



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

☒ 6.

$\angle BEO = 90^\circ$; $\angle FED = \frac{1}{2} \angle EOF = \frac{90}{2} = 45^\circ$
Покажем, что EF — касательная к окружности.

$\Rightarrow \triangle EFX$ равнобедренный, так углы при основании
равны 45° и $\angle EFX = 90^\circ$ по т. о. $\angle$ ушов Δ .
 $\Rightarrow \triangle EFX$ вписан в окружность и опирается на диаметр.

а) $R = \frac{1}{2} D = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

$\triangle EFX$; по т. Пифагора: $(EF = XF)$.

$$FX = \sqrt{\frac{EX^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{2}} = a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

☒ 2.

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a^2+2ab+b^2)-11ab} =$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-11ab} = \frac{1}{a+b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) $ab: 3^{14} \cdot 7^{13}$
 $bc: 3^{19} \cdot 7^{17}$
 $ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$

$ab \cdot ac = 3^{37} \cdot 7^{55}$

$a = \sqrt{\frac{ab \cdot ac}{bc}} = \sqrt{\frac{3^{37} \cdot 7^{55}}{3^{19} \cdot 7^{17}}} = \sqrt{3^{18} \cdot 7^{38}} = 3^9 \cdot 7^{19}$

$a = 3^9 \cdot 7^{19}$
 $b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^5 \cdot 7^{-6}$

$c = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$

$abc = a \cdot b \cdot c = 3^9 \cdot 7^{19} \cdot 3^5 \cdot 7^{-6} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} = 3^{38} \cdot 7^{36}$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

2) $\frac{a}{b} \quad a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \quad a, b \geq 0$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b) - 10ab}$$

$$244 = 2\sqrt{61}$$

N_5
 $(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1}) = 5 - 6x, \quad |^2$

$$(3x^2 - 5x + 6 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} + 3x^2 + x + 1) = 25 - 60x + 36x^2$$

$$6x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} = 25 - 60x + 36x^2$$

$$\frac{2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)}}{\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)}} = \frac{30x^2 - 56x + 18}{15x^2 - 28x + 9}$$

$$-5x + 3 = 2$$

$D = 25 - 3 \cdot 4 \cdot 6 = 50$

$3x^2 + x + 1 \geq 0$

$D = 1 - 3 \cdot 4$

$x_1 = \frac{28 \pm 2\sqrt{61}}{30}$

$$\sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 + x + 6x - 5} = x + 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 11} - \sqrt{3x^2 + x} = -6x + 4$$

$$-5x + 6 \quad x + 4$$

$$-6x + 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{✗} \quad x+1=a, \quad -6x+5=b. \\
 & \sqrt{3x^2+a+b} - \sqrt{3x^2+a} = b. \quad | \times 2 \\
 & 3x^2+a+b - 2\sqrt{(3x^2+a+b)(3x^2+a)} + 3x^2+a = b^2 \\
 & 6x^2+2a+b - 2\sqrt{\dots} = b^2. \\
 & 6x^2+2a+b+b^2 = 2\sqrt{(3x^2+a+b)(3x^2+a)} \\
 & b = -6x+5, \quad c=3x^2, \quad a=b-5x \\
 & \sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b. \\
 & \sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b. \quad c+a=d \\
 & \sqrt{d} - \sqrt{d-b} = b \\
 & d - 2\sqrt{d(d-b)} + dB = b^2 \\
 & d - 2\sqrt{d^2-db} + dB = b^2. \quad db=L \\
 & d - 2\sqrt{d^2-L} + L = b^2. \\
 & 2\sqrt{d^2-L} = d+L-b^2. \quad | \times 2 \\
 & 4(d^2-L) = d^2+L^2+b^4+2dL+2db^2+4Lb^2. \\
 & \sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b \quad \Rightarrow c+a=d. \\
 & \sqrt{d} - \sqrt{d-b} = b \\
 & d - 2\sqrt{d(d-b)} = b. \\
 & d-b = 2\sqrt{d(d-b)} \Rightarrow d-b=L. \\
 & L = 2\sqrt{dL} \\
 & L^2 = 4dL \\
 & L = 4d. \quad \Rightarrow d-b=4d. \Rightarrow b=5(c+a) \Rightarrow b=30+5x \\
 & \text{✗} \quad b = -6x+5 \\
 & -6x+5 = 5(3x^2+6-5x) \quad 3x^2-5x+6 \\
 & -6x+5 = 15x^2+30-25x \\
 & 15x^2-19x+25=0 \\
 & D = 19^2 - 4 \cdot 15 \cdot 25 \\
 & d-b=4d \Rightarrow c+a-b=4(c+a) \Rightarrow b=-3(c+a) \\
 & b = -3d. \\
 & -6x+5 = -3(3x^2+6-5x) \quad 36 \\
 & -6x+5 = -9x^2-18+15x \\
 & 9x^2-21x+23=0
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{ab}{b-a}$$

$$\frac{x}{a} \cdot 6 = x + 49$$

$$\frac{x}{a+7} = \frac{x}{b+7} + 96$$

$$\frac{ab}{(b-a)a} \cdot 6 = \frac{ab}{(b-a)} + 49 \Rightarrow b = 49$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 0,4 \\ \hline 19,6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 49 \\ \hline 378 \end{array}$$

$$\frac{ab}{(b-a)(a+7)} = \frac{ab}{(b-a)(b+7)} \neq 0,6$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ \times 139 \\ \hline 2138 \\ + 2914 \\ \hline 2432 \end{array}$$

$$\frac{ab^2 + 7ab - a^2b - 7ab}{(b-a)(a+7)(b+7)} = 0,6$$

$$\frac{ab(b-a)}{(b-a)(a+7)(b+7)} = 0,6$$

$$\frac{ab}{(a+7)(b+7)} = 96$$

$$\begin{array}{r} 294 \\ 240 + 54 \end{array}$$

$$ab = 96(ab + 7a + 7b + 49)$$

$$ab = 96ab + 42a + 42b + 294$$

$$0,4ab - 4,2a = 4,2b + 29,4$$

$$\frac{49 \cdot 6}{10} = 29,4$$

$$a(0,4b - 4,2) = 4,2b + 29,4$$

$$a = \frac{4,2b + 29,4}{0,4b - 4,2} = \frac{4,2 \cdot 49 + 29,4}{0,4 \cdot 49 - 4,2} = \frac{235,2 + 29,4}{19,6 - 4,2} = \frac{264,6}{15,4}$$

$$\begin{array}{r} 2432 \overline{) 154} \\ - 154 \\ \hline 892 \\ - 892 \\ \hline 1220 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 154 \\ \times 5 \\ \hline 770 \\ + 1540 \\ \hline 2352 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 49 \\ \hline 378 \\ + 188 \\ \hline 2058 \end{array}$$

$$a(19,6 - 4,2) = 20,58 + 29,4$$

$$\begin{array}{r} 2352 \overline{) 154} \\ - 154 \\ \hline 812 \\ - 812 \\ \hline 770 \\ - 770 \\ \hline 420 \\ - 420 \\ \hline 308 \\ - 308 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 154 \\ \times 5 \\ \hline 770 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 28 \\ \hline 168 \\ + 42 \\ \hline 588 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



	S	25	8
Вел.	x	a	$\frac{x}{a} \cdot 2$
Мот.	x	b	$\frac{x}{b} \cdot 2$
Вел. (км)		a	$\frac{x}{b} \cdot 2$
Мот. (км)	x+49	b	$\frac{x}{a} \cdot 2$
Вел. + 7	x	a+7	$\frac{x}{a+7}$
Мот. + 7	x	b+7	$\frac{x}{b+7}$

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$$

$$\frac{x}{a} \cdot b = x + 49$$

$$\frac{x}{a+7} = \frac{x}{b+7} + \frac{36}{80}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$$

$$\frac{x(b-a)}{ab} = 1 \Rightarrow x(b-a) = ab$$

$$x = \frac{ab}{b-a}$$

$$\frac{ab}{(b-a)(a+7)} = \frac{ab}{(b-a)(b+7)} + \frac{3}{5}$$

$$\frac{49a}{(49-a)(a+7)} = \frac{49a}{(49-a)(49+7)} + 0,6$$

$$\frac{49a}{(49-a)(a+7)} = \frac{49a}{(49-a)56} + 0,6$$

$$\frac{49a}{(49-a)(a+7)} - \frac{7a}{(49-a)a} = 0,6$$

$$\frac{392a - 7a^2 - 49a}{(49a)(a+7)} = 0,6$$

$$392a - 7a^2 - 49a = 0,6 \cdot 8 (49-a)(a+7) \cdot 1,2$$

$$7a^2 - 343a = 0,6 \cdot 8 (49-a)(a+7)$$

$$7a(a-49) = 0,6 \cdot 8 (a-49)(a+7)$$

$$7a = 0,6 \cdot 8 (a+7)$$

$$7a = 4,8a + 33,6$$

$$2,2a = 33,6$$

$$a = 15,27$$

$$b = 49$$

$$x = 19,6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

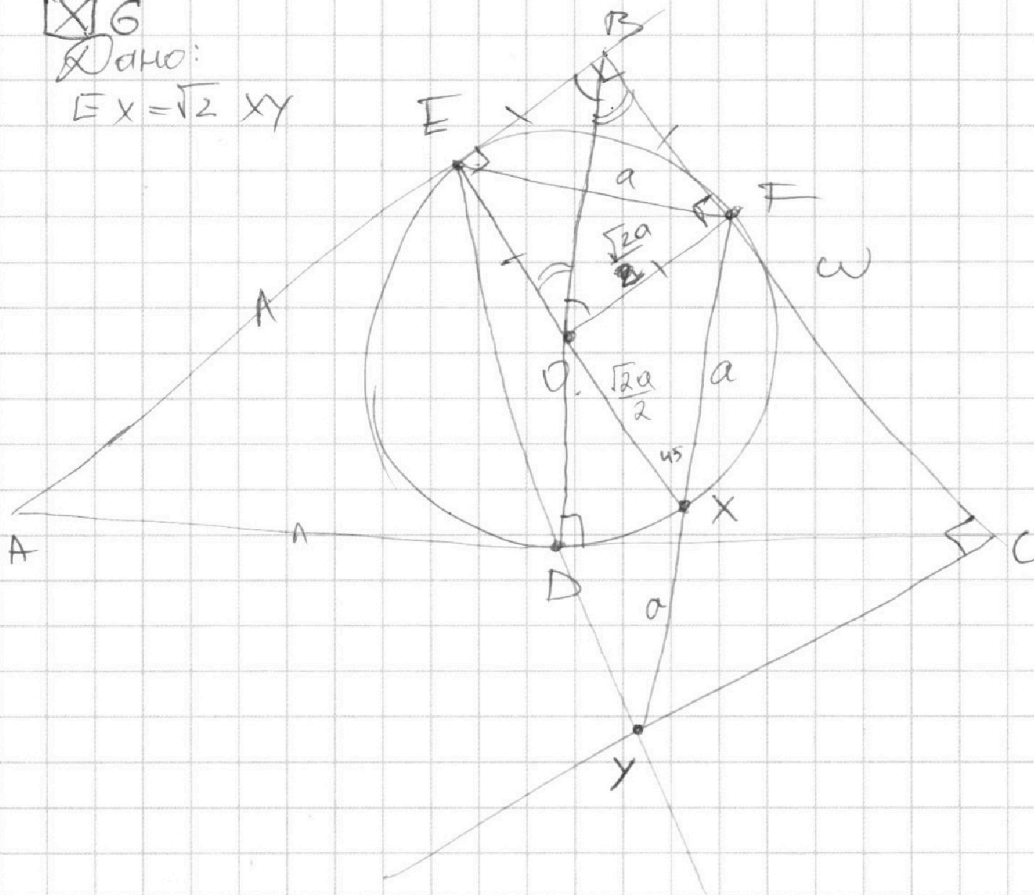
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6

Дано:

$$EX = \sqrt{2} XY$$



Решение:

Пусть $XY = a$, тогда $EX = \sqrt{2} a$

- 1) окр ω : радиус = r , O - центр окр.
 $OE = OF = r$.

$\triangle OEB = \triangle OFO$, т.к. неизвестны углы при $OF \parallel EB$ (параллельны к одной окр) и сек BO ~~не делит~~ $\angle BOE = \angle BOF$ и т.к. $FB \perp OE$ и сек BO $\angle BOE = \angle BOF$ $\Rightarrow$ $EB = OF \Rightarrow EB = OF = OE \Rightarrow$ правильный.
 $\triangle BEO$ и $\triangle OFB$ $\Rightarrow \angle EOF = 90^\circ$.

- 2) $\angle EXF$ вписан, опирается на $\angle EOF$
 $\angle EOF$ - центр $\angle EXF = \frac{1}{2} \angle EOF = 45^\circ$.

$$\angle BFO = 90^\circ$$

$$\angle EFB = \frac{1}{2} \angle EOF \text{ (угол между кас и хордой)}$$

$$\angle EFB = 45^\circ \Rightarrow \text{б.а.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$$

$$x = \frac{ab}{b-a}$$

$$a \cdot \frac{x}{b} + 49 = \frac{b \cdot x}{a}$$

$$\frac{a \cdot ab}{(b-a) \cancel{a}} + 49 = \frac{\cancel{ab} \cdot b}{(b-a) \cancel{a}}$$

$$\frac{x}{a+7} = \frac{x}{b+7} + \frac{6}{10}$$

$$\cancel{ab} - ab^3$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b-a} = -49$$

$$\begin{array}{r} 1470 \ 156 \\ 58,2 \ 52 \\ \hline 888 \ 646 \end{array}$$

$$a^2 - b^2 = -49b + 49a$$

$$(a-b)(a+b) = -49(a-b)$$

$$a+b = 49$$

$$a = 49-b$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 56 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\frac{ab}{(b-a)(49-b+7)} = \frac{ab}{(b-a)(b+7)} + \frac{6}{10}$$

$$\begin{array}{r} 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \end{array}$$

$$(49-b)b$$

$$\frac{(49-b)b}{(b-a)(56-b)} = \frac{(49-b)b}{(b-a)(b+7)} + 0,6$$

$$\begin{array}{r} 3077 \\ 470,4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 392 \end{array}$$

$$\frac{(49-b)b}{(b-49+b)(56-b)} = \frac{(49-b)b}{(b-49+b)(b+7)} + 0,6$$

$$\begin{array}{r} 3547,4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 784 \end{array}$$

$$\frac{(49-b) \cancel{a}}{2 \cancel{a} (56-b)} = \frac{(49-b) \cancel{a}}{2 \cancel{a} (b+7)} + 0,6$$

$$\begin{array}{r} 56-b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 392 \\ 470,4 \end{array}$$

$$\frac{(49-b)(b+7) - (49-b)(56-b)}{(56-b)(b+7)} = 1,2$$

$$\begin{array}{r} 672 \\ 84 \\ \hline 58,2 \end{array}$$

$$(49-b)(b+7-56+b) = 1,2(56-b)(b+7)$$

$$(49-b)(2b-49) = 1,2(56b+56 \cdot 7-b^2-7b)$$

$$\underline{98b - 49^2 - 2b^2 + 49b} = \underline{672b + 470,4 - 1,2b^2 - 84b}$$

$$147b - 58,2b$$

$$0 = 98b^2 - 88,8b + 3547,4$$

$$121$$

$$0 = 0,2b^2 - 22,2b +$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

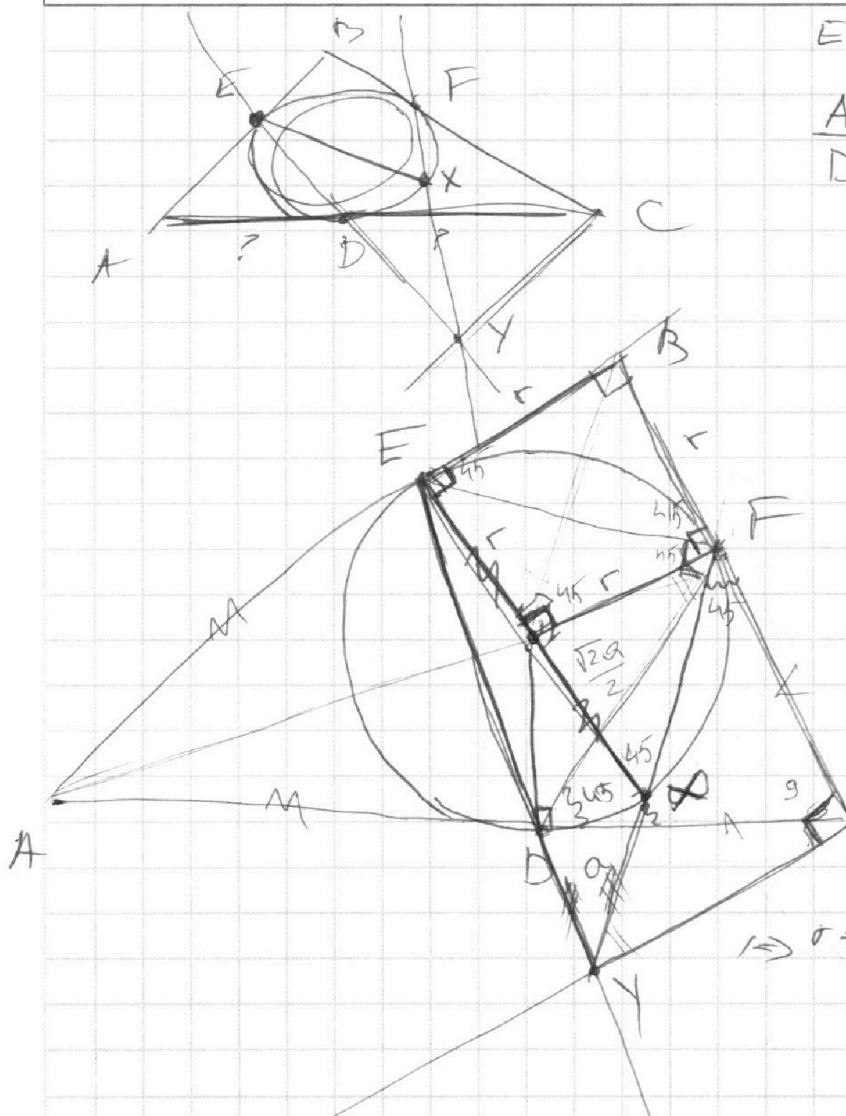
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EX = \sqrt{2} \cdot XY.$$

$$\frac{AD}{DC}.$$



$\angle EXF$ опир. на
ту же дугу, что
и $\angle EOF = 90^\circ$.
 $\angle EXF = \frac{1}{2} 90 = 45$.

$\triangle XEF$ - н/у, т.е.
углы при основании
45. $\Rightarrow \angle F = 90^\circ$ и
описывается кр. п.
о-т.в.

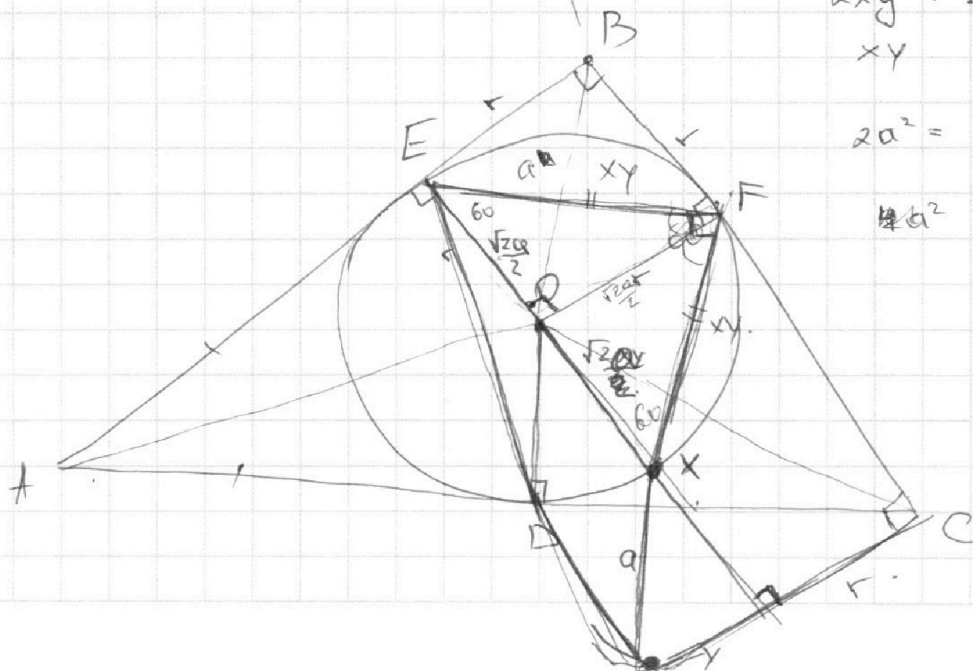
$$\Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{2} xy = \frac{\sqrt{2} xy}{2}.$$

$$2xy^2 = 2a^2$$

$$xy$$

$$2a^2 = 2b^2$$

$$a^2 \cdot \frac{2a^2}{4} \cdot \frac{2a^2}{4} = a^2$$





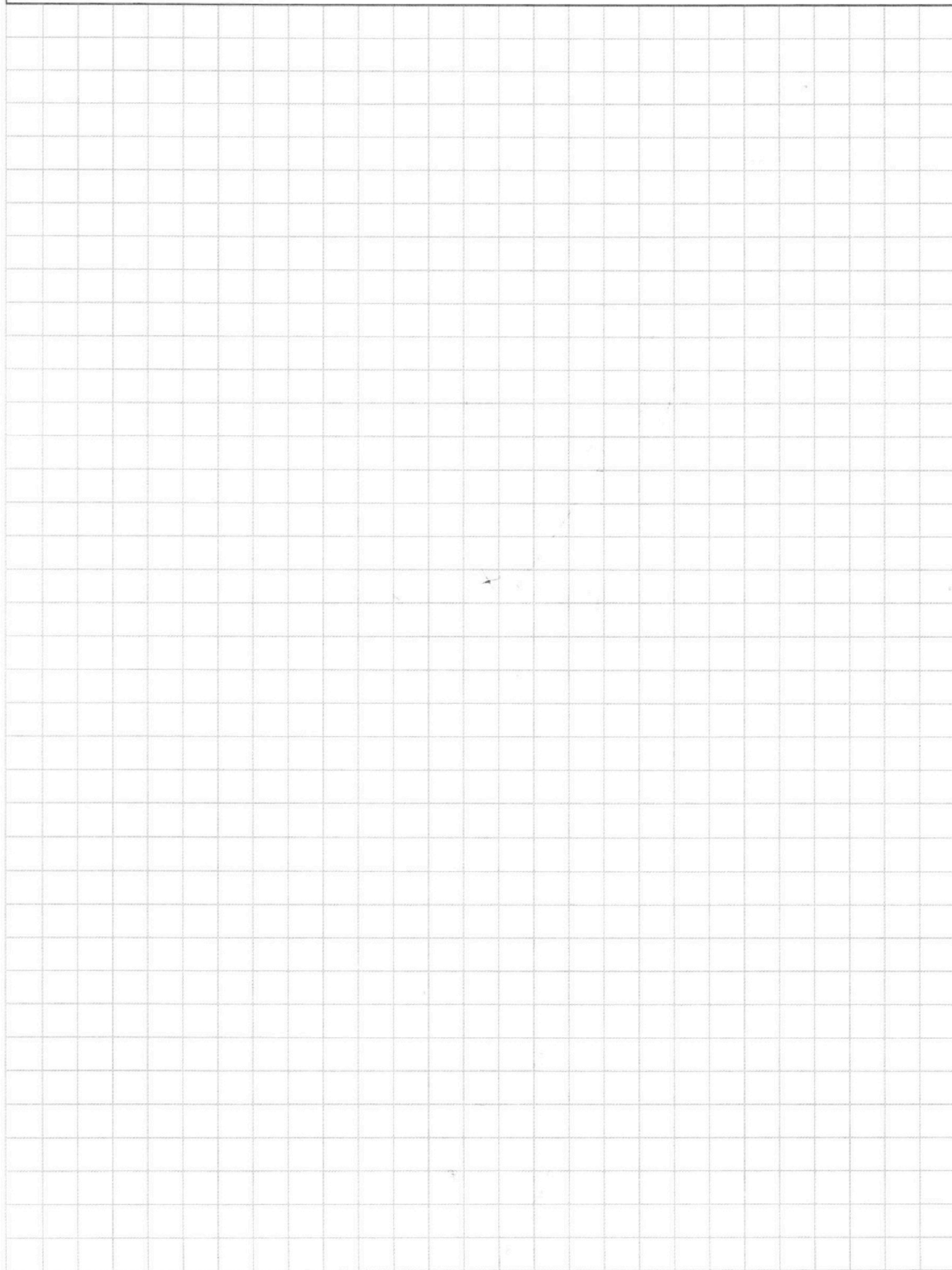
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





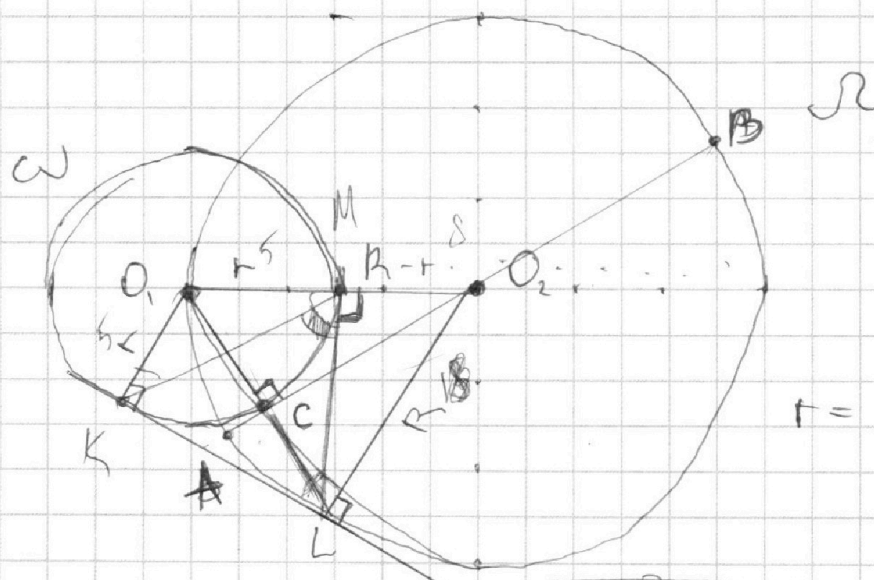
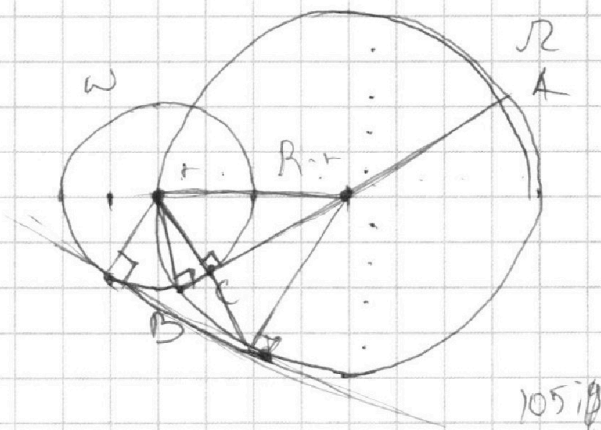
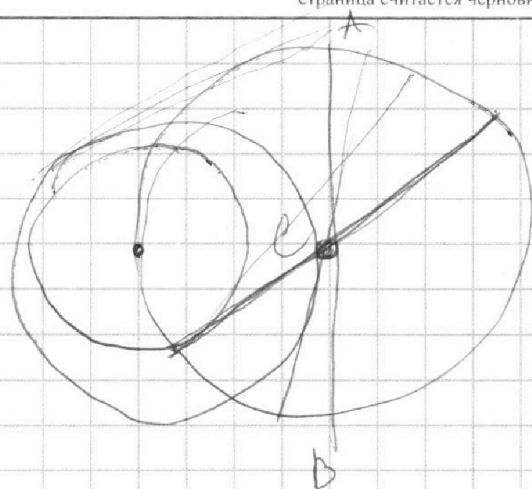
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

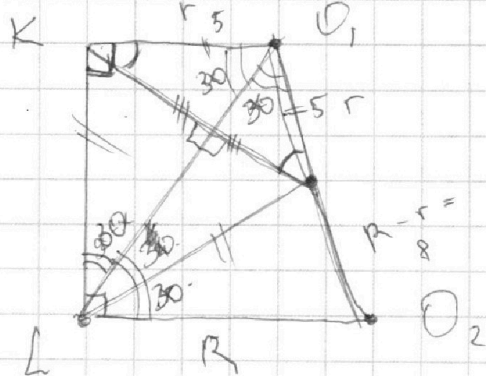
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$r = \max \cdot \omega$
 $R = \Omega$
 $AC = 1 \quad BC = 25$
 $R = 13$

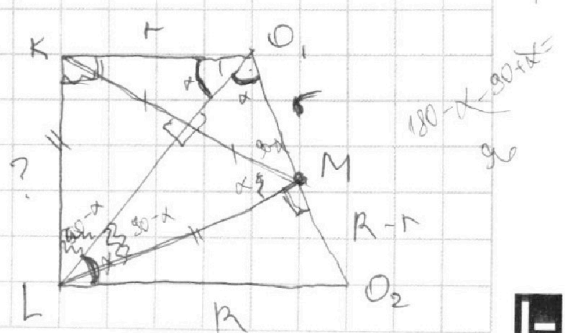
$$A \in O_1 O_2, \text{ н/д: } O_1 C = \sqrt{O_1 O_2^2 - CO_2^2} = \sqrt{R^2 - (R - AC)^2} =$$

$$\sqrt{169 - 144} = 5, \quad r = 5.$$



$$169 - 64 = \sqrt{105}$$

$LL = LM - \text{касат. к сф.}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5. $y = 5x - 3z$
 $5x - y = 3z$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{5x - 3z} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{1}{5x - 3z} = \frac{15x - yz}{xz}$$

$$(5x - 3z)(15x - yz) = xz$$

$$75x^2 - 40xz - 45zx + 24z^2 = xz$$

$$75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0$$



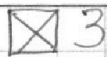
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3

$\Delta \Delta \Delta$

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0.$$

$$\Delta_1 \leq 0$$

$$3x^2 + x + 1 \geq 0;$$

$$\Delta_2 < 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Замена:

$$3x^2 = c; \quad -5x + 6 = a; \quad -6x + 5 = b.$$

$$\sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b.$$

Замена: $c+a=d$

$$\sqrt{d} - \sqrt{d-b} = b \quad |^2 \quad \text{возведем в квадрат}$$

$$d - 2\sqrt{d(d-b)} + (d-b) = b.$$

$$2(d-b) - 2\sqrt{d(d-b)} = 0 \quad \text{Замена: } d-b=L.$$

$$2L - 2\sqrt{dL} = 0$$

$$2L = 2\sqrt{dL} \quad |^2$$

$$4L^2 = 4dL$$

$$L = d.$$

$$1 \Rightarrow d-b=d.$$

$$b=0$$

$$-6x+5=0.$$

$$6x=5.$$

$$x = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{6}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

☒ 1

$$\begin{cases} ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \\ bc = 3^{13} \cdot 7^{17} \\ ac = 3^{23} \cdot 7^{42} \end{cases}$$

$abc = ?$

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$1) a = \sqrt{\frac{ab \cdot ac}{bc}} = \sqrt{\frac{3^{37} \cdot 7^{55}}{3^{13} \cdot 7^{17}}} = \sqrt{3^{14} \cdot 7^{38}} = 3^7 \cdot 7^{19}$$

$$2) b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{3^7 \cdot 7^{19}} = \frac{ab}{a} = 3^5 \cdot 7^{-6}$$

$$3) c = \frac{ac}{a} = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{3^7 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$$

$$4) abc = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^5 \cdot 7^{-6} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} = 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{36}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

☒ 6

$$\frac{(49-b)b(b+7) - (49-b)b(56-b)}{(2b-49)(56-b)(b+7)} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{b(49-b)(b+7 - 56+b)}{(2b-49)(56-b)(b+7)} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{b(49-b)(2b-49)}{(2b-49)(56-b)(b+7)} = \frac{6}{10}$$

$$49b - b^2 = 0,6(56b + 392 - b^2 - 7b)$$

$$49b - b^2 = 33,6b + 235,2 - 0,6b^2 - 4,2b$$

$$0 = 0,4b^2 - 19,6b + 235,2$$

$$0 = 4b^2 - 196b + 2352$$

$$0 = b^2 - 49b + 588$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 588 = 2401 - 2352 = 49$$

$$b_{1,2} = \frac{49 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} b_1 = 28 \\ b_2 = 21 \end{cases}$$

$$b=21; x = \frac{ab}{(b-a)} = \frac{(49-b)b}{(b-49+b)} = \frac{(49-b)b}{2b-49} = \frac{(49-21)21}{42-49} < 0$$

$$b=28; x = \frac{(49-b)b}{2b-49} = \frac{(49-28)28}{56-49} = \frac{588}{7} = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



☒ 6.

	S	Σ	t
Вел	x	a км/ч	$\frac{x}{a}$ ч
Мот	x	b км/ч	$\frac{x}{b}$ ч
Вел (t+1)	$a \cdot \frac{x}{b}$	a км/ч	$\frac{x}{b}$ ч
Мот (t+1)	$b \cdot \frac{x}{a}$	b км/ч	$\frac{x}{a}$ ч
Вел + 7	x	(a+7) км/ч	$\frac{x}{a+7}$ ч
Мот + 7	x	(b+7) км/ч	$\frac{x}{b+7}$ ч

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1. \end{cases}$$

$$49 + a \cdot \frac{x}{b} = b \cdot \frac{x}{a} \neq 49$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a+7} = \frac{x}{b+7} + \frac{36}{60} \end{cases}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$$

$$\frac{x(b-a)}{ab} = 1$$

$$x = \frac{ab}{b-a}$$

Подставим x во II равенство:

$$\frac{ab-a}{(b-a)} + 49 = \frac{ab \cdot b}{(b-a)}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b-a} = -49$$

$$(a-b)(a+b) = 49(a-b)$$

$$a+b = 49$$

$$a = 49-b$$

Подставим a в III равенство:

$$\frac{ab}{(b-a)(a+7)} = \frac{ab}{(b-a)(b+7)} + \frac{6}{10}$$

$$\frac{(49-b)b}{(b-49+b)(49-b+7)} = \frac{(49-b)b}{(b-49+b)(b+7)} + \frac{6}{10}$$

$$\frac{(49-b)b}{(2b-49)(56-b)} = \frac{(49-b)b}{(2b-49)(b+7)} + \frac{6}{10}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



☒ 4

Доно:

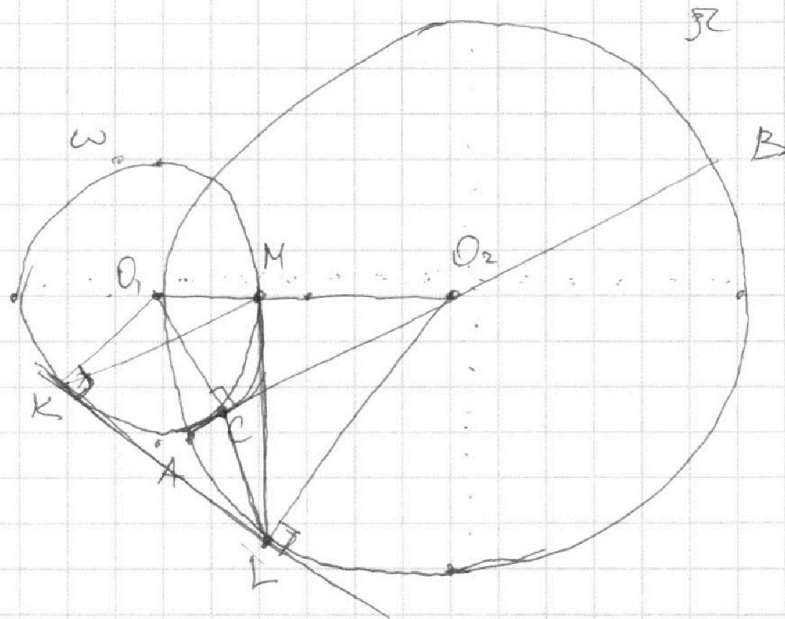
окр ω , окр Ω

AB -diam. $= D$

$AC = 1$

$BC = 25$

$KL = ?$



Решение:

1) Окр Ω :

AB -diam.

$AB = AC + CB = 1 + 25 = 26$

R - радиус окр. Ω . $R = \frac{D}{2} = \frac{26}{2} = 13$.

2) Γ - рад. окр. ω .

$\triangle CO_1O_2$ н/у, т.к. CB -кас.

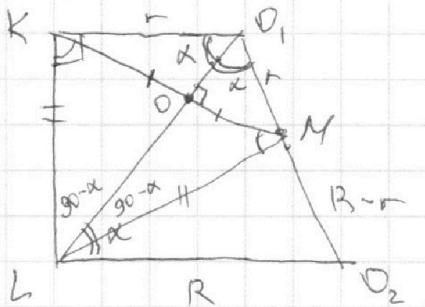
$O_1C = \Gamma$, $OM = \Gamma$; $MO_2 = R - \Gamma$, $CO_2 = R - AC = 12$.

По т. Пифагора: $O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2C^2} =$

$= \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$, $\Gamma = 5$

3) KO_1O_2L - Трапеция, т.к. $KO_1 \parallel O_2L$, т.к.

O_1K и O_2L перпендикулярны к общей пр. KL , кото-
рая является касательной общей.



Рассм Трап KO_1O_2L отрезком:

1. $KO_1 = O_1M \Rightarrow \Gamma = 5 \Rightarrow \triangle KO_1M$ р/б

2. $KO_1 \parallel O_2L$ и сек O_1L : $\angle KO_1L = \angle O_1LO_2$
т.к. накрест-лежащие

3. $LK = LM$ - касат к окр ω и проведя
из L точки $\Rightarrow \triangle KLO_1 = \triangle MLO_2$
 $\Rightarrow KO_1 = OM$.

4. ~~KO_1OM~~ $\triangle KO_1M$: $KO_1 = OM$ - равнобедренный, значит и
бисс и высота $\Rightarrow \angle KO_1O_1 = \angle O_1OM = \angle O_1LO_2 = \alpha$.

5. $\triangle LKO_1$ н/у: $\angle OKL = 90 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$ по т. о Σ углов $\triangle$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

☒ 4

6. $\angle KLO = \angle OLM$ ($\Delta KLO = \Delta MLO$) ~~$\angle KLO = \angle OLM = 90^\circ - \alpha$~~

7. ΔLOM ~~н/д~~ $\angle M = 90 - 90 + \alpha = \alpha$.

8. $\angle O, NL = \angle O, MK + \angle OML = 90 - \alpha + \alpha = 90^\circ \Rightarrow$
 LM — это высота к OD_2 и $\angle LMO_2 = 90^\circ$

9. $LM = \sqrt{LO_2^2 - MO_2^2} = \sqrt{R^2 - (R-r)^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$

10. Т.к. мы доказали, что $\Delta KLO = \Delta MKO$

(~~РРРРР~~); это исходит из равенства $\Delta O, KL$ и $\Delta O, ML$ где они равны по двум катетам;
 и также радиус, проведенный к хорде, делит ее пополам $\Rightarrow \Delta KLO = \Delta MKO$ по гипотенузе и катету)

то $LM = KL = \sqrt{105}$

Ответ: $\sqrt{105}$.