



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



* 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

* 3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

* 4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

f 6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$\angle BEO = 90^\circ$; $\angle FED = \frac{1}{2} \angle EOF = \frac{90}{2} = 45^\circ$
Пока не найдем кас и хорды.

$\Rightarrow \triangle EXF$ р/о, тк углы при основании
равны 45° и $\angle EXF = 90^\circ$ по т. о Σ углов Δ .
 $\Rightarrow \triangle EXF$ в/у и опирается на диаметр.

$$a) R = \frac{1}{2} D = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

$\triangle XEF$; по т. Пифагора ($EF = XF$).

$$FX = \sqrt{\frac{EX^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{2}} = a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a^2+2ab+b^2)-11ab} =$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-11ab} = \frac{1}{a+b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc: 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$ab \cdot ac = 3^{33} \cdot 7^{55}$$

$$a = \sqrt{\frac{ab \cdot ac}{bc}} = \sqrt{\frac{3^{33} \cdot 7^{55}}{3^{19} \cdot 7^{17}}} = \sqrt{3^{14} \cdot 7^{38}} = 3^7 \cdot 7^{19}$$

$$b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^5 \cdot 7^{-6}$$

$$c = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$$

$$abc = a \cdot b \cdot c = 3^9 \cdot 7^{19} \cdot 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} = 3^{37} \cdot 7^{55}$$

2) $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, a, b \geq 0$.

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b) - 10ab}$$

$$\left(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} \right) = 5 - 6x; \quad |^2$$

$$3x^2 - 5x + 6 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} \sqrt{3x^2 + x + 1} + 3x^2 + x + 1 = 25 - 60x + 36x^2$$

$$6x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} \sqrt{3x^2 + x + 1} = 25 - 60x + 36x^2$$

DDB: $3x^2 - 5x + 6 \geq 0$
 $D = 25 - 3 \cdot 4 \cdot 6 = 50$
 \emptyset
 $3x^2 + x + 1 \geq 0$
 $D = 1 - 3 \cdot 4 = -11$

$$\frac{2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)}}{\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)}} = 15\sqrt{2} - 28x + 9$$

$$D = 28^2 - 4 \cdot 15 \cdot 9 = 244$$

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{244}}{30}$$

$$\sqrt{3x^2 + t + 1} - \sqrt{3x^2 + t + 6x - 5} = t + x$$

$$\sqrt{3x^2 - 5t + 11} - \sqrt{3x^2 + t} = -6t + 4x$$

$$6 - 5x$$

$$x + 1 = t$$

$$5 - 6x$$

$$-5x + 6$$

$$-6x + 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$x+1=a$~~ ~~$-6x+5=b$~~

~~$\sqrt{3x^2+a+b} - \sqrt{3x^2+a} = b$~~ ~~$| \times 2$~~

~~$3x^2+a+b - 2\sqrt{(3x^2+a+b)(3x^2+a)} + 3x^2+a = b^2$~~

~~$6x^2+2a+b - 2\sqrt{\dots} = b^2$~~

~~$6x^2+2a+b+b^2 = 2\sqrt{(3x^2+a+b)(3x^2+a)}$~~

~~$b = -6x+5$~~

~~$c = 3x^2$
 $a = b - 5x$~~

~~$\sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b$~~

~~$\sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b$~~

$$c+a = d \quad \begin{array}{r} \times 36 \\ 23 \\ \hline 98 \\ 72 \\ \hline 18 \end{array}$$

~~$\sqrt{d} - \sqrt{d-b} = b$~~

~~$d - 2\sqrt{d(d-b)} + db = b^2$~~

~~$d - 2\sqrt{d^2 - db} + db = b^2$~~

~~$d - 2\sqrt{d^2 - L} + L = b^2$~~

~~$2\sqrt{d^2 - L} = d + L - b^2$~~ ~~$| \times 2$~~

~~$4(d^2 - L) = d^2 + L^2 + b^4 + 2dL + 2db^2 + 2Lb^2$~~

~~$\sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b$~~ ~~$\Rightarrow c+a=d$~~

~~$\sqrt{d} - \sqrt{d-b} = b$~~

~~$d - 2\sqrt{d(d-b)} = b$~~

~~$d - b = 2\sqrt{d(d-b)} \Rightarrow d - b = L$~~

~~$L = 2\sqrt{dL}$~~

~~$L^2 = 4dL$~~

~~$L = 4d$~~

~~$\Rightarrow d - b = 4d$~~

~~$\Rightarrow b = 5(c+a)$~~

~~$b = 30 + 5x$~~

~~$b =$~~

~~$-6x+5 = 5(3x^2 + 6 - 5x)$~~

~~$-6x+5 = 15x^2 + 30 - 25x$~~

~~$15x^2 - 19x + 25 = 0$~~

~~$D = 19^2 - 4 \cdot 15 \cdot 25$~~

~~$d - b = 4d$~~

~~$\Rightarrow c+a-b = 4(c+a) \Rightarrow$~~

~~$b = -3d$~~

~~$b = -3(c+a)$~~

~~$-6x+5 = -3(3x^2 + 6 - 5x)$~~

~~$-6x+5 = -9x^2 - 18 + 15x$~~

~~$9x^2 - 21x + 23 = 0$~~

~~$D = 21^2 - 4 \cdot 9 \cdot 23 =$~~

$$\begin{array}{r} 25 \\ 60 \\ \hline 2100 \\ 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{ab}{b-a}$$

$$\frac{x}{a} \cdot 6 = x + 49$$

$$\frac{x}{a+7} = \frac{x}{b+7} + 96$$

$$\frac{ab}{(b-a)a} \cdot 6 = \frac{ab}{(b-a)} + 49 \Rightarrow b = 49$$

$$\frac{ab}{(b-a)(a+7)} = \frac{ab}{(b-a)(b+7)} + 0,6$$

$$\frac{ab^2 + 7ab - a^2b - 7ab}{(b-a)(a+7)(b+7)} = 0,6$$

$$\frac{ab(b-a)}{(b-a)(a+7)(b+7)} = 0,6$$

$$\frac{ab}{(a+7)(b+7)} = 96$$

$$ab = 96(ab + 7a + 7b + 49)$$

$$ab = 96ab + 4,2a + 4,2b + 29,4$$

$$-95ab - 4,2a - 4,2b = 29,4$$

$$a(0,4b - 4,2) = 4,2b + 29,4$$

$$a = \frac{4,2b + 29,4}{0,4b - 4,2} = \frac{4,2 \cdot 49 + 29,4}{0,4 \cdot 49 - 4,2} = \frac{235,2 + 29,4}{19,6 - 4,2}$$

$$\begin{array}{r} 2432 \overline{) 154} \\ - 154 \\ \hline 892 \\ - 892 \\ \hline 170 \\ 154 \\ \hline 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 770 \\ + 1540 \\ \hline 2310 \end{array}$$

$$a(19,6 - 4,2) = 20,58 + 29,4$$

$$\begin{array}{r} 2352 \overline{) 154} \\ 154 \\ \hline 812 \\ 770 \\ \hline 420 \\ - 420 \\ \hline 308 \\ 308 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 154 \\ 5 \\ \hline 770 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 28 \\ \hline 168 \\ 42 \\ \hline 588 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 49 \\ \hline 378 \\ + 196 \\ \hline 2058 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 0,4 \\ \hline 19,6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 49 \\ \hline 378 \\ 176 \\ \hline 2138 \\ 294 \\ \hline 2432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 294 \\ 240 + 54 \end{array}$$

$$\frac{49 \cdot 6}{10} = 29,4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



	S	Z	z
Вел.	x	a	$\frac{x}{a} z$
Мот.	x	b	$\frac{x}{b} z$
Вел. (км)		a	$\frac{x}{b} z$
Мот. (км)	x+49	b	$\frac{x}{a} z$
Вел+Z	x	a+z	$\frac{x}{a+z}$
Мот+Z	x	b+z	$\frac{x}{b+z}$

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$$

$$\frac{x}{a} \cdot b = x + 49$$

$$\frac{x}{b+z} = \frac{x}{b+z} + \frac{36}{80}$$

$\frac{36}{80}$
 $\frac{3}{5}$

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1 \Rightarrow \frac{x(b-a)}{ab} = 1 \Rightarrow x(b-a) = ab$$

$$x(b-a) = ab$$

$$x = \frac{ab}{b-a}$$

$$\frac{ab}{(b-a)(a+z)} = \frac{ab}{(b-a)(b+z)} + \frac{3}{5}$$

$$\frac{49a}{(49-a)(a+z)} = \frac{49a}{(49-a)(49+z)} + 0,6$$

$$\frac{49a}{(49-a)(a+z)} = \frac{49a}{(49-a)56} + 0,6$$

$$\frac{49a}{(49-a)(a+z)} - \frac{7a}{(49-a)d} = 0,6$$

$$\frac{392a - 7a^2 + 49a}{(49a)(a+z)} = 0,6$$

$$392a - 7a^2 - 49a = 0,6 \cdot d \cdot (49-a)(a+z) \cdot 1,2$$

$$7a^2 - 343a = 0,6 \cdot d \cdot (49-a)(a+z)$$

$$7a(a-49) = 0,6 \cdot d \cdot (a-49)(a+z)$$

$$7a = 0,6 \cdot d \cdot (a+z)$$

$$7a = 4,8a + 33,6$$

$$2,2a = 33,6$$

$$\begin{array}{r} 15,4 \\ + 4,2 \\ \hline 19,6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 336 \overline{) 22} \\ 22 \\ \hline 116 \\ 110 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2352 \overline{) 588} \\ 20 \\ \hline 35 \\ - 32 \\ \hline 10 \\ 10 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 392 \\ - 49 \\ \hline 343 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 336 \overline{) 2401} \\ 2352 \\ \hline 49 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

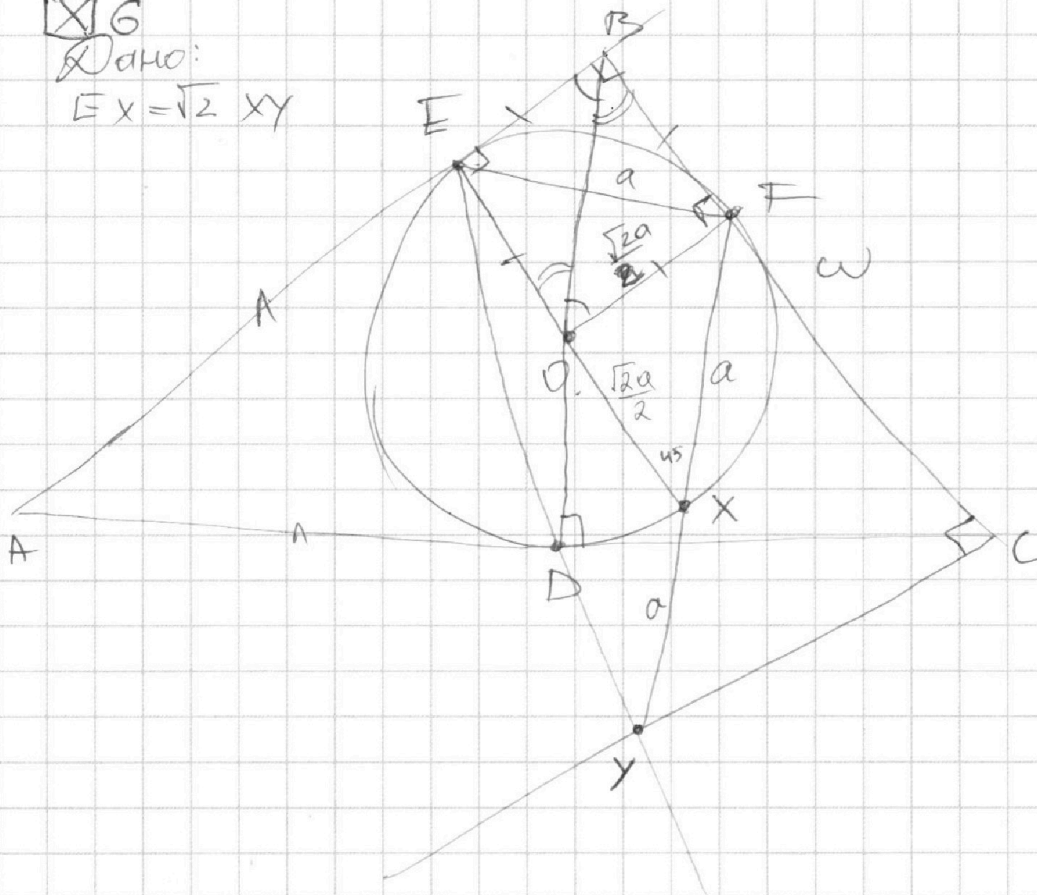
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6

Дано:

$$EX = \sqrt{2} XY$$



Решение:

Пусть $XY = a$, тогда $EX = \sqrt{2} a$

- 1) Окр ω : радиус = r , O - центр окр.
 $OE = OF = r$.

$\triangle OEB = \triangle OFB$, т.к. некрестные углы при $OF \parallel EB$ (параллельна к диаметру окр) и сек BO ~~соединяет FO и EO~~ и
 также $FB \perp OE$ и сек $BO \angle BOE = \angle OFB$ \Rightarrow
 $EB = OF \Rightarrow EB = OF = OE \Rightarrow$ равнобедрен.
 $\triangle BEO$ и $\triangle OFB$ $\Rightarrow \angle EOF = 90^\circ$.

- 2) $\angle EXF$ вписан, опирается на $\angle EOF$
 $\angle EOF$ - центр $\angle EXF = \frac{1}{2} \angle EOF = 45^\circ$.

$\angle BFO = 90^\circ$.

~~$\angle EFB = \frac{1}{2} \angle EOF$ (угол между хордой и диаметром)~~
 ~~$\angle EFB = 45^\circ \Rightarrow$ б.а.~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{ab}{b-a}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$$

$$a \cdot \frac{x}{b} + 49 = \frac{b \cdot x}{a}$$

$$\frac{x}{a+7} = \frac{x}{b+7} + \frac{6}{10}$$

$$a \cdot \frac{ab}{(b-a)a} + 49 = \frac{b \cdot ab}{(b-a)a}$$

$$\frac{ab}{b-a} + 49 = \frac{ab}{b-a}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline 52,252 \\ 888 \end{array}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b-a} = -49$$

$$a^2 - b^2 = -49b + 49a$$

$$(a-b)(a+b) = -49(a-b)$$

$$a+b = 49$$

$$a = 49 - b$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 441 \\ 196 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 56 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\frac{ab}{(b-a)(49-b+7)} = \frac{ab}{(b-a)(b+7)} + \frac{6}{10}$$

$$(49-b)b$$

$$\frac{ab}{(b-a)(56-b)} = \frac{(49-b)b}{(b-a)(b+7)} + 0,6$$

$$\begin{array}{r} 3077 \\ 470,4 \\ \hline 3547,4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ 672 \end{array}$$

$$\frac{(49-b)b}{(b-49+b)(56-b)} = \frac{(49-b)b}{(b-49+b)(b+7)} + 0,6$$

$$\begin{array}{r} 392 \\ 470,4 \\ \hline 862,4 \end{array}$$

$$\frac{(49-b)b}{2(56-b)} = \frac{(49-b)b}{2(b+7)} + 0,6$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 784 \\ 392 \\ 470,4 \end{array}$$

$$\frac{(49-b)(b+7) - (49-b)(56-b)}{(56-b)(b+7)} = 1,2$$

$$\begin{array}{r} 672 \\ 84 \\ \hline 756 \end{array}$$

$$(49-b)(b+7-56+b) = 1,2(56-b)(b+7)$$

$$(49-b)(2b-49) = 1,2(56b + 56 \cdot 7 - b^2 - 7b)$$

$$98b - 49^2 - 2b^2 + 49b = 67,2b + 470,4 - 1,2b^2 - 8,4b$$

$$147b - 52,2b$$

$$0 = 98b^2 - 98,8b + 3547,4$$

$$0 = 0,2b^2 - 22,2b + 3547,4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

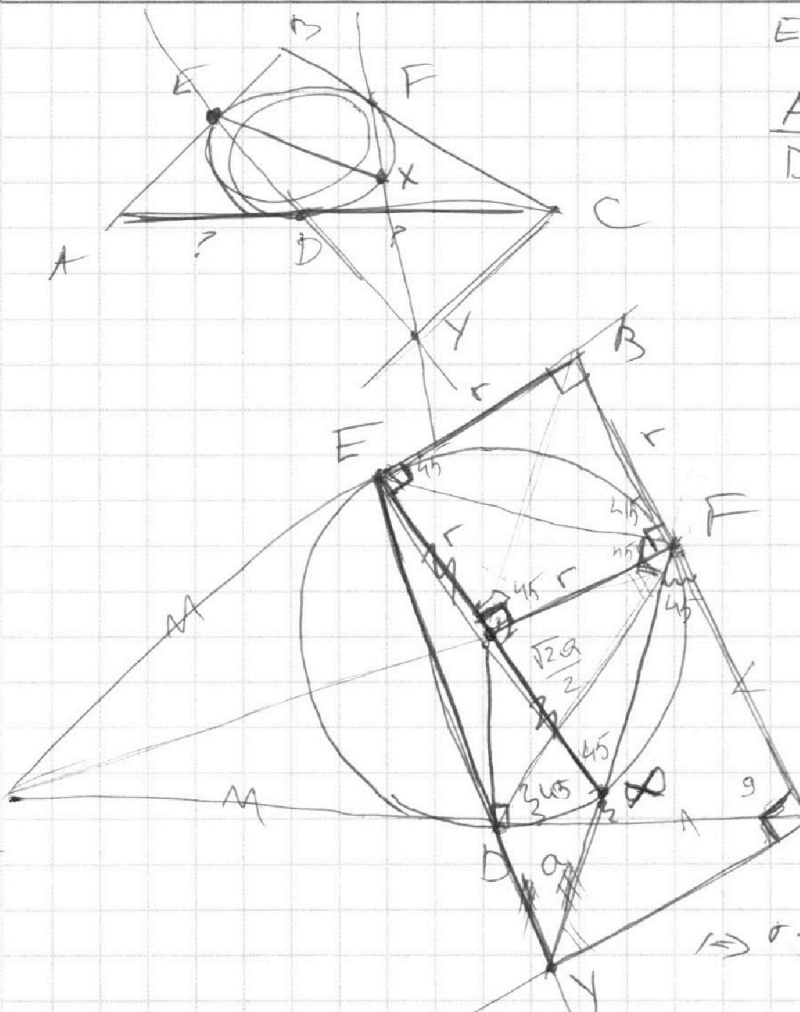
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EX = \sqrt{2} \cdot XY.$$

$$\frac{AD}{DC}.$$



$\angle EXF$ опис. кр.
 XY не хорда, т.к.
 центр $\angle EOF = 90^\circ$.
 $\angle EXF = \frac{1}{2} 90 = 45$.

$\triangle XEF$ - н/у, т.к.
 углы при одной из
 45. $\Rightarrow \angle F = 90^\circ$ и
 описывается кр. о-кв.

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{2} xy = \frac{\sqrt{2} xy}{2}.$$

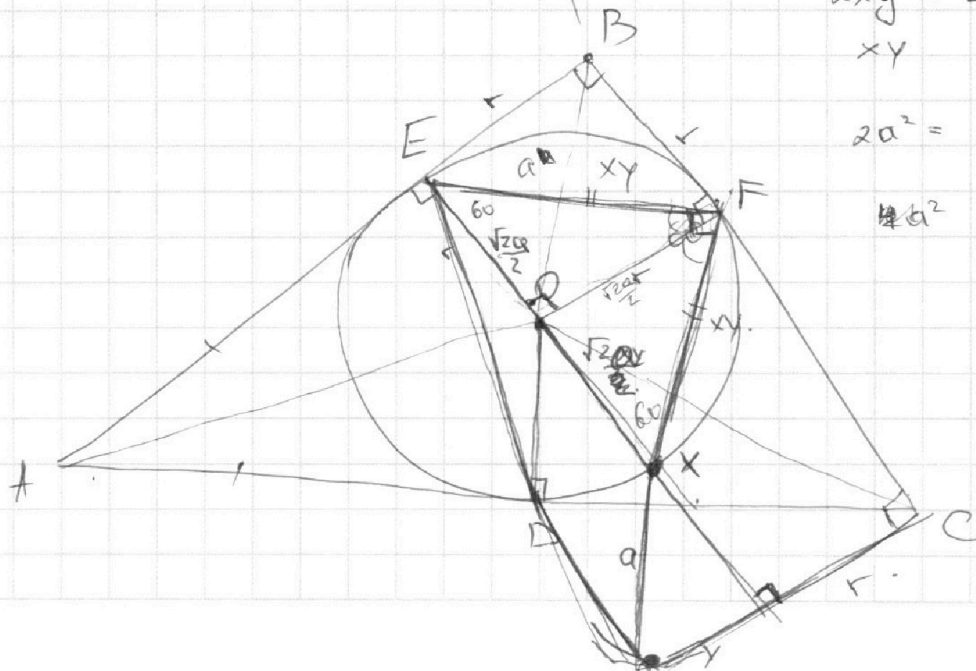
$$2xy^2 = 2a^2$$

$$xy$$

$$2a^2 = 2b^2$$

$$a^2 \cdot \frac{2a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$$

$$a^2$$





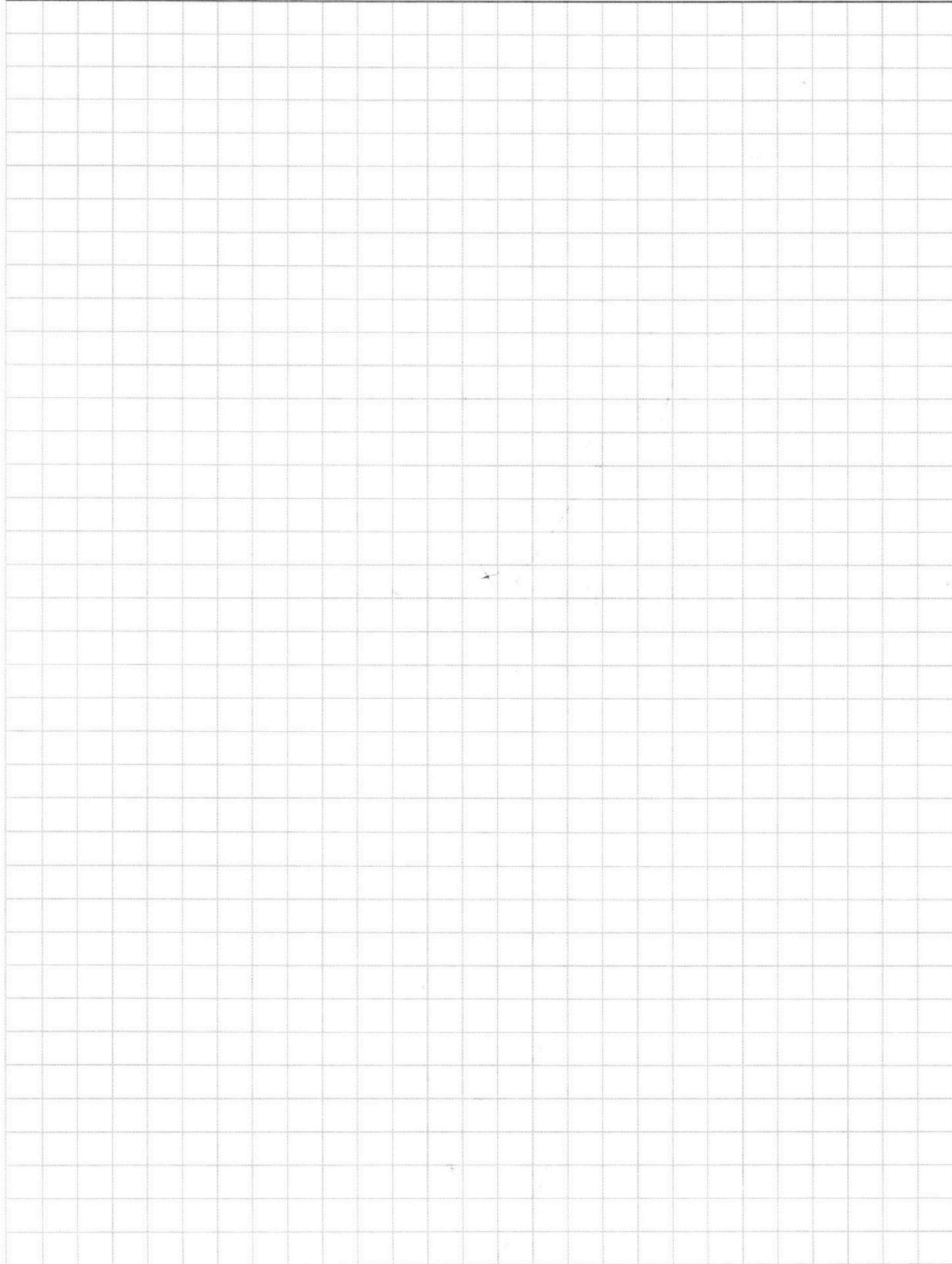
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



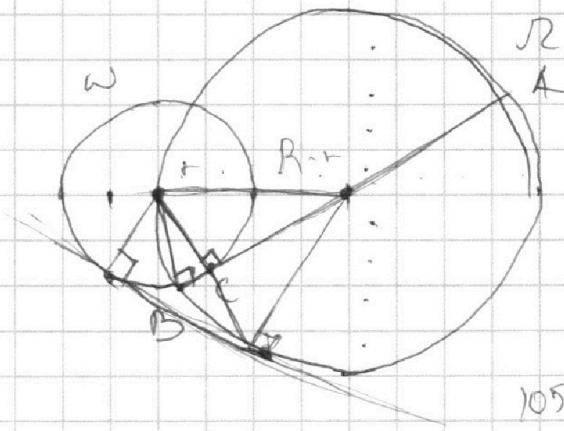
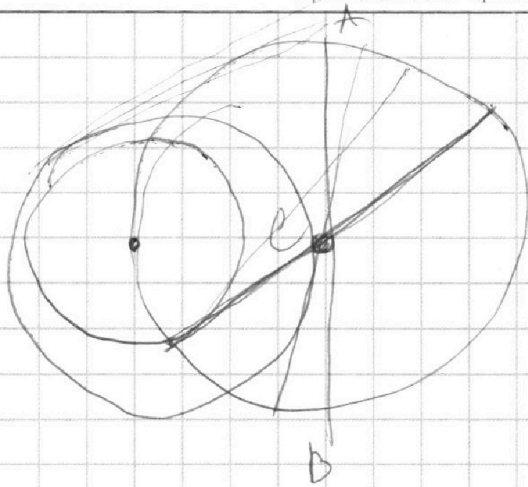
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

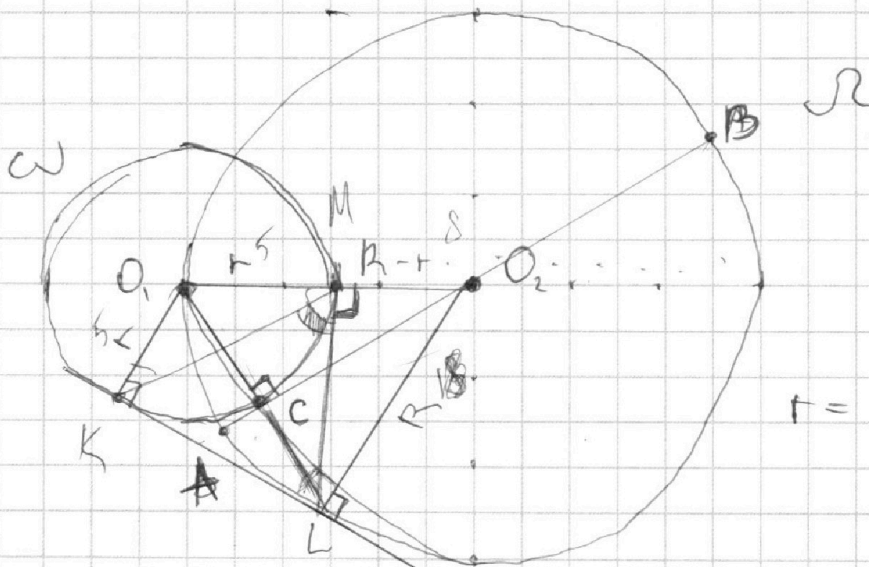
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

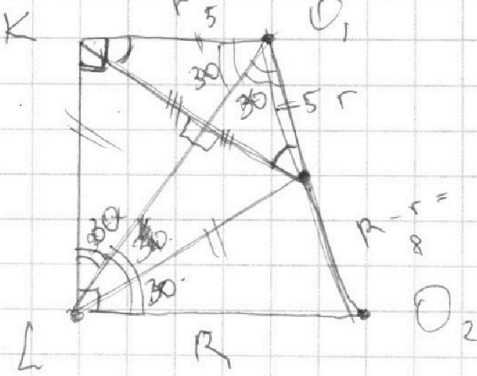


105



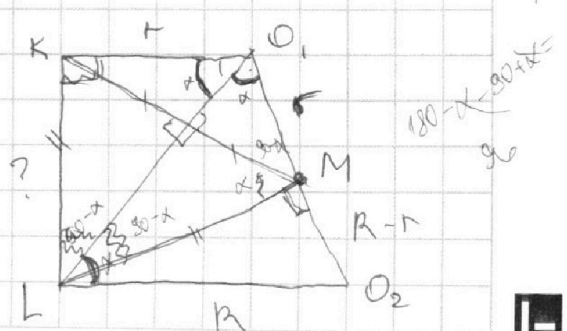
$r = \text{max} \cdot \omega$
 $R = \Omega$
 $AC = 1 \quad BC = 25$
 ~~$R = 13$~~
 $R = 13$

$AC \perp O_1 O_2$, н/у: $O_1 C = \sqrt{O_1 O_2^2 - CO_2^2} = \sqrt{R^2 - (B-AC)^2} =$
 $\sqrt{169 - 144} = 5$. $r = 5$.



$169 - 64 = \sqrt{105}$

$LL = LM$ - касат. к осп.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5. $y = 5x - 3z$
 $5x - y = 3z$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{5x - 3z} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{1}{5x - 3z} = \frac{15x - 1z}{xz}$$

$$(5x - 3z)(15x - 1z) = xz$$

$$75x^2 - 40xz - 45zx + 3z^2 = xz$$

$$75x^2 - 86xz + 3z^2 = 0$$

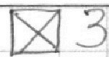
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ОДЗ:

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0.$$

$$\Delta_1 < 0$$

$$3x^2 + x + 1 \geq 0;$$

$$\Delta_2 < 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Замена:

$$3x^2 = c; \quad -5x + 6 = a; \quad -6x + 5 = b.$$

$$\sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b.$$

Замена: $c+a = d$

$$\sqrt{d} - \sqrt{d-b} = b \quad |^2 \quad \text{возведем в квадрат}$$

$$d - 2\sqrt{d(d-b)} + (d-b) = b.$$

$$2(d-b) - 2\sqrt{d(d-b)} = 0 \quad \text{Замена: } d-b = L.$$

$$2L - 2\sqrt{dL} = 0$$

$$2L = 2\sqrt{dL} \quad |^2$$

$$4L^2 = 4dL$$

$$L = d.$$

$$1 \Rightarrow d-b = d.$$

$$b = 0$$

$$-6x + 5 = 0.$$

$$6x = 5.$$

$$x = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{6}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

$$\begin{cases} ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \\ bc = 3^{19} \cdot 7^{17} \\ ac = 3^{23} \cdot 7^{42} \end{cases}$$

$abc = ?$

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$1) a = \sqrt{\frac{ab \cdot ac}{bc}} = \sqrt{\frac{3^{37} \cdot 7^{55}}{3^{19} \cdot 7^{17}}} = \sqrt{3^{18} \cdot 7^{38}} = 3^9 \cdot 7^{19}$$

$$2) b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{3^9 \cdot 7^{19}} = \frac{ab}{a} = 3^5 \cdot 7^{-6}$$

$$3) c = \frac{ac}{a} = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$$

$$4) abc = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^5 \cdot 7^{-6} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} = 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{36}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6

$$\frac{(49-b)v(b+7) - (49-b)v(56-b)}{(28-49)(56-b)(b+7)} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{v(49-b)(b+7 - 56+b)}{(28-49)(56-b)(b+7)} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{v(49-b)(28-49)}{(28-49)(56-b)(b+7)} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{v(49-b)}{(56-b)(b+7)}$$

$$49v - b^2 = 0,6(56b + 392 - b^2 - 7b)$$

$$49v - b^2 = 33,6b + 235,2 - 0,6b^2 - 4,2b$$

$$0 = 0,4b^2 - 19,6b + 235,2$$

$$0 = 4b^2 - 196b + 2352$$

$$0 = b^2 - 49b + 588$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 588 = 2401 - 2352 = 49$$

$$b_{1,2} = \frac{49 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} b_1 = 28 \\ b_2 = 21 \end{cases}$$

$$b=21; x = \frac{av}{(b-a)} = \frac{(49-b)v}{(b-49+b)} = \frac{(49-b)v}{28-49} = \frac{(49-21)21}{42-49} < 0$$

$$b=28; x = \frac{(49-b)v}{28-49} = \frac{(49-28)28}{56-49} = \frac{588}{7} = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6.

	S	W	t
Вел	x	a км/ч	$\frac{x}{a}$ ч
Мот	x	b км/ч	$\frac{x}{b}$ ч
Мот (t м)	$a \cdot \frac{x}{b}$	a км/ч	$\frac{x}{b}$ ч
Мот (t в)	$b \cdot \frac{x}{a}$	b км/ч	$\frac{x}{a}$ ч
Вел + t	x	(a+t) км/ч	$\frac{x}{a+t}$ ч
Мот + t	x	(b+t) км/ч	$\frac{x}{b+t}$ ч

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1 \\ 49 + a \cdot \frac{x}{b} = b \cdot \frac{x}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1 \\ \frac{x}{a+t} = \frac{x}{b+t} + \frac{36}{60} \end{cases}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$$

$$\frac{x(b-a)}{ab} = 1$$

$$x = \frac{ab}{b-a}$$

Подставим x во II равенство:

$$\frac{ab - a}{(b-a)a} + 49 = \frac{ab \cdot b}{(b-a)a}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b-a} = -49$$

$$(a-b)(a+b) = 49(a-b)$$

$$a+b = 49$$

$$a = 49 - b$$

Подставим a в III равенство:

$$\frac{ab}{(b-a)(a+t)} = \frac{ab}{(b-a)(b+t)} + \frac{6}{10}$$

$$\frac{(49-b)b}{(b-49+b)(49-b+t)} = \frac{(49-b)b}{(b-49+b)(b+t)} + \frac{6}{10}$$

$$\frac{(49-b)b}{(2b-49)(56-b)} = \frac{(49-b)b}{(2b-49)(b+t)} + \frac{6}{10}$$

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

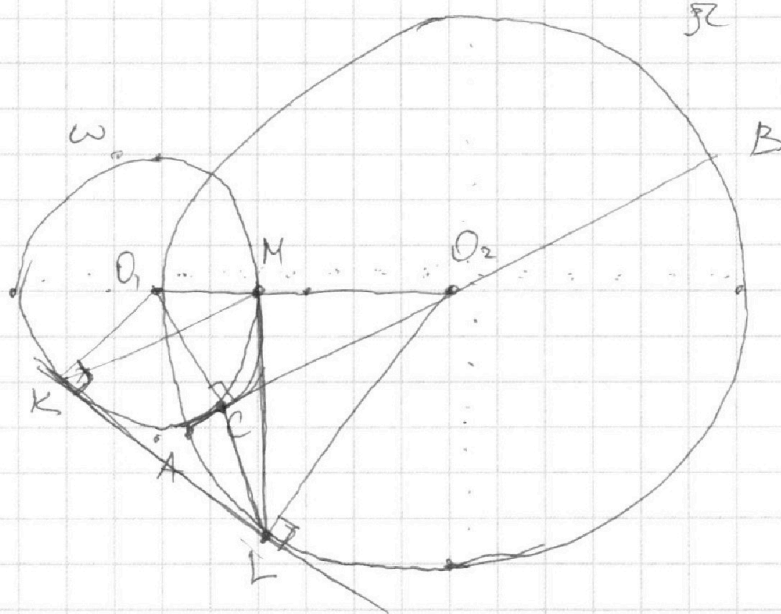


4

Доно:

окр ω , окр \mathcal{R}
 AB -diam. = D
 $AC = 1$
 $BC = 25$

KL - ?



Решение:

1) Окр \mathcal{R} :

AB -diam.

$AB = AC + CB = 1 + 25 = 26$

R - радиус окр. \mathcal{R} . $R = \frac{D}{2} = \frac{26}{2} = 13$.

2) Γ - рад. окр. ω .

$\triangle CO_1O_2$ н/у, т.к. CB -кас:

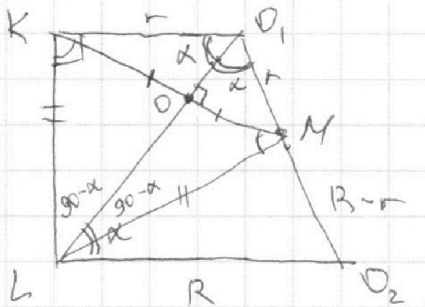
$O_1C = \Gamma$, $OM = \Gamma$; $MO_2 = R - \Gamma$; $CO_2 = R - AC = 12$.

По т. Пифагора: $O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2C^2} =$

$= \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$, $\Gamma = 5$

3) KO_1O_2L - Трапеция, т.к. $KO_1 \parallel O_2L$, т.к.

O_1K и O_2L перпендикулярны к общей пр. KL , кото-
рая является касательной общей.



Рассм Трап $\{KO_1O_2L$ отрезком;

1. $KO_1 = O_1M \Rightarrow \Gamma = 5 \Rightarrow \triangle KO_1M$ р/б

2. $KO_1 \parallel O_2L$ и сек O_1L : $\angle KO_1L = \angle O_1LO_2$

т.к. касател-лежащие

3. $LK = LM$ - касат к окр ω и проведет.

из L точки $\Rightarrow \triangle KLO = \triangle MLO$

$\Rightarrow KO = OM$.

4. $KO = OM$ $\triangle KO_1M$: $KO = OM$ - медиана, значит и
бисс и высота $\Rightarrow \angle KO_1O = \angle O_1OM = \angle LO_2O = \alpha$.

5. $\triangle LKO$, н/у: $\angle OKL = 90 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$ по т. о Σ углов Δ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

6. $\angle KLO = \angle OLM$ ($\triangle KLO = \triangle MLO$) ~~$\angle KLO = \angle OLM = 90 - x$~~

7. $\triangle LOM$ ~~пря~~ $\angle M = 90 - 90 + x = x$.

8. $\angle O, NL = \angle O, MK + \angle OML = 90 - x + x = 90^\circ \Rightarrow$

LM - это высота к OO_2 и $\angle LMO_2 = 90^\circ$

9. $LM = \sqrt{LO_2^2 - MO_2^2} = \sqrt{R^2 - (R-t)^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$

10. Т.к. мы доказали, что $\triangle KLO = \triangle MKO$

(~~по 2 катетам~~); это следует из равенства $\angle O, KL$ и ~~$\angle O, ML$~~

$\triangle O, ML$ где они равны по 2-м катетам;

и также радиус, проведенный к хорде, делит ее

пополам $\Rightarrow \triangle KLO = \triangle MKO$ по гипотенузе и катету)

То $LM = KL = \sqrt{105}$

Ответ: $\sqrt{105}$.