



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



\* 1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

\* 3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

\* 4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

f 6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

$\angle BEO = 90^\circ$ ;  $\angle FED = \frac{1}{2} \angle EOF = \frac{90}{2} = 45^\circ$   
Пока менору кас а хордой.

$\Rightarrow \Delta EXF$  р/о, тк углы при основании  
равны  $45^\circ$  и  $\angle EFX = 90^\circ$  по т. о  $\Sigma$  углов  $\Delta$ .  
 $\Rightarrow \Delta EFX$  п/у и опирается на диаметр.

$$a) R = \frac{1}{2} D = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

$\Delta XEF$ ; по т. Пифагора ( $EF = XF$ ).

$$FX = \sqrt{\frac{EX^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{2}} = a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a^2+2ab+b^2)-11ab} =$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-11ab} = \frac{1}{a+b}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)  $ab: 3^{14} \cdot 7^{13}$   
 $bc: 3^{19} \cdot 7^{17}$   
 $ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$

$ab \cdot ac = 3^{33} \cdot 7^{55}$

$a = \sqrt{\frac{ab \cdot ac}{bc}} = \sqrt{\frac{3^{33} \cdot 7^{55}}{3^{19} \cdot 7^{17}}} = \sqrt{3^{14} \cdot 7^{38}} = 3^7 \cdot 7^{19}$

$a = 3^9 \cdot 7^{19}$      $b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^5 \cdot 7^{-6}$

$c = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$

$abc = a \cdot b \cdot c = 3^9 \cdot 7^{19} \cdot 3^5 \cdot 7^{-6} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} = 3^{38} \cdot 7^{36}$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 14 \\ 14 \\ \hline 324 \end{array}$$

2)  $\frac{a}{b} \quad a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \quad a, b \geq 0$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b) - 10ab}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 28 \\ \hline 56 \\ 784 \end{array}$$

$244 = 2\sqrt{61}$

$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$

$(\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}) + \sqrt{3x^2 + x + 1} = 25 - 60x + 36x^2$

$6x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} = 25 - 60x + 36x^2$

DD3:

$3x^2 - 5x + 6 \geq 0$   
 $D = 25 - 3 \cdot 4 \cdot 6 = 50$

$3x^2 + x + 1 \geq 0$   
 $D = 1 - 3 \cdot 4 = -11$

$$\frac{2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)}}{\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)}} = 15\sqrt{2} - 28x + 9$$

$D = 28^2 - 4 \cdot 15 \cdot 9 = 244$

$-5x + 3 = 2$

$x = \frac{28 \pm \sqrt{244}}{2} = 30$

$\sqrt{3x^2 + t + 1} - \sqrt{3x^2 + t + 6x - 5} = t + x$

$6 - 5x$   
 $x + 1 = t$   
 $5 - 6x$

$-5x + 6$   
 $-6x + 5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$x+1=a$~~      ~~$-6x+5=b$~~

~~$\sqrt{3x^2+a+b} - \sqrt{3x^2+a} = b$~~      ~~$| \times 2$~~

~~$3x^2+a+b - 2\sqrt{(3x^2+a+b)(3x^2+a)} + 3x^2+a = b^2$~~

~~$6x^2+2a+b - 2\sqrt{\dots} = b^2$~~

~~$6x^2+2a+b+b^2 = 2\sqrt{(3x^2+a+b)(3x^2+a)}$~~

~~$b = -6x+5$~~

~~$c = 3x^2$   
 $a = b-5x$~~

~~$\sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b$~~

~~$\sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b$~~

$$c+a = d \quad \begin{array}{r} \times 36 \\ 23 \\ \hline 98 \\ 72 \\ \hline 18 \end{array}$$

~~$\sqrt{d} - \sqrt{d-b} = b$~~

~~$d - 2\sqrt{d(d-b)} + dB = b^2$~~

~~$d - 2\sqrt{d^2-db} + dB = b^2$~~

~~$d - 2\sqrt{d^2-L} + L = b^2$~~

~~$2\sqrt{d^2-L} = d+L-b^2$~~      ~~$| \times 2$~~

~~$4(d^2-L) = d^2+L^2+b^4 + 2dL + 2db^2 + 2Lb^2$~~

~~$\sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b \Rightarrow c+a = d$~~

~~$\sqrt{d} - \sqrt{d-b} = b$~~

~~$d - 2\sqrt{d(d-b)} = b$~~

~~$d-b = 2\sqrt{d(d-b)} \Rightarrow d-b=L$~~

~~$L = 2\sqrt{dL}$~~

~~$L^2 = 4dL$~~

~~$L = 4d$~~

~~$\Rightarrow d-b = 4d$~~

~~$\Rightarrow b = 5(c+a)$~~

~~$b = 30+5x$~~

~~$b =$~~

$$\begin{array}{r} 25 \\ 60 \\ \hline 2100 \\ 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$$

~~$-6x+5 = 5(3x^2+6-5x)$~~

~~$-6x+5 = 15x^2+30-25x$~~

~~$15x^2-19x+25=0$~~

~~$D = 19^2 - 4 \cdot 15 \cdot 25$~~

~~$3x^2-5x+6$~~

~~$d-b = 4d$~~

~~$\Rightarrow$~~

~~$c+a-b = 4(c+a)$~~

~~$b = -3d$~~

~~$b = -3(c+a)$~~

~~$-6x+5 = -3(3x^2+6-5x)$~~

~~$-6x+5 = -9x^2-18+15x$~~

~~$9x^2-21x+23=0$~~

~~$D = 21^2 - 4 \cdot 9 \cdot 23 = 36$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{ab}{b-a}$$

$$\frac{x}{a} \cdot b = x + 49$$

$$\frac{x}{a+7} = \frac{x}{b+7} + 96$$

$$\frac{ab}{(b-a)a} \cdot b = \frac{ab}{(b-a)} + 49 \Rightarrow b = 49$$

$$\frac{ab}{(b-a)(a+7)} = \frac{ab}{(b-a)(b+7)} + 0,6$$

$$\frac{ab^2 + 7ab - a^2b - 7ab}{(b-a)(a+7)(b+7)} = 0,6$$

$$\frac{ab(b-a)}{(b-a)(a+7)(b+7)} = 0,6$$

$$\frac{ab}{(a+7)(b+7)} = 96$$

$$ab = 96(ab + 7a + 7b + 49)$$

$$ab = 96ab + 4,2a + 4,2b + 29,4$$

$$-95ab - 4,2a - 4,2b = 29,4$$

$$a(0,4b - 4,2) = 4,2b + 29,4$$

$$a = \frac{4,2b + 29,4}{0,4b - 4,2} = \frac{4,2 \cdot 49 + 29,4}{0,4 \cdot 49 - 4,2} = \frac{235,2 + 29,4}{19,6 - 4,2}$$

$$\begin{array}{r} 2432 \overline{) 154} \\ - 154 \\ \hline 892 \\ - 892 \\ \hline 170 \\ 154 \\ \hline 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 154 \\ 5 \\ \hline 770 \\ + 1540 \\ \hline 2352 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 49 \\ \hline 378 \\ + 196 \\ \hline 2058 \end{array}$$

$$a(19,6 - 4,2) = 20,58 + 29,4$$

$$\begin{array}{r} 2352 \overline{) 154} \\ 154 \\ \hline 812 \\ 770 \\ \hline 420 \\ - 420 \\ \hline 308 \\ 1120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 154 \\ 5 \\ \hline 770 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 28 \\ \hline 168 \\ 42 \\ \hline 588 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



|           | S    | Z   | z               |
|-----------|------|-----|-----------------|
| Вел.      | x    | a   | $\frac{x}{a} z$ |
| Мот.      | x    | b   | $\frac{x}{b} z$ |
| Вел. (км) |      | a   | $\frac{x}{b} z$ |
| Мот. (км) | x+49 | b   | $\frac{x}{a} z$ |
| Вел+Z     | x    | a+z | $\frac{x}{a+z}$ |
| Мот+Z     | x    | b+z | $\frac{x}{b+z}$ |

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$$

$$\frac{x}{a} \cdot b = x + 49$$

$$\frac{x}{b+z} = \frac{x}{b+z} + \frac{36}{80}$$

$\frac{3}{5}$

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1 \Rightarrow \frac{x(b-a)}{ab} = 1 \Rightarrow x(b-a) = ab$$

$$x(b-a) = ab$$

$$x = \frac{ab}{b-a}$$

$$\frac{ab}{(b-a)(a+z)} = \frac{ab}{(b-a)(b+z)} + \frac{3}{5}$$

$$\frac{49a}{(49-a)(a+z)} = \frac{49a}{(49-a)56} + 0,6$$

$$\frac{49a}{(49-a)(a+z)} = \frac{49a}{(49-a)56} + 0,6$$

$$392a - 7a^2 = 49a$$

$$(49a)(a+z) \cdot 0,6$$

$$392a - 7a^2 - 49a = 0,6 \cdot 8 (49-a)(a+z) \cdot 1,2$$

$$7a^2 - 343a = 0,6 \cdot 8 (49-a)(a+z)$$

$$7a(a-49) = 0,6 \cdot 8 (a-49)(a+z)$$

$$7a = 0,6 \cdot 8 (a+z)$$

$$7a = 4,8a + 33,6$$

$$2,2a = 33,6$$

$$\frac{15,4}{4,2} = \frac{240}{49}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

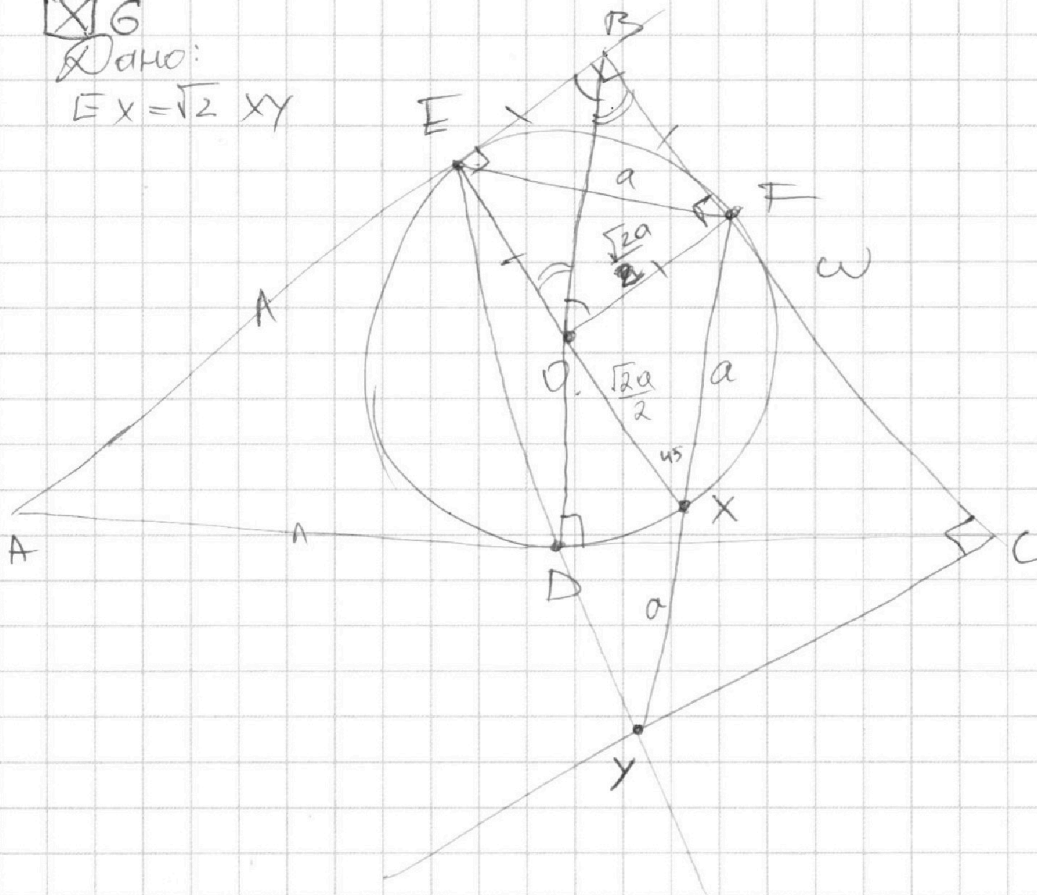
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6

Дано:

$$EX = \sqrt{2} XY$$



Решение:

Пусть  $XY = a$ , тогда  $EX = \sqrt{2} a$

- 1) Окр  $\omega$ : радиус =  $r$ ,  $O$  - центр окр.  
 $OE = OF = r$ .

$\triangle OEB = \triangle OFB$ , т.к. некрестовые углы при  $OF \parallel EB$  (параллельна к диаметру окр) и сек  $BO$  ~~соединяет  $FO$  и  $EO$~~  и  
 также  $FB \perp OE$  и сек  $BO \angle BOE = \angle OFB$ )  $\Rightarrow$   
 $EB = OF \Rightarrow EB = OF = OE \Rightarrow$  равнобедрен.  
 $\triangle BEO$  и  $\triangle OFB$  ~~нб~~  $\Rightarrow \angle EOF = 90^\circ$ .

- 2)  $\angle EXF$  вписан, опирается на  $\angle EOF$   
 $\angle EOF$  - центр  $\angle EXF = \frac{1}{2} \angle EOF = 45^\circ$ .

$\angle BFO = 90^\circ$ .

~~$\angle EFB = \frac{1}{2} \angle EOF$  (угол между хорд и хордой)~~  
 ~~$\angle EFB = 45^\circ \Rightarrow$  б.а.~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x = \frac{ab}{b-a}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$$

$$a \cdot \frac{x}{b} + 49 = \frac{b \cdot x}{a}$$

$$\frac{x}{a+7} = \frac{x}{b+7} + \frac{6}{10}$$

$$a \cdot \frac{ab}{(b-a)a} + 49 = \frac{b \cdot ab}{(b-a)a}$$

$$\frac{ab}{b-a} + 49 = \frac{ab}{b-a}$$

~~49~~

$$\frac{a^2 - b^2}{b-a} = -49$$

$$a^2 - b^2 = -49b + 49a$$

$$(a-b)(a+b) = -49(a-b)$$

$$a+b = 49$$

$$a = 49 - b$$

$$\frac{ab}{(b-a)(49-b+7)} = \frac{ab}{(b-a)(b+7)} + \frac{6}{10}$$

$$(49-b)b$$

$$\frac{(49-b)b}{(b-a)(56-b)} = \frac{(49-b)b}{(b-a)(b+7)} + 0,6$$

$$\frac{(49-b)b}{(b-49+b)/56-b} = \frac{(49-b)b}{(b-49+b)(b+7)} + 0,6$$

$$\frac{(49-b)b}{2(56-b)} = \frac{(49-b)b}{2(b+7)} + 0,6$$

$$\frac{(49-b)(b+7) - (49-b)(56-b)}{(56-b)(b+7)} = 1,2$$

$$(49-b)(b+7-56+b) = 1,2(56-b)(b+7)$$

$$(49-b)(2b-49) = 1,2(56b+56 \cdot 7 - b^2 - 7b)$$

$$98b - 49^2 - 2b^2 + 49b = 67,2b + 470,4 - 1,2b^2 - 8,4b$$

$$147b - 52,2b$$

$$0 = 98b^2 - 88,8b + 3547,4$$

$$0 = 0,2b^2 - 22,2b + 3547,4$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline 1470 \ 150 \\ 52,2 \ 52 \\ \hline 888 \ 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 49 \\ \hline 441 \\ 196 \\ \hline 2401 \\ 676 \\ \hline 3077 \\ 470,4 \\ \hline 3547,4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 56 \\ \hline 72 \\ 60 \\ \hline 672 \\ 392 \\ \hline 12 \\ 784 \\ \hline 392 \\ 470,4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 67,2 \\ 84 \\ \hline 52,2 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

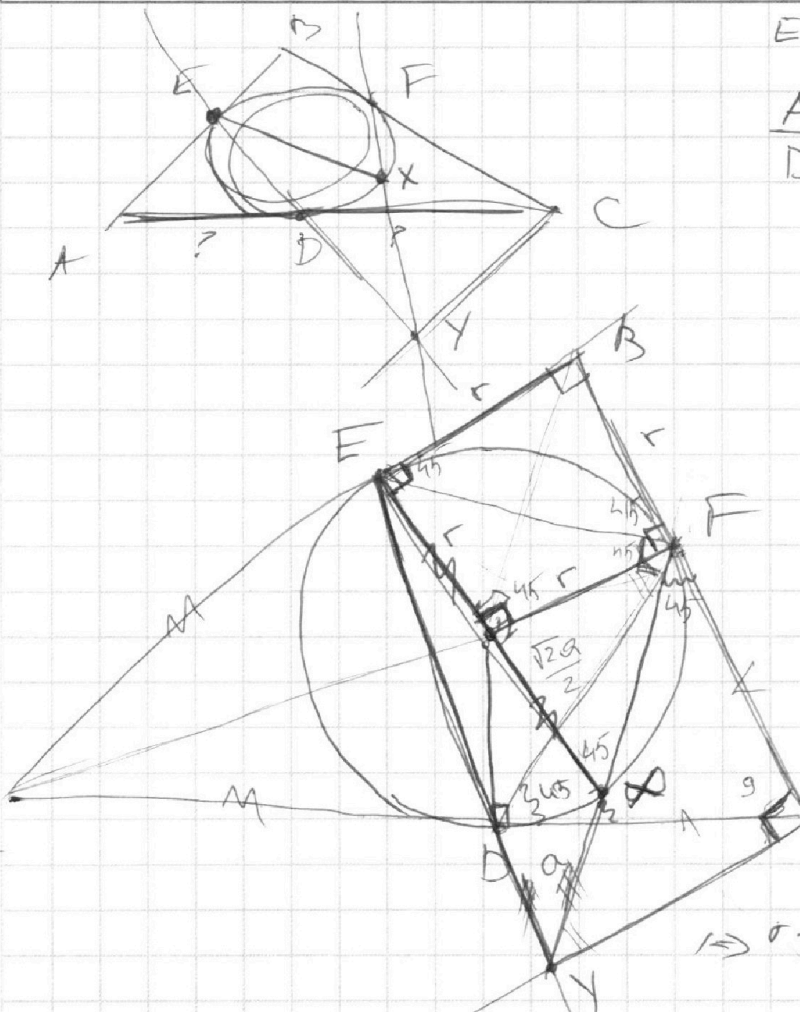
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EX = \sqrt{2} \cdot XY.$$

$$\frac{AD}{DC}.$$



$\angle EXF$  опис. кр.  
 $EF$  не хорда, т.к.  
 не пер.  $\angle EOF = 90^\circ$ .  
 $\angle EXF = \frac{1}{2} 90 = 45$ .

$\triangle XEF$  - н/у, т.к.  
 углы при одном из  
 $45 \Rightarrow \angle F = 90^\circ$  и  
 описывается кр. п.  
 о-тв.

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{2} xy = \frac{\sqrt{2} xy}{2}.$$

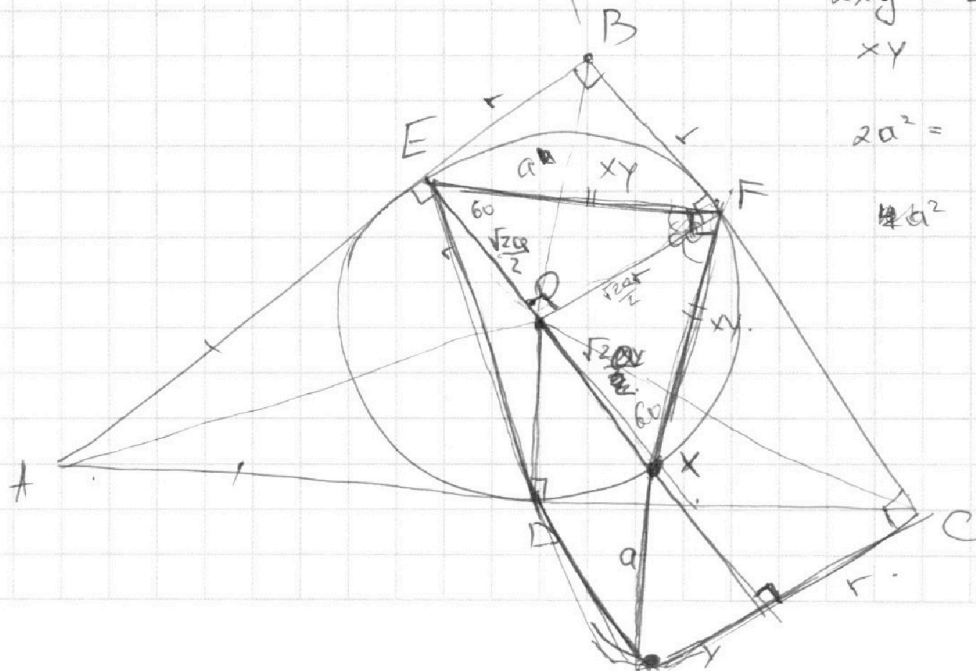
$$2xy^2 = 2a^2$$

$$xy$$

$$2a^2 = 2b^2$$

$$a^2 \cdot \frac{2a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$$

$$a^2$$





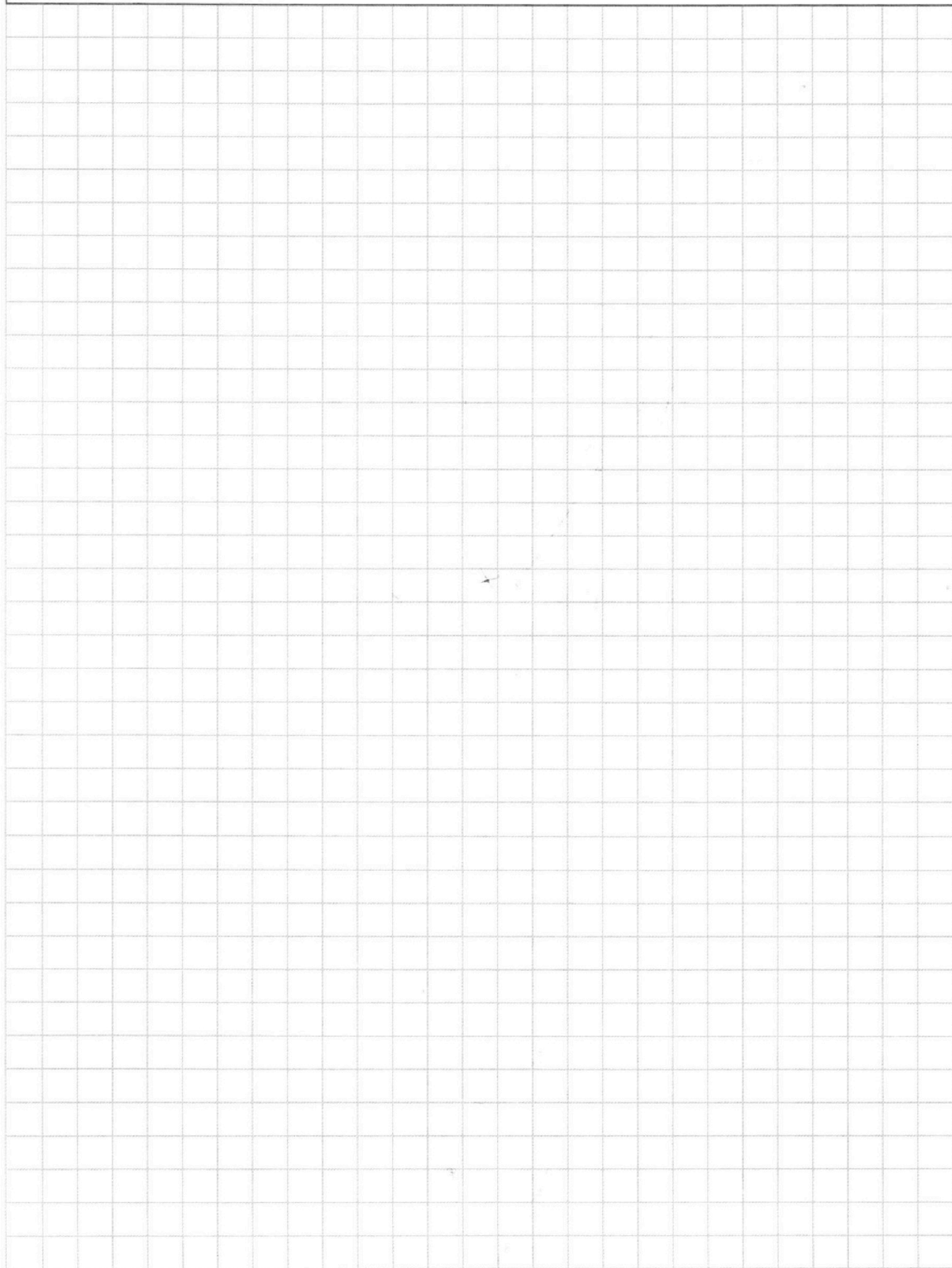
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



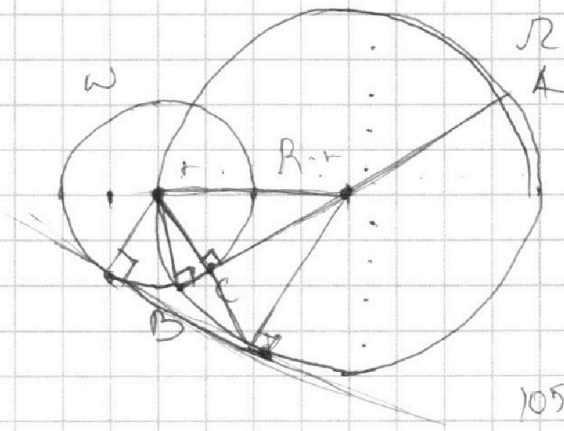
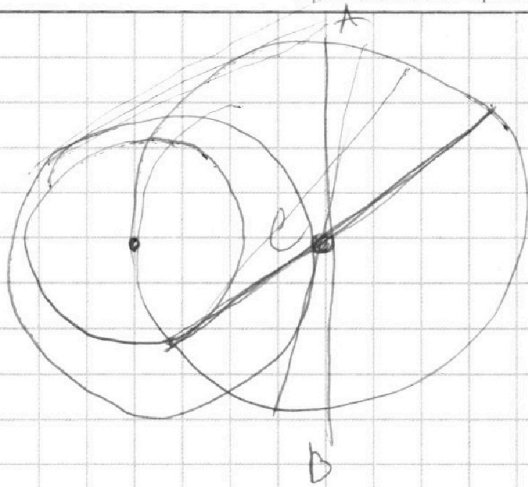
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

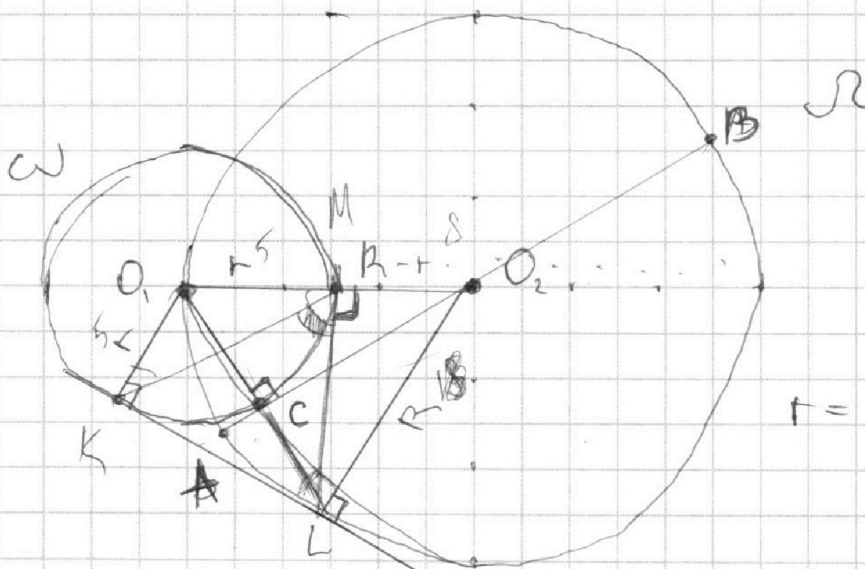
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

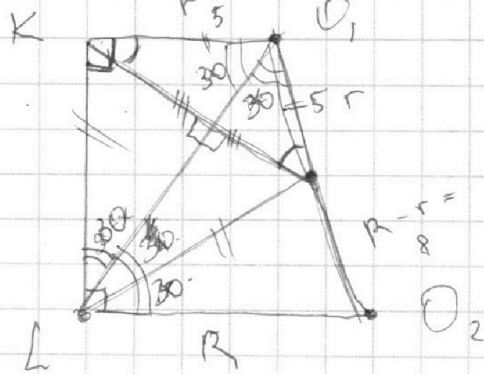


105



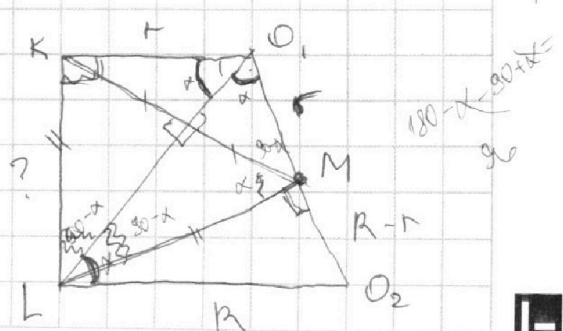
$r = \text{max} \cdot \omega$   
 $R = \Omega$   
 $AC = 1 \quad BC = 25$   
 ~~$R = 13$~~   
 $R = 13$

$AC \perp O_1 O_2$ , н/у:  $O_1 C = \sqrt{O_1 O_2^2 - CO_2^2} = \sqrt{R^2 - (R - AC)^2} =$   
 $\sqrt{169 - 144} = 5$ .     $r = 5$ .



$169 - 64 = \sqrt{105}$

$LL = LM$  - касат. к осп.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.  $y = 5x - 3z$   
 $5x - y = 3z$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{5x - 3z} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{1}{5x - 3z} = \frac{15x - 1z}{xz}$$

$$(5x - 3z)(15x - 1z) = xz$$

$$75x^2 - 40xz - 45zx + 3z^2 = xz$$

$$75x^2 - 86xz + 3z^2 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3

$\Delta \Delta \Delta$ !

$$3x^2 - 5x + 6 \geq 0.$$

$$\Delta_1 \leq 0$$

$$3x^2 + x + 1 \geq 0;$$

$$\Delta_2 < 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

Замена:

$$3x^2 = c; \quad -5x + 6 = a; \quad -6x + 5 = b.$$

$$\sqrt{c+a} - \sqrt{c+a-b} = b.$$

Замена:  $c+a = d$

$$\sqrt{d} - \sqrt{d-b} = b \quad |^2 \quad \text{возведем в квадрат}$$

$$d - 2\sqrt{d(d-b)} + (d-b) = b.$$

$$2(d-b) - 2\sqrt{d(d-b)} = 0$$

Замена:  $d-b = L$ .

$$2L - 2\sqrt{dL} = 0$$

$$2L = 2\sqrt{dL} \quad |^2$$

$$4L^2 = 4dL$$

$$L = d.$$

$$1 \Rightarrow d-b = d.$$

$$b = 0$$

$$-6x + 5 = 0.$$

$$6x = 5.$$

$$x = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{6}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

$$\begin{cases} ab = 3^{14} \cdot 7^{13} \\ bc = 3^{19} \cdot 7^{17} \\ ac = 3^{23} \cdot 7^{42} \end{cases}$$

$abc = ?$

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$1) a = \sqrt{\frac{ab \cdot ac}{bc}} = \sqrt{\frac{3^{37} \cdot 7^{55}}{3^{19} \cdot 7^{17}}} = \sqrt{3^{18} \cdot 7^{38}} = 3^9 \cdot 7^{19}$$

$$2) b = \frac{3^{14} \cdot 7^{13}}{3^9 \cdot 7^{19}} = \frac{ab}{a} = 3^5 \cdot 7^{-6}$$

$$3) c = \frac{ac}{a} = \frac{3^{23} \cdot 7^{42}}{3^9 \cdot 7^{19}} = 3^{14} \cdot 7^{23}$$

$$4) abc = 3^{14} \cdot 7^{13} \cdot 3^5 \cdot 7^{-6} \cdot 3^{14} \cdot 7^{23} = 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Ответ:  $3^{28} \cdot 7^{36}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6

$$\frac{(49-b)v(b+7) - (49-b)v(56-b)}{(2b-49)(56-b)(b+7)} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{v(49-b)(b+7 - 56+b)}{(2b-49)(56-b)(b+7)} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{v(49-b)(2b-49)}{(2b-49)(56-b)(b+7)} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{v(49-b)}{(56-b)(b+7)}$$

$$49v - b^2 = 0,6(56b + 392 - b^2 - 7b)$$

$$49v - b^2 = 33,6b + 235,2 - 0,6b^2 - 4,2b$$

$$0 = 0,4b^2 - 19,6b + 235,2$$

$$0 = 4b^2 - 196b + 2352$$

$$0 = b^2 - 49b + 588$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 588 = 2401 - 2352 = 49$$

$$b_{1,2} = \frac{49 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} b_1 = 28 \\ b_2 = 21 \end{cases}$$

$$b=21; x = \frac{av}{(b-a)} = \frac{(49-b)v}{(b-49+b)} = \frac{(49-b)v}{2b-49} = \frac{(49-21)21}{42-49} < 0$$

$$b=28; x = \frac{(49-b)v}{2b-49} = \frac{(49-28)28}{56-49} = \frac{588}{7} = 84 \text{ км}$$

Ответ: 84 км



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6.

|           | S                     | W          | t                 |
|-----------|-----------------------|------------|-------------------|
| Вел       | x                     | a км/ч     | $\frac{x}{a}$ ч   |
| Мот       | x                     | b км/ч     | $\frac{x}{b}$ ч   |
| Мот (t м) | $a \cdot \frac{x}{b}$ | a км/ч     | $\frac{x}{b}$ ч   |
| Мот (t в) | $b \cdot \frac{x}{a}$ | b км/ч     | $\frac{x}{a}$ ч   |
| Вел + t   | x                     | (a+t) км/ч | $\frac{x}{a+t}$ ч |
| Мот + t   | x                     | (b+t) км/ч | $\frac{x}{b+t}$ ч |

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1.$$

$$49 + a \cdot \frac{x}{b} = b \cdot \frac{x}{a} \neq 49$$

$$\frac{x}{a+t} = \frac{x}{b+t} + \frac{36}{b}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{b} + 1$$

$$\frac{x(b-a)}{ab} = 1$$

$$x = \frac{ab}{b-a}$$

Подставим x во II равенство:

$$\frac{ab - a}{(b-a)a} + 49 = \frac{ab \cdot b}{(b-a)a}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b-a} = -49.$$

$$(a-b)(a+b) = 49(a-b)$$

$$a+b = 49.$$

$$a = 49 - b.$$

Подставим a, x в III равенство:

$$\frac{ab}{(b-a)(a+t)} = \frac{ab}{(b-a)(b+t)} + \frac{6}{10}.$$

$$\frac{(49-b)b}{(b-49+b)(49-b+t)} = \frac{(49-b)b}{(b-49+b)(b+t)} + \frac{6}{10}.$$

$$\frac{(49-b)b}{(2b-49)(56-b)} = \frac{(49-b)b}{(2b-49)(b+t)} + \frac{6}{10}.$$

1     2     3     4     5     6     7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4

Доно:

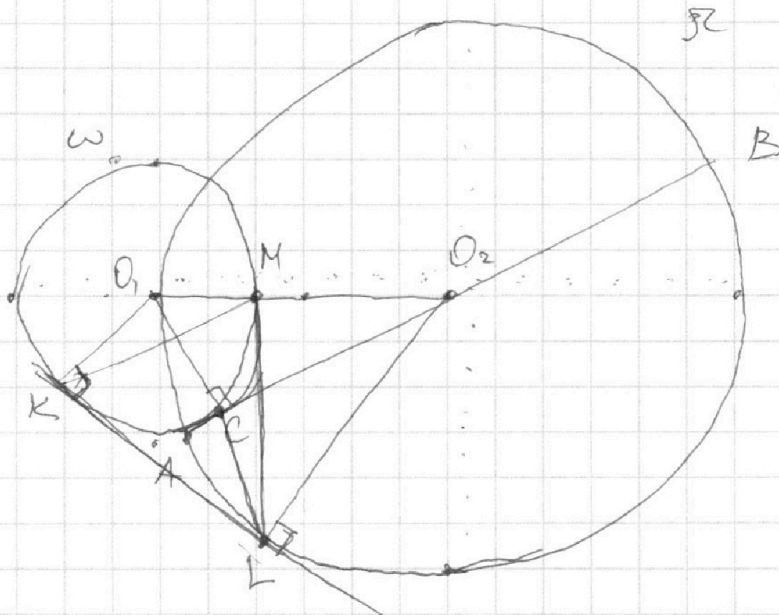
окр  $\omega$ , окр  $\mathcal{R}$

$AB$  -diam. =  $D$

$AC = 1$

$BC = 25$

$KL = ?$



Решение:

1) Окр  $\mathcal{R}$ :

$AB$  -diam.

$AB = AC + CB = 1 + 25 = 26$

$R$  - радиус окр.  $\mathcal{R}$ .  $R = \frac{D}{2} = \frac{26}{2} = 13$ .

2)  $\Gamma$  - рад. окр.  $\omega$ .

$\Delta CO_1O_2$  н/у, т.к.  $CB$  -кас:

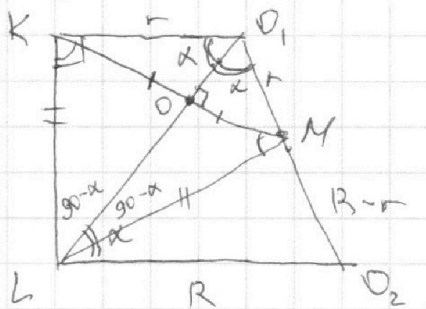
$O_1C = \Gamma$ ,  $OM = \Gamma$ ;  $MO_2 = R - \Gamma$ ;  $CO_2 = R - AC = 12$ .

По т. Пифагора:  $O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2C^2} =$

$= \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ ,  $\Gamma = 5$

3)  $KO_1O_2L$  - Трапеция, т.к.  $KO_1 \parallel O_2L$ , т.к.

$O_1K$  и  $O_2L$  перпендикулярны к общей пр.  $KL$ , кото-  
рая является касательной общей.



Рассм Трап  $KO_1O_2L$  отрезком:

- $KO_1 = O_1M \Rightarrow \Gamma = 5 \Rightarrow \Delta KO_1M$  р/б
- $KO_1 \parallel O_2L$  и сек  $O_1L$ :  $\angle KO_1L = \angle O_1LO_2$   
т.к. накрест-лежащие
- $LK = LM$  - касат к окр  $\omega$  и проведет.  
из  $L$  точки  $\Rightarrow \Delta KLO = \Delta MLO$   
 $\Rightarrow KO = OM$ .

4.  ~~$KOM$~~   $\Delta KO_1M$ :  $KO = OM$  - меридиан, значит и  
бисс и высота  $\Rightarrow \angle KO_1O = \angle O_1OM = \alpha$ ,  $\angle O_2L = \alpha$ .

5.  $\Delta LKO$ , н/у:  $\angle OKL = 90 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$  по т. о  $\Sigma$  углов  $\Delta$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

6.  $\angle KLO = \angle OLM$  ( $\triangle KLO = \triangle MLO$ )  ~~$\angle KLO = \angle OLM = 90 - x$~~

7.  $\triangle LOM$  ~~пря~~  $\angle M = 90 - 90 + x = x$

8.  $\angle O, NL = \angle O, MK + \angle OML = 90 - x + x = 90^\circ \Rightarrow$

$LM$  - это высота к  $OO_2$  и  $\angle LMO_2 = 90^\circ$

9.  $LM = \sqrt{LO_2^2 - MO_2^2} = \sqrt{R^2 - (R-t)^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105}$

10. Т.к. мы доказали, что  $\triangle KLO = \triangle MKO$

(~~РРРРР~~) это следует из равенства  $\angle O, KL$  и ~~Р~~

$\angle O, ML$  где они равны по двум катетам;

и также радиус, проведенный к хорде, делит ее

пополам  $\Rightarrow \triangle KLO = \triangle MKO$  по гипотенузе и катету)

То  $LM = KL = \sqrt{105}$

Ответ:  $\sqrt{105}$ .