



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 14

- * 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- * 3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

- * 4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

- * 6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$\angle BEO = 90^\circ$, $\angle FED = \frac{1}{2} \angle EOF = \frac{90}{2} = 45^\circ$
так же измерю часы и угадай.

$\Rightarrow \triangle EFX$ по признаку основания равных 45° и $\angle EFX = 90^\circ$ по т. о. \triangle ушов \triangle .
 $\Rightarrow \triangle EFX$ h/y и отображается на диагональ.

4) $R = \frac{1}{2} D = \frac{\sqrt{2}a}{2}$

$\triangle XEF$; по т. Пифагора ($EF = XF$) .

$$FX = \sqrt{\frac{Ex^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{2}} = a$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a^2 + ab + b^2) - 11ab} =$$
$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab} = \cancel{\frac{1}{a+b}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 1) ab &: 3^{14} 7^{13} & ab \cdot ac = 3^{37} 7^{55} & -5x+5=5 \\
 bc &: 3^{19} 7^{17} & a = \sqrt{\frac{ab \cdot ac}{bc}} = \sqrt{\frac{3^{37} 7^{55}}{3^{19} 7^{17}}} = \sqrt{3^{18} 7^{38}} = 3^9 7^{19} \\
 ac &: 3^{23} 7^{42} & \\
 a = 3^9 7^{19} & b = 3^{14} 7^{13} & c = 3^5 7^{-6} \\
 c = \frac{3^{23} 7^{42}}{3^9 7^{19}} & = 3^{14} 7^{23} & \\
 abc & = a \cancel{3^9 7^{19}} \underline{3^{14} 7^{13}} \cdot \underline{3^{14} 7^{23}} = 3^{28} \cdot 7^{36}.
 \end{aligned}$$

$$2). \frac{a+b}{b} \text{ AGN, BEN } a \cdot b \neq 0.$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)(a-8b)} = 10ab.$$

$$\begin{array}{r}
 28 \\
 28 \\
 \hline
 224 \\
 56 \\
 \hline
 784 \\
 244
 \end{array}$$

$$\text{N5. } (\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1}) = 3 - 6x, |12$$

$$(3x^2 - 5x + 6 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} \sqrt{3x^2 + x + 1} + 3x^2 + x + 1) = 25 - 60x + 36x^2.$$

$$6x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6} \sqrt{3x^2 + x + 1} = 25 - 60x + 36x^2.$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)}}{\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)}} &= 30x^2 - 56x + 18 & |:2 \\
 &= 15x^2 - 28x + 9 & D = 28^2 - 4 \cdot 15 \cdot 9 = 550 \\
 &= 244.
 \end{aligned}$$

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{550}}{244}$$

$$-5x + 3 = 2$$

$$\frac{\sqrt{3x^2 + t + 1}}{6 - 5x} - \sqrt{3x^2 + t + 6x - 5} = -t + x.$$

$$\frac{\sqrt{3x^2 - 5t + 11}}{x + 1} - \sqrt{3x^2 + t} = -6t + 11$$

$$x + 1 = t \\ 5 - 6x = -5x + 6$$

$$x + 1 = t \\ 5 - 6x = -6x + 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \quad \text{4} \quad \text{5} \quad \text{6} \quad \text{7} \\
 & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}
 \end{aligned}$$

112.

$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \end{array}$

$\begin{array}{r} 3x^2 + a + b - 2\sqrt{(3x^2 + a + b)(3x^2 + a)} = b^2 \\ 3x^2 + a + b - 2\sqrt{3x^2 + a} \cdot \sqrt{3x^2 + a} = b^2 \\ 6x^2 + 2a + b - 2\sqrt{3x^2 + a} = b^2 \\ 6x^2 + 2a + b + b^2 = 2\sqrt{(3x^2 + a + b)(3x^2 + a)} \end{array}$

$\begin{array}{r} 42 \\ \times 36 \\ \hline 98 \\ 12 \\ \hline 144 \end{array}$

$\begin{array}{r} c+a \\ c=3x^2 \\ a=b-5x \\ c+a = d \end{array}$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 98 \\ 42 \\ \hline 810 \end{array}$

$\begin{array}{r} d \\ d^2 - 2\sqrt{d(d-b)} + db = b^2 \\ d - 2\sqrt{d^2 - db} + db = b^2 \\ d - 2\sqrt{d^2 - L} + L = b^2 \\ 2\sqrt{d^2 - L} = d + L - b^2 \end{array}$

$\begin{array}{r} 112. \\ 268 \\ 4(d^2 - L) = d^2 + L^2 + b^4 + 2dL + 2db^2 + 2LB^2 \end{array}$

$\begin{array}{r} 25 \\ \times 60 \\ \hline 2100 \end{array}$

$\begin{array}{r} d \\ d^2 - 2\sqrt{d(d-b)} = b^2 \\ d - b = \sqrt{d(d-b)} \Rightarrow d-b=L \\ L = \sqrt{dL} \\ L^2 = 4dL \\ L = 4d \end{array}$

$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 19 \\ 36 \\ \hline 361 \end{array}$

$\begin{array}{r} 171 \\ \cancel{d} \\ \cancel{d} = 4d \end{array}$

$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 19 \\ 36 \\ \hline 361 \end{array}$

$-6x+5 = 5(3x^2 + b - 5x)$

$-6x+5 = 15x^2 + 30 - 25x$

$15x^2 - 19x + 25 = 0$

$D = 19^2 - 4 \cdot 15 \cdot 25$

$d-b = 4d \Rightarrow d-b = 4(c+a) \Rightarrow b = -3(c+a)$

$b = -3(c+a)$

$-6x+5 = -3(3x^2 + b - 3x)$

$-6x+5 = -9x^2 - 18 + 15x$

$9x^2 - 21x + 23 = 0$

36.

$D = 81^2 - 4 \cdot 9 \cdot 23 =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \frac{ab}{b-a}$$

$$\frac{x}{a} \cdot b = x + 49$$

$$\frac{x}{a+7} = \frac{x}{b+7} + 96$$

$$\frac{\cancel{ab}}{(b-a)} \cdot \cancel{b} = \frac{\cancel{ab}}{(b-a)} + 49 \Rightarrow b = 49.$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 0,4 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\frac{ab}{(b-a)(a+7)} = \frac{\cancel{ab}}{\cancel{b+7}} + \frac{ab}{(b-a)(b+7)} + 0,6.$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ 213,8 \\ \hline 29,4 \\ + 29,4 \\ \hline 243,2 \end{array}$$

$$\frac{ab^2 + 7ab - a^2b - 7ab}{(b-a)(a+7)(b+7)} = 0,6.$$

$$\frac{ab(b-a)}{(b-a)(a+7)(b+7)} = 0,6. \quad \frac{ab}{(a+7)(b+7)} = 0,6.$$

$$\begin{array}{r} 294 \\ 140+54 \\ \hline 243,2 \end{array}$$

$$ab = 0,6(0b + 7a + 7b + 49).$$

$$\begin{array}{r} 294 \\ 10 \\ \hline 29,4 \end{array}$$

$$ab = 0,6ab + 4,2a + 4,2b + 29,4$$

$$\cancel{0,6ab} \quad 0,4ab - 4,2a = 4,2b + 29,4.$$

$$a(0,4b - 4,2) = 4,2b + 29,4.$$

$$a = \frac{4,2b + 29,4}{0,4b - 4,2} = \frac{4,2 \cdot 49 + 29,4}{0,4 \cdot 49 - 4,2} = \frac{203,8 + 29,4}{19,6 - 4,2} = \frac{233,2}{15,4} = 15,4.$$

$$\begin{array}{r} 154 \\ \overline{- 154} \\ \hline 0 \\ \begin{array}{r} 154 \\ - 892 \\ \hline 652 \\ + 650 \\ \hline 1220 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 49 \\ \hline 198 \\ + 168 \\ \hline 2058 \end{array}$$

$$a(19,6 - 4,2) = 20,58 + 29,4.$$

$$\begin{array}{r} 2352 \\ \overline{- 154} \\ \hline 812 \\ \begin{array}{r} 810 \\ - 420 \\ \hline 392 \\ - 308 \\ \hline 1120 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 154 \\ \times 28 \\ \hline 1232 \\ + 1540 \\ \hline 4288 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Bea. x a $\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$.
 №7. x b $\frac{x}{b} = \frac{x}{a} + 1$.
 Bea. ($b-a$) $x+49$. $\frac{x}{a} = \frac{x}{b+2} + \frac{36}{60}$.
 №7. ($b-a$) x $b+2$. $\frac{x}{b+2} = \frac{x}{a+7} + \frac{6}{10}$.
~~Bea. ($b-a$) $x+49$. $\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$. $\frac{x(b-a)}{ab} = 1 \Rightarrow x(b-a) = ab$.~~
 ~~$x(b-a) = ab$. $x = \frac{ab}{b-a}$~~ . $\frac{ab}{(b-a)(a+7)} = \frac{ab}{(b-a)(b+2)} + \frac{3}{5}$.
 ~~$\frac{49a}{(49-a)(a+7)} = \frac{a+49}{(49-a)(49+7)} + 0,6$~~ .
 ~~$\frac{49a}{(49-a)(a+7)} = \frac{49a}{(49-a)56} + 0,6$~~ .
 ~~$\frac{49a}{(49-a)(a+7)} - \frac{7a}{(49-a)7} = 0,6 \cdot \frac{35}{328-112}$~~ .
 ~~$\frac{392a - 7a^2 - 49a}{(49a)(a+7)7} = 0,6 \cdot \frac{35}{328-112}$~~ .
 ~~$7a^2 - 343a = 0,6 \cdot 8(49-a)(a+7)$~~ .
 ~~$7a(a-49) = 0,6 \cdot 8(a-49)(a+7)$~~ .
 ~~$7a = 0,6 \cdot 8(a+7)$~~ .
 ~~$7a = 4,8a + 33,6$~~ . $2,2a = 33,6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

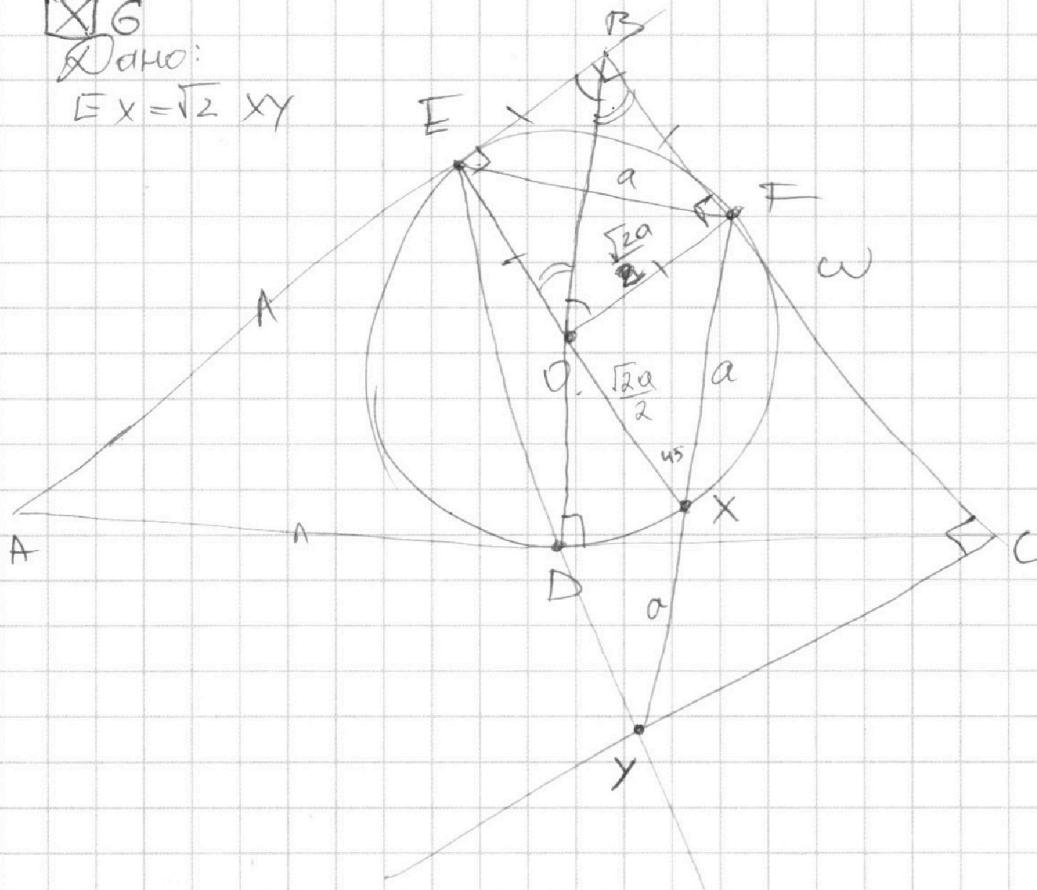
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6

Дано:

$$EX = \sqrt{2} XY$$



Решение:

Пусть $XY = a$, тогда $EX = \sqrt{2} a$

1) Окружность ω : радиус $= r$, O -центр окр.
 $OE = OF = r$.

$\triangle OEB \sim \triangle BFO$, т.к. соответствующие углы при $OF \parallel EB$ (параллограмм с верхней окр.) и $\angle BOE = \angle BFO$ и $\angle BFO \sim \angle BFO$ и $\angle BOE = \angle BFO$ ($\angle BFO = \angle BFO$) \Rightarrow
 $EB = BF \Rightarrow EB = OF = r \Rightarrow$ прямокут.

$\triangle BEO \sim \triangle OBF$ по $\angle BFO = 90^\circ$.

2) $\angle EXF$ вписаный в окр. $\angle EOF$

$\angle EOF$ -сторона $\angle EXF = \frac{1}{2} \angle EOF = 45^\circ$.

$\angle BFO = 90^\circ$.

~~$\angle EFB = \frac{1}{2} \angle EOF$ (это нечестно)~~

~~$\angle EFB = 45^\circ \Rightarrow \triangle EXF$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\int \frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$$

$$a \cdot \frac{x}{b} + 49 = \frac{b \cdot x}{a}$$

$$\frac{x}{a+7} = \frac{x}{b+7} + \frac{6}{10}$$

$$x = \frac{ab}{b-a}$$

$$a \cdot \cancel{ab} + 49 = \frac{b \cdot \cancel{ab}}{(b-a)} + 49 = \frac{ab}{(b-a)}$$

$$\cancel{ab} - ab^3 = 26$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b-a} = -49$$

$$a^2 - b^2 = -49b + 49a$$

$$(a-b)(a+b) = -49(b-a)$$

$$a+b = 49$$

$$a = 49-b$$

$$\frac{ab}{(b-a)(49-b+7)} = \frac{ab}{(b-a)(b+7)} + \frac{6}{10} + \frac{6}{10}$$

$$(49-b)b = 1470$$

$$(b-a)(56-b) = 152$$

$$(49-b)b = 1470$$

$$(b-a)(56-b) = 152$$

$$\frac{(49-b)b}{(b-49+6)(56-b)} = \frac{(49-b)b}{(b-49+6)(b+7)} + 0,6$$

$$\frac{(49-b)b}{28(56-b)} = \frac{(49-b)b}{28(b+7)} + 0,6$$

$$\frac{(49-b)b}{(56-b)(b+7)} - \frac{(49-b)(56-b)}{(56-b)(b+7)} = 0,2$$

$$(49-b)(b+7) - (49-b)(56-b) = 1,2(56-b)(b+7)$$

$$(49-b)(b+7) - (49-b)(56-b) = 1,2(56-b)(b+7)$$

$$\underbrace{98b - 49^2 - 2b^2 + 49b}_{\text{окончательный}} = \underbrace{672b + 470,4}_{\text{результат}} - 1,2b^2 - \cancel{49b}$$

$$147b - 58,2b = 0,2b^2 - 22,2b + 3547,4$$

$$0 = 0,2b^2 - 22,2b + 3547,4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

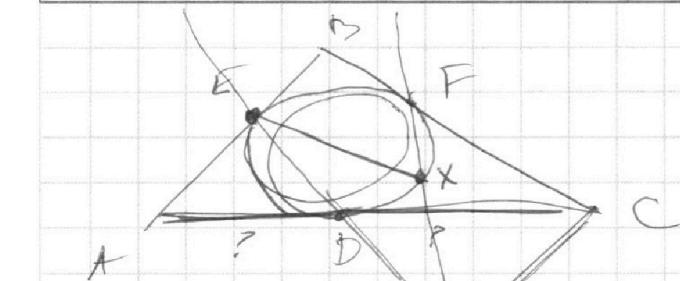
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EX = \sqrt{2} XY.$$

$$\frac{AD}{DC}.$$

$\angle EXF$ остр. и

ты не фигу, что
извр. $\angle EOF = 90^\circ$.
 $\angle EXF = \frac{1}{2} 90^\circ = 45^\circ$.

$\triangle XEF$ - р/у, тк
чтож они одинаковы
 45° . $\Rightarrow \angle F = 90^\circ$ и
опирается ко р.

$$\Rightarrow r = \frac{l}{2} \sqrt{2} XY = \frac{\sqrt{2} XY}{2}.$$

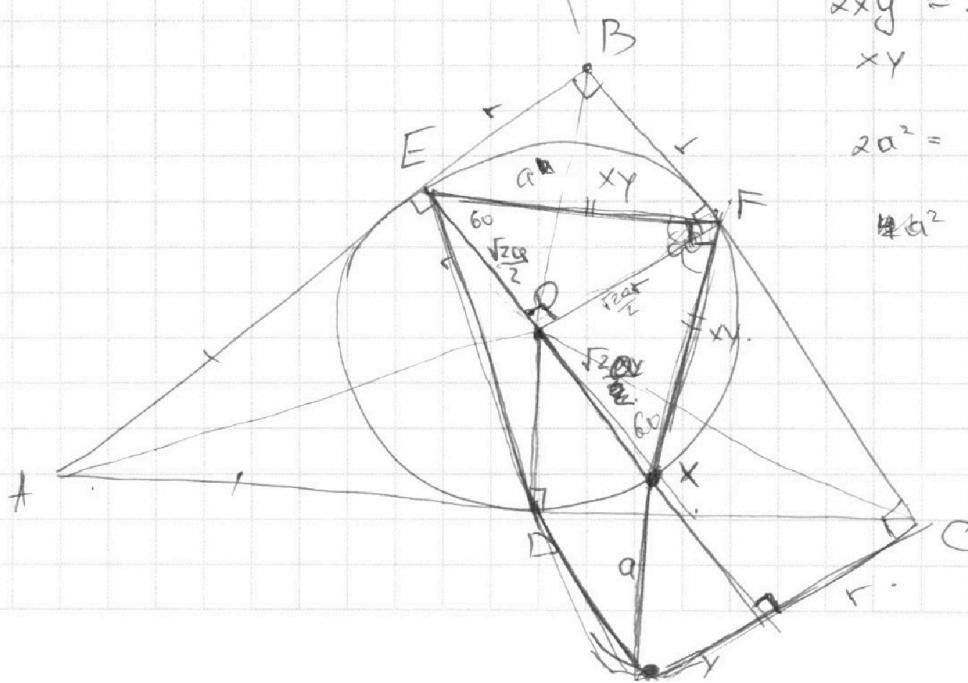
$$2XY^2 = 2a^2$$

$$XY$$

$$2a^2 = 2b^2.$$

~~$$\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$$~~

$$a^2.$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

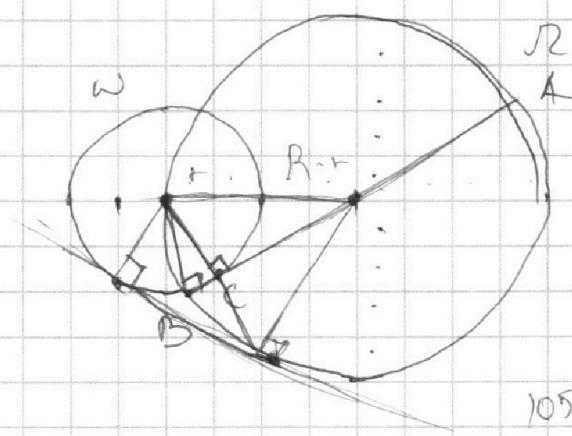
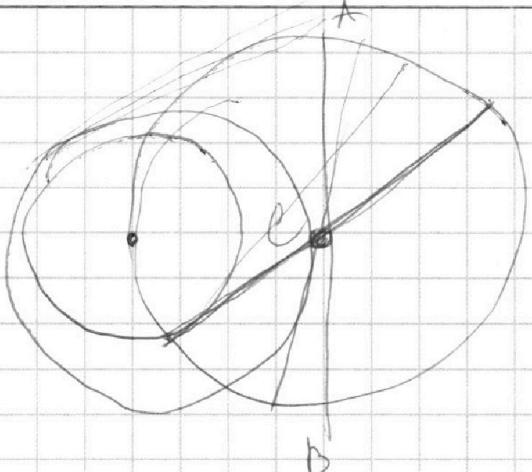
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



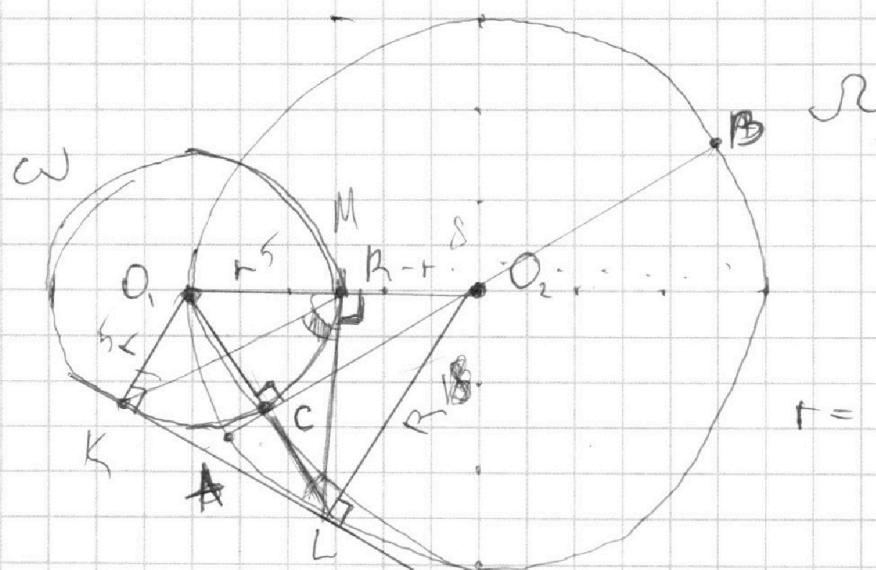
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



105

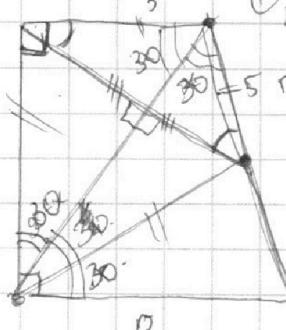


r - радиус ω .
 $R - \sqrt{2}$
 $AC = 1$ $BC = 25$
 $R = 13$.

$$\Delta CO_1O_2. \text{ Из } O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - CO_2^2} = \sqrt{R^2 - (R - AC)^2} =$$

$$\sqrt{169 - 144} = 5. \quad r = 5.$$

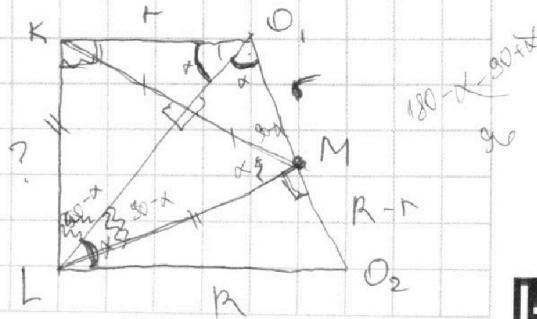
K



L R

$$169 - 64 = \underline{\underline{105}}$$

KL = LM - высота K отр.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} N5. \quad & \begin{aligned} & \begin{array}{l} f = 5x - 3z \\ 5x - y = 3z \end{array} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\begin{aligned} & \begin{array}{l} 25x^2 - y^2 - z^2 \\ y^2 + 3z^2 \end{array} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{5x - 3z} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{1}{5x - 3z} = \frac{15x - 3z}{xz}$$

$$(5x - 3z)(15x - 3z) = xz$$

$$75x^2 - 40xz - 45zx + 9z^2 = xz$$

$$75x^2 - 46xz + 9z^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3

ДЗ 3.

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0.$$

$$\Delta_1 \leq 0$$

$$3x^2 + x + 1 \geq 0.$$

$$\Delta_2 < 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

Замена:

$$3x^2 = c ; -5x + 6 = a ; -6x + 5 = b.$$

$$\sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b. \quad \text{Замена: } c+a=d$$

$$\sqrt{d} - \sqrt{d-b} = b \quad |^2 \quad \text{Возьмем в квадрат.}$$

$$d - 2\sqrt{d(d-b)} + (d-b) = b.$$

$$2(d-b) - 2\sqrt{d(d-b)} = 0 \quad \text{Замена: } d-b=l.$$

$$2l - 2\sqrt{dl} = 0$$

$$2l = 2\sqrt{dl} \quad |^2$$

$$4l^2 = 4dl$$

$$l = d. \quad \Rightarrow d-b=d.$$

$$b=0$$

$$-6x+5=0$$

$$6x=5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{6}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

$$\begin{cases} ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \\ bc = 3^{15} \cdot 7^{17} \\ ac = 3^{23} \cdot 7^{42}. \end{cases}$$

abc EN

abc - ?

$$1) a = \sqrt{\frac{ab \cdot ac}{bc}} = \sqrt{\frac{3^{37} \cdot 7^{55}}{3^{19} \cdot 7^{17}}} = \sqrt{3^{18} \cdot 7^{38}} = 3^9 \cdot 7^{19}$$

$$2) b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{3^9 \cdot 7^{19}} = \frac{ab}{a} = 3^5 \cdot 7^{-6}$$

$$3) c = \frac{ac}{ab} = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}.$$

$$4) abc = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^5 \cdot 7^{-6} = 3^{28} \cdot 7^{36}.$$

Order: $3^{28} \cdot 7^{36}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6

$$\frac{(49-b)b(b+7) - (49-b)b(56-b)}{(2b-49)(56-b)(b+7)} = \frac{6}{10}.$$

$$\frac{b(49-b)(b+7 - 56+b)}{(2b-49)(56-b)(b+7)} = \frac{6}{10}.$$

$$\frac{b(49-b)(2b-49)}{(2b-49)(56-b)(b+7)} = \frac{6}{10}.$$

$$49b - b^2 = 0,6(56b + 392 - b^2 - 7b)$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 06 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$49b - b^2 = 33,6b + 235,2 - 0,6b^2 - 4,2b$$

$$\begin{array}{r} 392 \\ 06 \\ \hline 2352 \end{array}$$

$$0 = 0,4b^2 - 19,6b + 235,2$$

$$0 = 4b^2 - 196b + 2352.$$

$$0 = b^2 - 49 + 581.$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 49 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 581 = 2401 - 2352 = 49$$

$$B_{1,2} = \frac{49 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} B_1 = 28 \\ B_2 = 21 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ 2401 \end{array}$$

$$b=21; x = \frac{ab}{(b-a)} = \frac{(49-b)b}{(b-49+b)} = \frac{(49-b)b}{2b-49} = \frac{(49-21)21}{42-49} = \frac{28}{-7} = -4$$

не год

$$b=28; x = \frac{(49-b)b}{2b-49} = \frac{(49-28)28}{56-49} = \frac{508}{7} = 72 \text{ km}$$

Ответ: 72 km

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

	s	w	t
Вел	x	а км/ч	$\frac{x}{a} \text{ ч}$
Мот	x	в км/ч	$\frac{x}{v} \text{ ч}$
Вел (t+7)	$a \cdot \frac{x}{b}$	а км/ч	$\frac{x}{b} \text{ ч}$
Мот (t+7)	$v \cdot \frac{x}{a}$	в км/ч	$\frac{x}{a} \text{ ч}$
Вел + 7	x	(a+7) км/ч	$\frac{x}{a+7} \text{ ч}$
Мот + 7	x	(v+7) км/ч	$\frac{x}{v+7} \text{ ч}$

$$\left\{ \frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1. \right.$$

$$49 + a \cdot \frac{x}{b} = b \cdot \frac{x}{a} \quad \cancel{\text{---}}$$

$$\left\{ \frac{x}{a+7} = \frac{x}{b+7} + \frac{36}{60} \right.$$

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$$

$$\frac{x(b-a)}{ab} = 1.$$

$$x = \frac{ab}{b-a}.$$

Подставляем x во II равенство:

$$\frac{ab - 49}{(b-a)} + 49 = \frac{ab \cdot b}{(b-a) \cdot a}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b-a} = -49.$$

$$(a-b)(a+b) = 49(a-b)$$

$$a+b = 49.$$

$$a = 49 - b.$$

Подставляем ab в III равенство:

$$\frac{ab}{(b-a)(a+7)} = \frac{ab}{(b-a)(b+7)} + \frac{6}{10}.$$

$$\frac{(49-b)b}{(b-49+b)(49-b+7)} = \frac{(49-b)b}{(b-49+b)(b+7)} + \frac{6}{10}. \quad |$$

$$\frac{(49-b)b}{(2b-49)(56-b)} = \frac{(49-b)b}{(2b-49)(b+7)} + \frac{6}{10}.$$

$$\frac{(49-b)b}{(2b-49)(56-b)} = \frac{(49-b)b}{(2b-49)(b+7)} + \frac{6}{10}.$$



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

Дано:

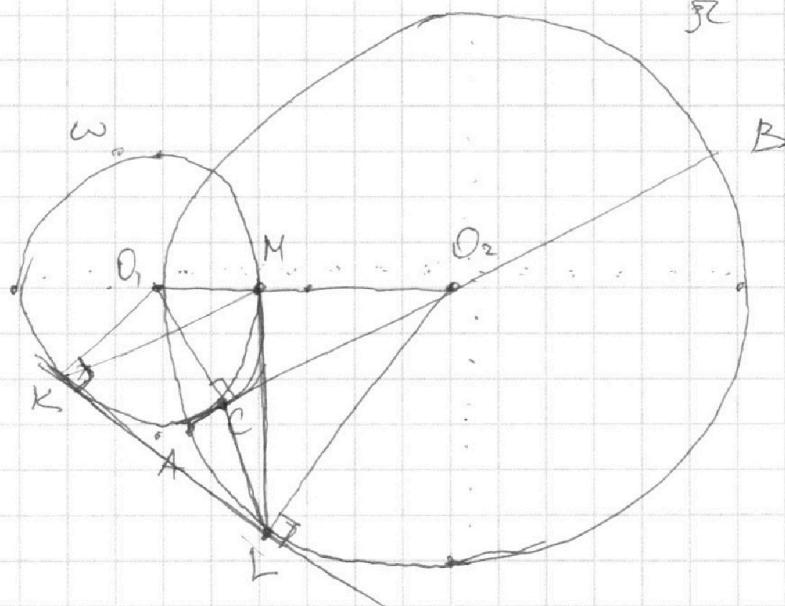
окр ω , окр β

AB - диаметр ω

$AC = 9$

$BC = 25$

KL ?



Решение:

1) Окр β :

AB - диаметр.

$$AB = AC + CB = 1 + 25 = 26$$

$$R - \text{радиус окр. } \beta. R = \frac{D}{2} = \frac{26}{2} = 13.$$

2) Γ - frag. окр. ω .

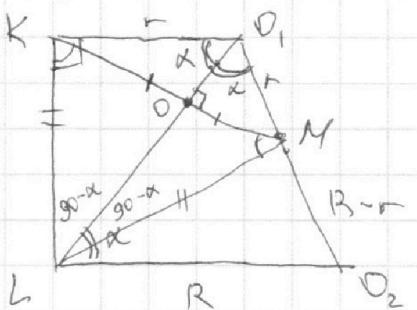
$\triangle CO_1O_2$ h/y, т.к. CB - катет:

$$OC = r, OM = r; MO_2 = R - r, CO_2 = R - AC = 12.$$

$$\text{По т. Пифагора: } O_2C = \sqrt{O_2O_2^2 - O_2C^2} = \\ = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5, \quad r = 5$$

3) KO_1O_2L - Трапеция, тк. $KO_1 \parallel O_2L$, тк.

O_1K и O_2L перпендикульны к другим пр. KL , которые являются коасиальными прям.



Рассм Трап KO_1O_2L отрезок:

$$1. KO_1 = O_1M \Rightarrow r = 5 \Rightarrow \triangle KOM \text{ p/}\delta$$

$$2. KO_1 \parallel O_2L \text{ и сек } O_1L : \angle KO_1L = \angle O_2LO_2 \\ \text{т.к. лежат на симметричных осях}$$

$$3. \angle LK = LM - \text{касант к окр } \omega \text{ и касатель} \\ \text{из } L \text{ точки } \Rightarrow \triangle KLD \sim \triangle NLD \\ \Rightarrow KO = OM.$$

4. ~~KO = OM~~ $\triangle KOM$: $KO = OM$ - иересно, значит и
бисс в Трапеции $\Rightarrow \angle KO_1O_1 = \angle O_1OM = \alpha, LO_2 = \alpha$.

5. $\triangle LKO_1$, h/y: $\angle QKL = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$ но т. о. Σ ушов α .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

☒ 4

6. $\angle KLO = \angle OLM$ ($\triangle KLO \cong \triangle MLO$) $\angle LKO = \angle OLM = 90 - x$.

7. $\triangle LOM$ нут $\angle M = 90 - 90 + x = x$.

8. $\angle O_1NL = \angle O_1MK + \angle OML = 90 - x + x = 90^\circ \Rightarrow$

LM - это высота к O_1O_2 и $\angle LM O_2 = 90^\circ$

9. $LM = \sqrt{LO_2^2 - MO_2^2} = \sqrt{R^2 - (R-r)^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$

10. ТК что доказали, что $\triangle KLO \cong \triangle MKO$

(~~KOKOLO~~, это исходит из равенства $KO \parallel LK$ и ~~OK~~,

$\triangle OML$ где они равны по х-м катетам;

и так как параллель, повернемся к хорде, решим ее
вокруг OM $\Rightarrow \triangle KLO \cong \triangle MKO$ по гипотенузе и катету)

То $LM = KL = \sqrt{105}$

Ответ: $\sqrt{105}$.