень

9) $x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = 3\pi - 10x$

$\arcsin(\sin x) = 3\pi - x$, поставив б (x)

$$3\pi - 10x = 2x - 4\pi$$

$$8x = \frac{17\pi}{6} ; \frac{17}{6}\pi \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}] \Rightarrow$$

$\frac{17}{6}\pi$ - корень.

5) $x \in [\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x - 4\pi \Rightarrow$

поставив б (x)

$$10x - 4\pi = 2x - 4\pi$$

$$x = \frac{9\pi}{2} ; \frac{9}{2}\pi \in [\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}] \Rightarrow$$

$\frac{9}{2}\pi$ - корень

Всё же было доказано, что $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}] \Rightarrow$

расмотрение данных 5-ти случаев доказано.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; 2\pi; \frac{17}{6}\pi; \frac{9}{2}\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (сir 1)
Продолжение.

Рассмотрим касание с другой
окружностью

$$(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0. \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+(y+9)^2=4 \end{cases}$$

Значит графиком этого уравнения (1)
являются 2 окружности с
центрами $(0; 0)$ $(0; -9)$ и радиусами
 5 и 2 соответственно. (ω_1 и ω_2)

$$5x+6ay-6=0 \quad (2)$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$$

Значит графиком $z=20$ уравнения
является прямая.

Тогда с помощью "a" мы
можем изменить её угловой коэффициент.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5. (ср 1.)

$$\text{Пусть } a = \log_{11} x \quad b = \log_{11}(0,5y) \Rightarrow$$

$$6 \log_{11} x = \frac{6}{a} \quad ; \quad \log_{(0,5y)} 11 = \frac{1}{b}$$

$$\log_{x^3} \frac{1}{121} = \frac{\log_x \frac{1}{121}}{3} = \frac{\log_x 11^{-2}}{3} = -\frac{2 \log_x 11}{3} = -\frac{2a}{3}$$

$$\log_{(0,125y^3)} (11^{-13}) = \frac{\log_{(0,5y)} (11^{-13})}{3} = -\frac{13}{3} b$$

Подставляем это всё в данное равенство
нашими.

$$\left\{ a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0 \quad | \cdot 3a \right.$$

$$\left. \left\{ b + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} + 5 = 0 \quad | \cdot 3b. \right. \right.$$

$$\left\{ 3a^5 + 15a - 18 + 2 = 0 \right.$$

$$\left. \left\{ 3b^5 + 15b + 13 + 3 = 0 \right. \right.$$

$$\left\{ 3a^5 + 15a = 16 \right.$$

$$\left. \left\{ 3b^5 + 15b = -16 \right. \right.$$

т.к. производная $(3x^5 + 15x)' = 15x^4 + 15 > 0$ каждое
свой значение она принимает

ровно 1 раз.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3 (стр 2.)

Теперь запишем, что.

также $3a^5 + 15a = 16$, то.

$$3(-a)^5 + 15(-a) = -16 \Rightarrow$$

т.к. $f(x) = 3x^5 + 15x$ $f(x) = 3x^5 + 15x$

принимает какое-то значение при

ноному разу $a = -b \Rightarrow$

$$\log_{10} x + \log_{10} (0,5y) = a + b = 0 \Rightarrow$$

$$\log_{10} (0,5xy) = 0 \Rightarrow$$

$$0,5xy = 10^0 = 1 \Rightarrow xy = 2$$

Ответ: 2.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

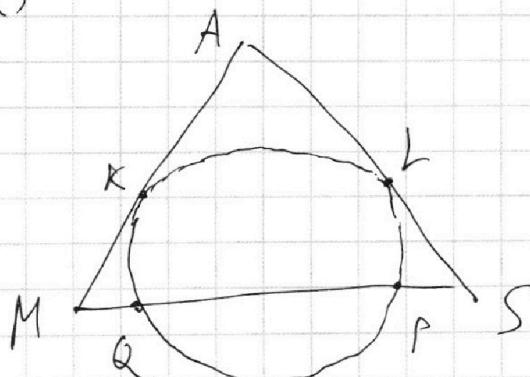
МФТИЕсли отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 7 (cir 1)

1) Посмотрим на плоскость (ASM).

Назовём её α . Известно, что α сечёт Σ по окружности, назовём эту окр. ω , тогда т.к. Σ касается AS и AM в точках L и K , тои ω касается AS и AM в точках L и K .а также пересекает SM в тех же точкахи ω , то и Σ . Более $P \in \Sigma$.

2)



Тогда

$$SQ = SP + PQ = MQ + PQ = MP \Rightarrow$$

$$SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot MP = MK^2 \Rightarrow$$

$$SL = MK; AK = KL \Rightarrow$$

$$AM = AS = 20$$

М-точка пересечения медиан $\triangle BAC \Rightarrow$

$$AA_1 = AM \cdot \frac{3}{2} = 30.$$

3) Но известно S_{ABC} . Тогда AH -это

бисектриса (БОО и лежит с той же стороны от

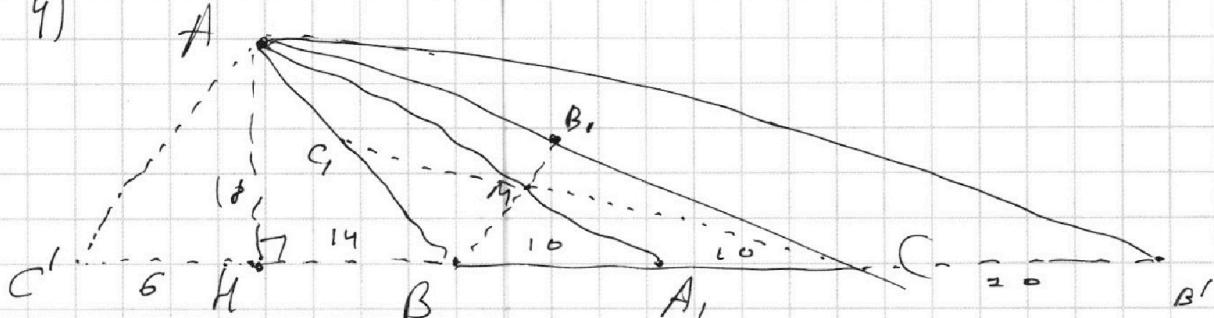
 A_1 , что и B , далее из решения будем понять, что H и A_1 не совпадают, т.к. $AH_1 \neq AH$)

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7. Продолжение. (стр 2)

4)



$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{20} = 10 \Rightarrow$$

$$HA_1^2 = AA_1^2 - AH^2 = 30^2 - 10^2 = 24^2 \quad (\text{п. Пифагора для } \triangle AAA_1) \Rightarrow$$

$$HA_1 = 24 \Rightarrow HB = 14$$

5) Отрезок B отрезка C , получив B'

$$\text{Тогда } CM \parallel AB' \quad (\text{т.к. } \frac{A_1M}{A_1A} = \frac{1}{3} = \frac{A_1C}{A_1B'})$$

$$HB' = HB + BB' = 14 + 40 = 54 = 3 \cdot 18 \Rightarrow \text{по п. Пифагора для } \triangle AHB'$$

$$AB'^2 = AH^2 + HB'^2 = 10^2 + 9 \cdot 18^2 = 10 \cdot 18^2 \Rightarrow (AB')^2 = 10 \sqrt{10^2} \Rightarrow$$

$$CM \cdot CC_1 = CM \cdot \frac{3}{2} = \frac{AB'}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{AB'}{2} = 9\sqrt{10}$$

6) Отрезок C отрезок B , получив C' , тогда

аналогично (п.5) $AC' \parallel BM$, B -середина $CC' \Rightarrow$

BB_1 -ср. линия $\triangle ACC'$; можно получить, что $CC' = 6 \Rightarrow$

$$(AC')^2 = 6^2 + 9 \cdot 6^2 = 10 \cdot 6^2 \Rightarrow AC' = \sqrt{10} \cdot 6 \Rightarrow BB_1 = 3\sqrt{10} \Rightarrow$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} \cdot 30 = 9 \cdot 9 \cdot 100 = 8100$$

Ответ: 8100 (пункт а)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

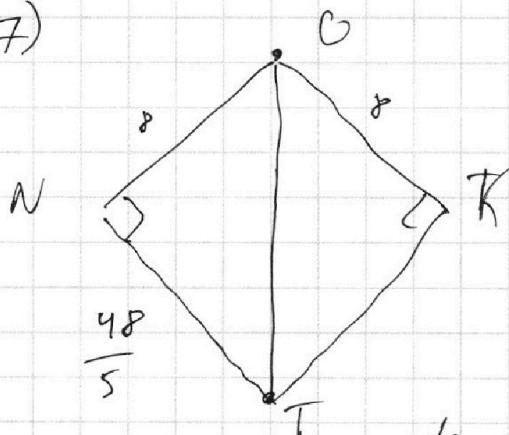
Задача 7 (стрижка)

Из первой задачи решение $AH = 18$

ΔAA_1 очевидно подобен $\Delta KTA_1 \Rightarrow$

$$KT = AH \cdot \frac{A_1K}{AA_1} = AH \cdot \frac{AA_1 - AK}{AA_1} = 18 \cdot \frac{30 - 14}{30} = 18 \cdot \frac{16}{30} = \frac{16 \cdot 3}{5} = \frac{48}{5}$$

7)



расч. пишет. (ОНТК)

очевидно.

ОНТК - гипотенуга \Rightarrow

$$\angle NTK = 2 \cdot \angle NTO$$

$$\operatorname{tg} \angle NTO = \frac{NO}{NT} = \frac{8}{\frac{48}{5}} \cdot 5 = \frac{5}{6} \Rightarrow$$

$$\angle NTK = 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{6}$$

Объем: ~~8100~~ (неправиль), а) 8100 , б) $2 \operatorname{arctg} \frac{5}{6}$

Задача 7 (стрижка)

Здесь мы использовали теорему косинусов

ОН и ОК перпендикульарны (СВС) и (АВС)

соответственно т.к. Ω касается этих граний

в точках N и K

Объем: а) 8100 , б) $2 \operatorname{arctg} \frac{5}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \operatorname{arc} \cos (\sin x) = 9\pi - 2x.$$

$$10 \operatorname{arc} \cos x (\sin x) + 10 \operatorname{arc} \sin (\sin x) = 5\pi \Rightarrow$$

$$10 \operatorname{arc} \sin (\sin x) = -2x + 2x - 4\pi$$

$$\operatorname{arc} \sin t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 10 \operatorname{arc} \sin t \in [5\pi; 5\pi]$$

$$\operatorname{Tg} a \quad 2x - 4\pi \geq -5\pi \quad \text{т.е. } 2x \geq -\pi$$

$$2x - 4\pi \leq 5\pi \quad \text{т.е. } 2x \leq 9\pi$$

$$x \geq -\frac{\pi}{2}; \quad x \leq \frac{9\pi}{2}$$

$$1) \quad x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$$

$$10 \operatorname{arc} \sin (\sin x) = 10x = 2x - 4\pi \Rightarrow -8x = 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$2) \quad x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$$

$$5) \quad x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$$

$$\operatorname{arc} \sin (\sin x) + x = \pi \Rightarrow$$

$$\operatorname{arc} \sin x = x - 4\pi$$

$$10\pi - 10x = 2x - 4\pi$$

$$10x - 40\pi = 2x - 4\pi$$

$$14\pi = 12x \quad x = \frac{7}{6}\pi$$

$$8x = 36\pi$$

$$3) \quad x \in [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$$

$$x = \frac{9}{2}\pi$$

$$\operatorname{arc} \sin (\sin x) = x - 2\pi$$

$$10x - 20\pi = 2x - 4\pi$$

$$8x = 16\pi \quad x = 2\pi$$

$$4) \quad x \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$$

$$\operatorname{arc} \sin (\sin x) - x = 3\pi$$

$$30\pi - 10x = 2x - 4\pi \quad 34\pi = 12x \Rightarrow x = \frac{34}{12}\pi = \frac{17}{6}\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{a^4} - 6a = -\frac{2a}{3} - 5$$

$$(a+b)$$

$$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0$$

$$\frac{1}{b^4}$$

$$b^4 + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} + 5 = 0$$

$$\log_{10} 0,5xy = t$$

$$0,5xy = 10^{-t}$$

$$3a^5 - 18a + 2 + 15a = 0$$

$$x, y > 0.$$

$$+ 3b^5 + 3 + 13 + 15b = 0.$$

$$x \neq 1.$$

$$3(a^5 + b^5) + 15(a+b) - 16 + 16 = 0. \quad y \neq 2.$$

$$a^5 + b^5 + 5(a+b) = 0.$$

$$(a+b)(a^4 + b^4) = a^5 + b^5 + ab(a^3 + b^3) = 5(a+b) + ab(a^3 + b^3)$$

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 = 5$$

$$\sqrt[4]{5a^2b^2} \quad a^2b^2 \leq 1.$$

$$a^5 + 5a = 16. \quad t. \quad -t.$$

$$b^5 + 5b = -16. \quad (5a^4) + 5 > 0.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (стр 2).

а) насе этого с помощью
 b^{11} параллельно ей сдвигать,
тогда нужно найти все
такие a , что можно
параллельно сдвигать
прямую $y = -\frac{5x}{6a}$ так,

чтобы она пересекала
обе окружности и не

была ими касательной (при $a \neq 0$).

$b=0$ подходит).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

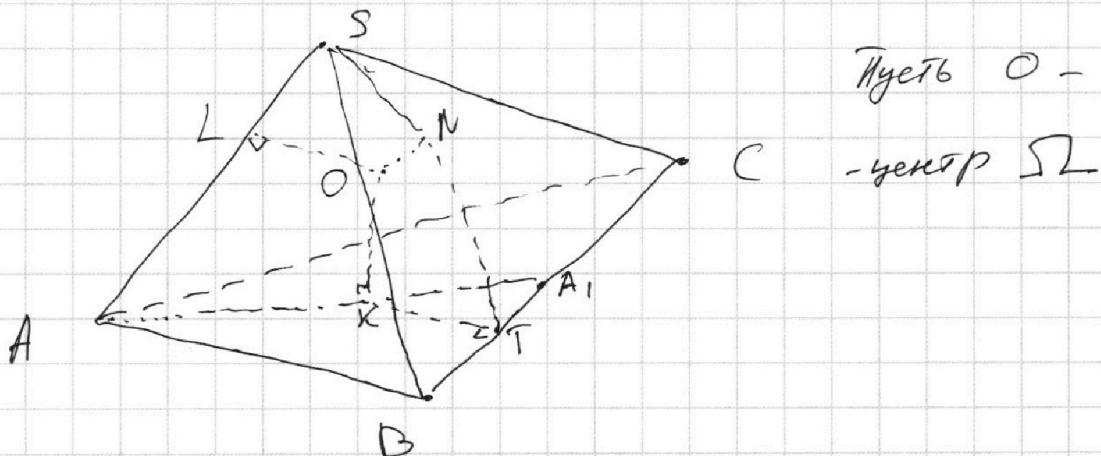
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7. Продолжение. (стр 3)

6)



Пусть O -

-центр $\odot L$

Рассм. $\triangle SON$ и $\triangle SOL$ -правоугольные

SO -общая, $OL=ON=\varrho$ - радиусы $\odot L \Rightarrow \triangle SON$

равны $\Rightarrow SL=6$, тогда $AL=20-6=14$, т.к. $AL=AK$.

т.д. $AK=14$

Пусть T такая точка на BC , что

$KT \perp BC$ (возможно T не лежит на BC)

Тогда $BC \perp KT$; $BC \perp OK \Rightarrow BC \perp (OKT) \Rightarrow$

$BC \perp OT$, но BC также $BC \perp ON \Rightarrow$

$BC \perp (ONT) \Rightarrow BC \perp NT \Rightarrow \angle NTK =$

двуугранный угол $SABC$ при ребре BC .

при этом все точки O, N, T, K лежат

в одной плоскости, которая проходит

через T перпендикулярно BC

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 9^2 \end{cases} \quad kx+b \quad D = 4k^2b^2 - 4(k^2+1)(b^2-25)$$

$$-kx-b$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ y = kx+b \end{cases} \quad x^2 + k^2x^2 + b^2 + 2kbx = 25^2$$

$$(k^2+1)x^2 + 2kbx + b^2 - 25^2 = 0.$$

$$4k^2b^2 - 4(k^2b^2 + b^2 - 25^2) =$$

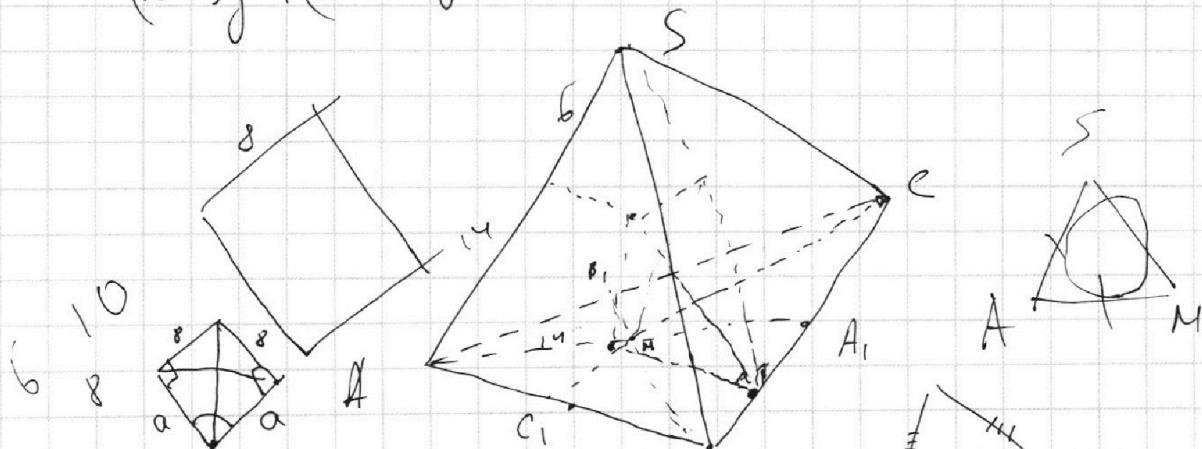
$$= 4k^2b^2 - 4k^2b^2 - 4b^2 + 100k^2 + 100$$

$$(100(k^2+1) - 4b^2) = 0. \quad x = k\frac{b}{k} + s$$

$$25(k^2+1) = b^2 \quad y = k \quad D = 4ks^2 + 324 + 72ks -$$

$$k^2y^2 + s^2 + 2kys + y^2 + 18y + 77 = 0 \Rightarrow -4(k^2s^2 + s^2 + 77k^2 + 77) =$$

$$(k^2+1)y^2 + (2ks+18)y + s^2 + 77 = 0. \quad = 324$$



$$\begin{array}{r} 289 \\ + 81 \\ \hline 370 \end{array}$$

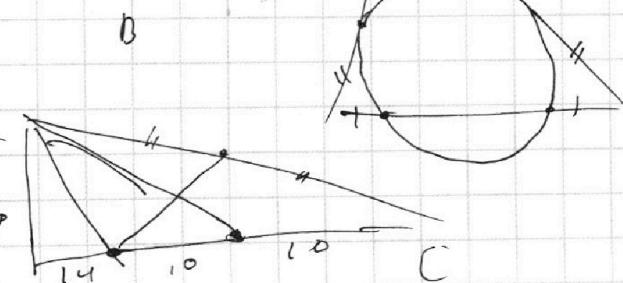
$$37 \cdot 10 =$$

$$324$$

$$17 + 9.$$

$$34 + 18.$$

$$34 + 18.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^x = b \quad b^y = a^x = b. \quad a^x b^y = ab.$$

$$a^{x \cdot \frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{x}} \quad b^t = a. \quad xy = 1$$

$$a^2 - \frac{6}{a} = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{x^3} \frac{1}{121} = \frac{\log x \frac{1}{121}}{3} = \frac{-\log x 121}{3} = \frac{-\log 121}{3}$$

$$\frac{1}{a^4} - 6a = -\frac{2a}{3} - 5$$

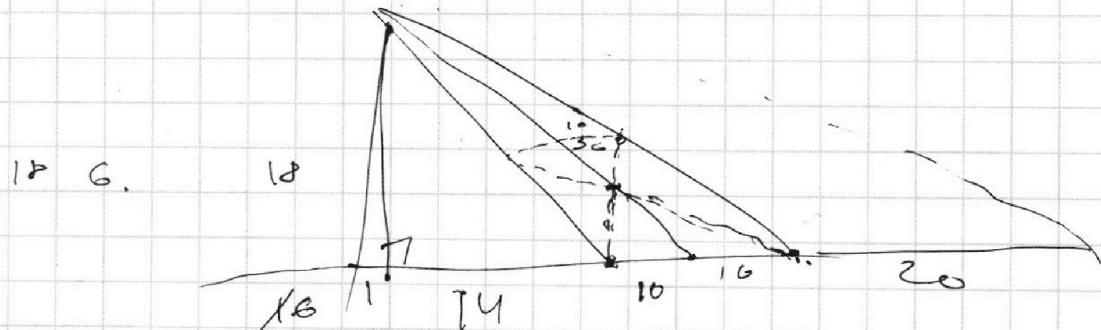
$$\frac{1}{a^4} - 6a = -\frac{2a}{3} - 5$$

$$1 - 6a^5 = -\frac{2a^5}{3} - 5a^4 \quad 3 - 18a^5 = -2a^5 - 15a^4$$

$$16a^5 - 5a^4 - 3 = 0.$$

$$\log_{10} x + \log_{10} y = \log_{10} xy$$

$$\frac{1}{a^4} + b = -\frac{13}{3} a - 5$$



$$B^2 \cdot 3^2 + 1P^2$$

$$18 \cdot 10 = 18 \sqrt{10 \cdot \frac{1}{3}}$$

$$6\sqrt{10}!$$

$$18 + 16 \quad P^2$$

$$54^2 + 1P^2 = \\ 18^2 \cdot 4$$

$$g^2 = \frac{d^2}{14-5} = \frac{16^2}{9} = \frac{16 \cdot 16}{9} = \frac{16 \cdot 16}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$$(abc)^2 : 2 \stackrel{36}{=} 6114+16 \quad \cancel{6} \quad 3 \cdot 5 \quad 2 \cdot 9.$$

81.

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 21 \\ \hline 59 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ - 28 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$abc : 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad x^2 + y^2 + 18xy + 81 = 4.$$

$$abc \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad x^2 + (y+9)^2 = 4.$$

$$\begin{aligned} x+y &= 6 \\ y+z &= 14 \\ z+x &= 12 \end{aligned}$$

$$x+y+z = 30.$$

$z =$

$$c = 2 \cdot 3^{10} \cdot 5^{17} (15) \quad x^2 + y^2 = 25.$$

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$$

$$b = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^4$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^7 \cdot 5^0$$

$$c = 2^8 \quad t + 16 - t + 14 - t = 18 \quad t + 25 - t + 13 - t = 30.$$

$$a = 2^8 \quad 16 + 14 - t = 18$$

$$25 + 13 - t = 30$$

$$b = 2^6 \quad t = 30 - 18 = 12.$$

$$t = 8.$$

$$t + 28 - t + 13 - t = 26.$$

$$28 + 13 - t = 16. \quad t =$$

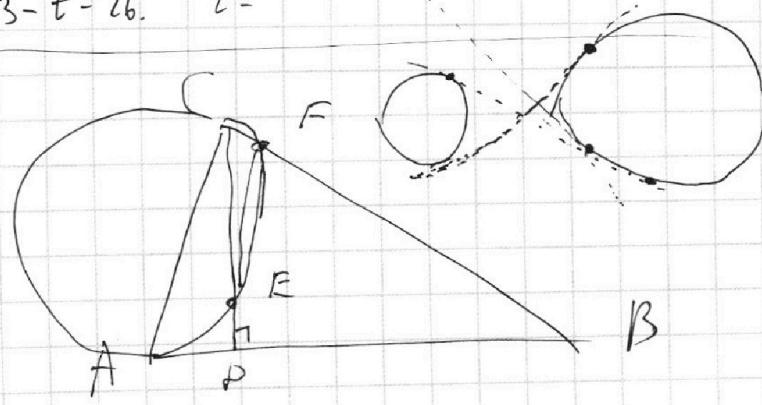
$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{20}$$

$$t + 28 - t +$$

$$5x + 6ay - b = 0.$$

$$6ay = b - 5x.$$

$$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

