



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



9 КЛАСС. Вариант 14

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже мотоциклиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$ab ; 3^{14} \cdot 7^{13}$$

N1

$$bc ; 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$\Rightarrow abcabc ; (3^{14+19+23} \cdot 7^{13+17+42})$$

$$ac ; 3^{23} \cdot 7^{42}$$

$$(abc)^2 ; 3^{56} \cdot 7^{72} \Rightarrow abc ; 3^{28} \cdot 7^{36} \Rightarrow$$

\Rightarrow степень вхождения 3 в abc хотела бы 28, а степень
вхождения 7 хотела бы 42 ($ac ; 7^{42}$, а $abc / ac \Rightarrow$
 $\Rightarrow abc ; 7^{42}) \Rightarrow abc ; 3^{28} \cdot 7^{42} \Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 7^{42}$.
($abc \neq 0$, т.к. a, b, c - натуральн.)

Покажем, что abc может быть равно $3^{28} \cdot 7^{42}$.

$$\text{при } a = 7^{13} \cdot 3^9$$

$$b = 3^5$$

$$c = 7^{29} \cdot 3^{14}$$

$$ab = 7^{13} \cdot 3^{14} ; 7^{13} \cdot 3^{14}$$

$$bc = 7^{29} \cdot 3^{19} ; 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac = 7^{42} \cdot 3^{23} ; 7^{42} \cdot 3^{23}$$

$$abc = 3^{9+5+14} \cdot 7^{13+29} = 3^{28} \cdot 7^{42} \Rightarrow \text{этот чин и он дост.}$$

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Nr.

$$\frac{a}{b} - \text{несократима} \Rightarrow \text{HOD}(a, b) = 1.$$

Заметим, что m - это наибольший возможный
 $\text{HOD}(a+b, a^2 - 9ab + b^2)$

$$(a^2 - 9ab + b^2 \neq 0)$$

$$\text{HOD}(a+b, a^2 - 9ab + b^2) \leq \text{HOD}((a+b)^2, a^2 - 9ab + b^2) =$$

все прежние чл.
остались в 2 раза \Rightarrow
 $\Rightarrow \text{HOD}$ не уменьшился

$$\text{HOD}((a+b)^2, a^2 - 9ab + b^2) = \text{HOD}(a^2 + 2ab + b^2, a^2 - 9ab + b^2) =$$
$$= \text{HOD}((a+b)^2, 11ab)$$

(по алгоритму Евклида)

Посмотрим какой-нибудь член простой множитель p , такой, что $a \nmid p$, тогда $b \nmid p$ ($\text{HOD}(a, b) = 1$) \Rightarrow
 $\Rightarrow (a+b) \nmid p \Rightarrow (a+b)^2 \nmid p$. Это верно для всех пр.
множителей $\Rightarrow \text{HOD}(a, (a+b)^2) = 1$. А-но $\text{HOD}(b, (a+b)^2) = 1$
 $\Rightarrow \text{HOD}((a+b)^2, ab) = 1$, тогда $\text{HOD}((a+b)^2, 11ab) \leq 11$
(1 или 11) \Rightarrow это макс. $m = 11$, такое возможно:

$$\begin{aligned} a &= 5 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{5+6}{25 - 9 \cdot 5 \cdot 6 + 36} = \frac{11}{-209} = \frac{1}{-19}$$

Ответ: $\max m = 11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

Пусть $a = 3x^2 + x + 1$, а $b = 5 - 6x$, тогда:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} = b \quad | \quad 3x^2 + x + 1 + 5 - 6x = 3x^2 - 5x + 6$$

Возведём обе части в квадрат (при этом мы не потеряем корней, но возможно появятся лишние, поэтому в конце обе проверим корни).

$$a+b - 2\sqrt{a^2+ab} + a = b^2.$$

$$-2\sqrt{a^2+ab} = b^2 - 2a - b.$$

4) Возведём обе части в квадрат.

$$4a^2 + 4ab = b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 + 4ab - 2b^3.$$

$$b^4 + b^2 - 4ab^2 - 2b^3 = 0.$$

$$b^2(b^2 + 1 - 4a - 2b) = 0$$

1) $b=0$, т.е. $5-6x=0$, т.е. $x = \frac{5}{6}$.

$$(нрсл. \sqrt{3 \cdot (\frac{5}{6})^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot (\frac{5}{6})^2 + \frac{5}{6} + 1} = \sqrt{\frac{75 - 150 + 216}{36}} - \sqrt{\frac{75 + 30 + 36}{36}} = \\ = \sqrt{\frac{141}{36}} - \sqrt{\frac{141}{36}} = 0, \text{ и } 5 - 6 \cdot \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow \text{подходит}.)$$

2) $b^2 - 2b - 4a + 1 = 0$ (подставив вместо a, b их выраж.,
сократив обратную замену).

$$(5-6x)^2 - 2 \cdot (5-6x) - 4(3x^2 + x + 1) + 1 = 0.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{25 + 36x^2 - 60x - 10 + 12x - 12x^2 - 4x - 4 + 1 = 0}{\sim \sim \sim \sim \sim \sim} = 0$$

$$24x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$18 \cdot 6x^2 - 13x + 1 \stackrel{3}{=} 0$$

$$D = 169 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 169 - 72 = 97$$

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{97}}{12} = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}$$

$$x_2 = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$

Проверь эти корни

$$1) X^2 = \left(\frac{13 + \sqrt{97}}{12} \right)^2 = \frac{169 + 97 + 26\sqrt{97}}{144} = \frac{266 + 26\sqrt{97}}{144} =$$

$$= \frac{133 + 13\sqrt{97}}{72}$$

$$3x^2 - 5x + 6 = 3 \cdot \frac{133 + 13\sqrt{97}}{72} - \frac{5(13 + \sqrt{97})}{12} + 6 =$$

$$= \frac{133 + 13\sqrt{97} - 2 \cdot 5 \cdot 13 - 10\sqrt{97}}{24} + 144 = \frac{147 + 3\sqrt{97}}{24} = \frac{49 + \sqrt{97}}{8} =$$

$$= \frac{97 + 1 + 2\sqrt{97}}{16} = \frac{(1 + \sqrt{97})^2}{4^2} = \left(\frac{1 + \sqrt{97}}{4} \right)^2$$

$$3x^2 + x + 1 = 3x^2 - 5x + 6 - (5 + 6x) = \frac{49 + \sqrt{97}}{8} - \frac{40}{8} + \frac{6(13 + \sqrt{97})}{12} =$$

$$= \frac{49 + \sqrt{97} - 40 + 52 + 4\sqrt{97}}{8} = \frac{61 + 5\sqrt{97}}{8} = \frac{97 + 25 + 2 \cdot 5\sqrt{97}}{16} = \left(\frac{5 + \sqrt{97}}{4} \right)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = \frac{1 + \sqrt{97}}{4} - \frac{5 + \sqrt{97}}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \neq 5 - 6 \cdot \frac{13 + \sqrt{97}}{12}$$

\Rightarrow Этот корень не подходит.

$$2) X^2 = \left(\frac{13 + \sqrt{97}}{12} \right)^2 = \frac{133 + 13\sqrt{97}}{72}$$

$$3x^2 - 5x + 6 = 3 \cdot \frac{133 + 13\sqrt{97}}{72} - \frac{5(13 + \sqrt{97})}{12} + 6 = \frac{133 + 1}{12}$$

$$= \frac{133 + 13\sqrt{97} - 2 \cdot 5 \cdot 13 + 10\sqrt{97} + 144}{24} = \frac{147 - 3\sqrt{97}}{24} = \frac{97 + 1 - 2\sqrt{97}}{16} =$$

$$= \left(\frac{1 - \sqrt{97}}{4} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{97} - 1}{4} \right)^2$$

$$3x^2 + x + 1 = 3x^2 - 5x + 6 - (5 - 6x) = \frac{49 - \sqrt{97}}{8} - \frac{40}{8} + \frac{6(13 - \sqrt{97})}{12} =$$

$$= \frac{49 - \sqrt{97} - 40 + 52 - 4\sqrt{97}}{8} = \frac{61 - 5\sqrt{97}}{8} = \frac{122 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{97}}{8} =$$

$$= \frac{25 + 97 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{97}}{16} = \left(\frac{\sqrt{97} - 5}{16} \right)^2$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = \frac{\sqrt{97} - 1}{4} - \frac{\sqrt{97} - 5}{4} = \frac{-1 + 5}{4} = 1$$

$5 - 6 \cdot \frac{5 - \sqrt{97}}{12} \neq 1 \Rightarrow \emptyset$ не подходит.

Ответ: $x = \frac{5}{6}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

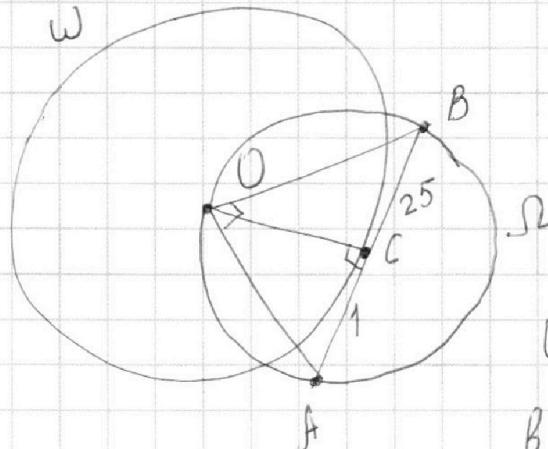
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O \rightarrow \omega$ $OC \perp AB$ (радиус
в т. касания).

$\angle BOA = 90^\circ$ (отсекается
на диаметр)

$OC^2 = AC \cdot BC$ (по с.в. Весомог

в т/у Δ)

$$OC = \sqrt{AC \cdot BC} \Rightarrow OC = \sqrt{1 \cdot 25} = 5 \Rightarrow$$

\Rightarrow радиус ω 5, а L $\frac{25+1}{2} = 13$ (половина ди-
аметра)

O, O', T - на одной пр.

O' - ц. Γ , T , т. пересег.

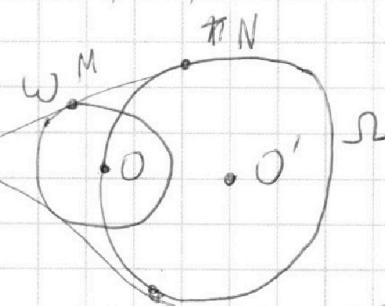
общих касан.

$\triangle O'NT \sim \triangle OMT$ (один угл. 90° ,
гр. общий)

(N, M , - т. касания, см. рис.)

$$\frac{O'N}{OM} = \frac{NT}{MT} = \frac{O'T}{OT}$$

~~$$\frac{5}{13} = \frac{O'T}{O'T + Q'O}$$~~



$$\frac{O'N}{OM} = \frac{NT}{MT} = \frac{O'T}{OT} \Rightarrow \frac{13}{5} = \frac{OT + 13}{OT} \Rightarrow \frac{13}{5} = 1 + \frac{13}{OT}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{8}{5} = \frac{13}{OT} \Rightarrow OT = \frac{65}{8} \cdot \left\{ \begin{array}{l} OM = 5 \\ TM^2 = \left(\frac{65}{8}\right)^2 + 5^2 \end{array} \right. \text{(но м. Пирог)}$$

$$TM^2 = 5^2 \left(\frac{13}{8}^2 + 1 \right) = 5^2 \left(\frac{169+64}{64} \right) = \frac{5^2}{8^2} \cdot 233.$$

$$TM = \frac{5}{8} \sqrt{233}$$

$$\frac{O'N}{OM} = \underline{\underline{\quad}}$$

$$\frac{O'N}{OM} = \frac{NT}{MT} = \underline{\underline{\quad}}$$

$$\frac{8}{5} = \frac{13}{OT} \Rightarrow OT = \frac{65}{8} \cdot \left\{ \begin{array}{l} OM = 5 \\ TM^2 = \left(\frac{65}{8}\right)^2 + 5^2 \end{array} \right. \text{(но м. Пирог)}$$

$$TM = \frac{5}{8} \sqrt{233}$$

$$\frac{O'N}{OM} = \frac{NT}{MT} \Rightarrow \frac{13}{5} = \frac{NT}{\frac{5}{8} \sqrt{233}} \Rightarrow NT = \frac{13}{8} \sqrt{233}$$

$$MN = NT - TM = \frac{13}{8} \sqrt{233} - \frac{5}{8} \sqrt{233} = \frac{8}{8} \sqrt{233} = \sqrt{233}.$$

$$\text{Объем: } \sqrt{233}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

$$5x - y = 3z$$

$$y = 5x - 3z.$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad (x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0).$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$8(5x - 3z)z + xz = 15x(5x - 3z)$$

$$40xz - 24z^2 + xz = 15x^2 - 45xz$$

$$75x^2 + 24z^2 - 86xz = 0 \quad (\text{отм-юю } x)$$

$$D = (86z)^2 - 75 \cdot 4 \cdot 24z^2 = 7396z^2 - 7200z^2 = 196z^2 = (14z)^2$$

$$\begin{array}{r} 86 \\ \times 86 \\ \hline 516 \\ 688 \\ \hline 7396 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{86z + 14z}{2 \cdot 75} = \frac{100}{150} z = \frac{2}{3} z$$

$$x_2 = \frac{86z - 14z}{2 \cdot 75} = \frac{72}{150} z = \frac{12}{25} z$$

$$1) x = \frac{2}{3} z$$

$$y = 5 \cdot \frac{2}{3} z - 3z = \frac{10 - 9}{3} z = \frac{1}{3} z$$

$$\text{Понада наша другоб} \quad \frac{25 \cdot \left(\frac{2}{3} z\right)^2 - \left(\frac{1}{3} z\right)^2 - z^2}{\left(\frac{1}{3} z\right)^2 + 3z^2} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{100z^2 - z^2 - 9z^2}{z^2 + 27z^2} = \frac{90z^2}{28z^2} = \frac{45}{14} = 3 \frac{3}{14}$$

$(z \neq 0)$

2) $x = \frac{12}{25}z$

$$y = 5 \cdot \frac{12}{25}z - 3z = -\frac{3}{5}z$$

Понгда наша дробь $\frac{\frac{25 \cdot (\frac{12}{25}z)^2 - (-\frac{3}{5}z)^2}{(-\frac{3}{5}z)^2 + 3z^2}}{z^2} =$

$$= \frac{12z^2 - 9z^2 - 25z^2}{+9z^2 + 3z^2} = \frac{-22z^2}{12z^2} = -\frac{11}{6}$$

$(z \neq 0)$

Нашенчшее знач. $-\frac{11}{6}$

Отвем: $-\frac{11}{6} \quad (-1\frac{5}{6})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

Пусть скорость пешехода x км/ч, а велосипедиста y км/ч, а расстояние между пунктами S км, тогда:

$$\begin{cases} \frac{S}{x} - \frac{S}{y} = 1 & (x \neq 0, y \neq 0, \\ & x+y \neq 0, y+x \neq 0) \\ \cancel{y} \cancel{x} \frac{S}{\cancel{x}} - y \cdot \frac{S}{\cancel{y}} = 49 & \\ \frac{S}{x+y} - \frac{S}{y+x} = \frac{3}{5} & (36 \text{ мин} = \frac{3}{5} \text{ ч}) \end{cases}$$

$$Sy - Sx$$

$$Sx - Sy = xy$$

$$x^2 S - y^2 S = 49xy \quad (\text{разд. одно на } gp)$$

$$\frac{S(x-y)}{S(x^2-y^2)} = \frac{1}{49} \quad S=0, x \neq y \text{ (т.к. приезд в разное время)}$$

$$\frac{S(x-y)}{S(x-y)(x+y)} = \frac{1}{49}$$

$$x+y = 49 \Rightarrow Sx - S(49-x) = x(49-x)$$

$$Sx - 49S + Sx = 49x - x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} = \frac{1}{S} \Rightarrow y \cancel{\frac{x-y-14}{xy}} = \frac{1}{S} \Rightarrow S = \frac{xy}{y-x-y} \\ \frac{1}{y+7} - \frac{1}{x+7} = \frac{3}{5S} \Rightarrow \frac{y+7-x-7}{(x+7)(y+7)} = \frac{3}{5S} \Rightarrow S = \frac{3}{5} \frac{(x+7)(y+7)}{xy} \end{array} \right. \quad \rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{y-x-y} = \frac{3}{5} \frac{(x+7)(y+7)}{xy} \quad (x \neq y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5xy = 3xy + 21x + 21y + 147 \\ y = 49 - x \end{array} \right.$$

$$5x^2 - 2x(49-x) = 21x + 21 \cdot 49 - 21x + 147$$

$$2x(49-x) = 24 \cdot 49$$

$$49x^2 - x^2 = 12 \cdot 49$$

$$x^2 - 49x + 588 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 49 = 49(49-48) = 49$$

$$x_1 = \frac{49-7}{2} = 21, \text{ тогда } y = 28 > x \Rightarrow \emptyset$$

$$x_2 = \frac{49+7}{2} = 28 \quad (\text{кц/ч}) \Rightarrow y = 21 \quad (\text{кц/ч})$$

$$\frac{S}{21} - \frac{S}{28} = 1 \Rightarrow S = \frac{21 \cdot 28}{28-21} = \frac{21 \cdot 28}{7} = \frac{21 \cdot 4}{1} = 84 \quad (\text{кц})$$

Ответ: 84 кц

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + 2Sx - 49S - 49x = 0 \\ \frac{S}{x+7} - \frac{S}{(49-x)+7} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Черновик.

$$\begin{cases} x^2 + 2Sx - 49S - 49x = 0 \\ \frac{S}{x+7} - \frac{S}{56-x} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2Sx - 49S - 49x = 0 \\ S(56-x) - S(x+7) = \frac{3}{5}(x+7)(56-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 56S - Sx - Sx + 7S = \frac{3}{5}(56x - x^2 + 392 - 7x) \\ x^2 + 2Sx - 49S - 49x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 63S - 2Sx = \frac{3}{5}(-x^2 + 49x + 392) \\ x^2 + 2Sx - 49S - 49x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 315S - 10Sx = -3x^2 + 147x + 1176 \\ x^2 + 2Sx - 49S - 49x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 2Sx + 49S + 49x \\ 315S - 10Sx = -6Sx - 147S - 147x + 147x + 1176 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 462S - 4Sx - 1176 = 0 \\ x^2 = 2Sx + 49S + 49x \end{cases}$$

$$231S - 2Sx - 588 = 0 \Rightarrow Sx = \frac{231}{2}S - 294.$$



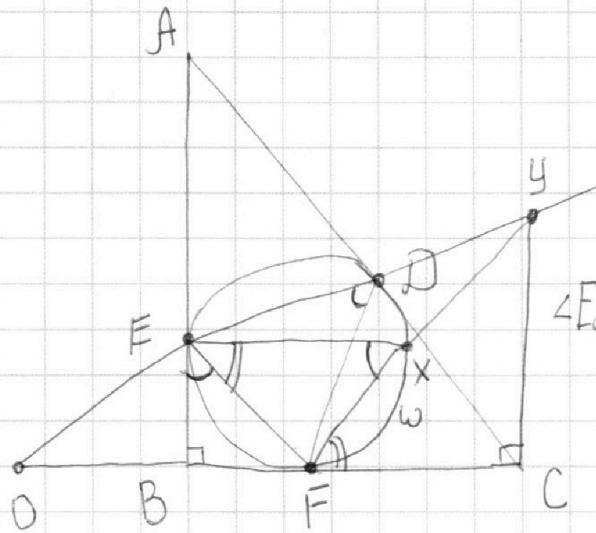
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$YE \cap BC = 0.$$

$$\frac{AD}{DC} = ?$$

$\angle EDF = \angle BEF = \angle EXF$ (п.к. угл. между
хордой и касательной равен
углу, опирающемся на эту х.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$X = \frac{\frac{231}{2}S - 294}{S} = \frac{231S - 588}{2S} = \frac{231}{2} - \frac{294}{S}$$

$$\left(\frac{231S - 588}{2S}\right)^2 = 2S \cdot \frac{231S - 588}{2S} + 49S + 49 \cdot \frac{231S - 588}{2S} - 588 \geq 0$$

$$(231S - 588)^2 = 4S^2(231S - 588) + 196S^3 + 49 \cdot 2S^2$$

$$\cdot (231S - 588) \quad (\cancel{:2}) \quad (:49)$$

$$(231S - 588)^2 = S(924S^3 - 2352S^2 + 196S^3 + 22638S^2 -$$

$$+ (33S - 84)^2 = \cancel{4S^2(231S - 588)} - \frac{4S^2(33S - 84)}{7} + 4S^3 +$$

$$+ 2S(231S - 588)$$

$$\cancel{+ (33S - 84)^2} = 4S^2(33S - 84) + 28S^3 + \cancel{14S^2(33S - 84)}^{98}$$

$$\cancel{(33S - 84)^2} = 132S^3 - 336S^2 + 28S^3 + 98/3$$

$$(33S - 84)(\cancel{(33S - 84)} - 4S^2 - 98) = 28S^3$$

$$x+y=49$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{S} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x+7} - \frac{1}{y+7} = \frac{3}{5S} \end{array} \right.$$

(п одно на 9р.)

$$S = \frac{53}{35} \cdot \frac{(x+7)(y+7)}{x-y}$$

$$\frac{x-y}{xy} = \frac{1}{S} \Rightarrow S = \frac{xy}{x-y} \quad 5xy = 3xy$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 3z - 5x$$

$$y = 5x - 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$y^2 = 25x^2 + 9z^2 - 30xz$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ - 39 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$8(3z - 5x)z + xz = 15x(3z - 5x)$$

$$24z^2 - 40xz + xz = 45xz - 75x^2 \quad x_1 =$$

$$24z^2 - 84xz + 75x^2 = 0$$

$$8z^2 - 28xz + 25x^2 = 0$$

$$D = (28^2 - 4 \cdot 8 \cdot 25) = 28^2 - 800 \quad \begin{array}{r} 3 \\ 80 \\ \times 86 \\ \hline 516 \\ 688 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$8(5x - 3z)z + xz = 15x(5x - 3z)$$

$$24z^2 - 40xz - 24z^2 + xz = 75x^2 - 45xz$$

$$75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0$$

$$25x^2 - 25x^2 - 9z^2 + 30xz - z^2 = \frac{30xz - 10z^2}{4z^2 + 3z^2}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 96 \\ \hline 450 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \\ \hline 78200 \end{array}$$

$$D = 196z^2$$

$$x_1 = \frac{86z + 14z}{2 \cdot 75} = \frac{90z}{150} = \frac{3}{5}z$$

$$x_2 = \frac{86z - 14z}{2 \cdot 75} = \frac{72z}{150} = \frac{12}{25}z$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = \frac{3}{5}z$$

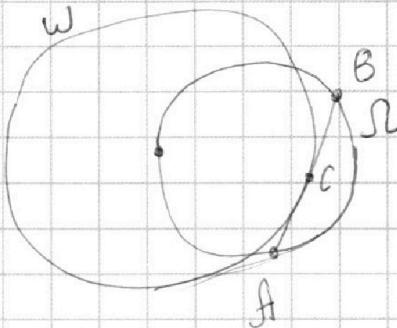
$$x_2 = \frac{12}{25}z$$

1)
 $y = 5 \cdot \frac{3}{5}z - 3z = 0 \Rightarrow \emptyset$

2) *

$$y = 5 \cdot \frac{12}{25}z - 3z = 2,4z - 3z = -\frac{3}{5}z$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ - 25 \\ \hline 119 \end{array}$$



$$\frac{25 \cdot \frac{144}{625} - \frac{9}{25} - 1}{\frac{9}{25} + 3} = \frac{144 - 9 - 25}{9 + 75} \neq = \frac{110}{84} = \frac{55}{42} \text{ (")}$$

$$\frac{s}{x} - \frac{x}{y} = 1$$

сок. ведом
мот.

$$\begin{array}{r} 251 \\ - 588 \\ \hline - 337 \end{array}$$

$$y \cdot \frac{s}{x} - x \cdot \frac{s}{y} = -49$$

$$\begin{array}{r} 231 \\ - 1948 \\ \hline 2049 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2658 \\ - 588 \\ \hline 2070 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ + 592 \\ \hline 592 \end{array}$$

$$214105$$

$$\begin{array}{r} 2415 - 45x - 1146 = 0 \\ x = \frac{2415 - 588}{241} \end{array}$$

$$\frac{s}{x+7} = \frac{s}{y+7} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ - 36 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ + 392 \\ \hline 392 \end{array}$$

$$315S - 10Sx - 147S + 1146 = 0$$

$$462S - 45x - 1146 = 0$$

$$x =$$

$$x = \frac{2415 - 588}{241}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x - y = 3z \Rightarrow y = 5x - 3z.$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{5x - 3z} = \frac{15}{z}$$

$$8(5x - 3z)z + xz = 15x(5x - 3z)$$

$$40xz - 24z^2 + xz = 75x^2 - 45xz$$

$$75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0.$$

$$\underline{25x^2 - (25x^2 + 9z^2 - 30xz) - z^2 =}$$

$$y^2 + 3z^2$$

$$= \frac{-9z^2 + 30xz - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{18z - 10z^2 + 30xz}{25x^2 + 12z^2 - 30xz} =$$

$$= 10z - \frac{z(x-z)}{y^2 + 3z^2}$$

$$\cancel{25x^2} \quad \underline{25x^2 + 12z^2 - 30xz}$$

$$0 - 10z \times : \frac{30z}{2 \cdot 25} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5}z$$

$$0m - 10z : z = \frac{30x}{2 \cdot 12} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}x$$

хорошо

$$\frac{169 + 9z^2 + 26\sqrt{9z^2}}{144}$$

$$= \frac{2133 + 13\sqrt{9z^2}}{24}$$

$$x = \frac{13 + \sqrt{9z^2}}{12}$$

$$= \frac{133 + 13\sqrt{9z^2}}{24} - \frac{5 \cdot 13 + 5\sqrt{9z^2}}{12}$$

$$= \frac{9 + \sqrt{9z^2}}{12}$$

$$169 - 6 \cdot 4 \cdot 4 = 169 - 42 = 127 = 997$$

=

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3x^2 - 5x + 6$$

$$\frac{1}{3} - \frac{5}{3} + \frac{18}{3} = \frac{14}{3}$$

$$y = 3x^2 + x + 1$$

$$z = 5 - 6x$$

$$\sqrt{y+z} - \sqrt{y} = z$$

$$y+z+y - 2\sqrt{y(y+z)} = z^2$$

$$2y+z-z^2 = 2\sqrt{y(y+z)}$$

$$4y^2 + z^2 + z^4 + 4yz - 4yz^2 - 2z^3 = 4y^2 + 4yz$$

$$z^4 - 2z^3 + z^2 - 4yz^2 = 0$$

$$z^2(z^2 - 2z + 1 - 4y) = 0$$

$$1) z=0$$

$$5 = 6x \rightarrow x = \frac{5}{6}$$

$$\frac{45}{36} - \frac{25}{6} + \frac{216}{6} = \frac{45+216-150}{36} = \frac{294}{36}$$

$$2)$$

$$z^2 - 2z + 1 - 4y = 0$$

$$\frac{45}{36} + \frac{230}{36} + \frac{36}{36} = \frac{141}{36} \quad \textcircled{1}$$

$$169 - 4 \cdot 4 \cdot 6$$

$$25 + \frac{36x^2}{12} - 60x - 10 + 12x + 1 - \frac{12x^2}{12} - 4x - 4 = 0$$

$$48x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$169 - 4 \cdot 6$$

$$24 \quad 12x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$x_1 = \frac{13+5}{2 \cdot 12} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$D = 169 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 25$$

Проверь корни

$$x_2 = \frac{13-5}{2 \cdot 12} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = 36x^2 + 25 - 60x$$

$$-8x^2 - 30x^2 - 18 = 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)}$$

$$-15x^2 + 28x - 9 = \sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)},$$

$$\frac{MO}{NO} = \frac{MT}{NT}$$

$$D = 28^2 - 4 \cdot 9 \cdot 15$$

$$y = 3x^2$$

$$\begin{array}{r} 784 \\ + 270 \\ \hline 1054 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 484 \\ - 540 \\ \hline 244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 281 \\ \hline 36 \\ 840 \\ - 6 \\ \hline 75 \end{array}$$

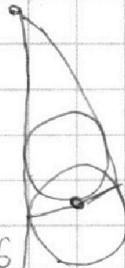
$$\begin{array}{r} 6 \\ 28 \\ \times 18 \\ \hline 224 \\ 28 \\ \hline 504 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1051 \\ - 1056 \\ \hline 18 \\ 840 \\ - 828 \\ \hline 12 \\ 852 \end{array}$$

$$225x^4 + 784x^2 + 81 - 840x^3 + 270x^2 - 504x =$$

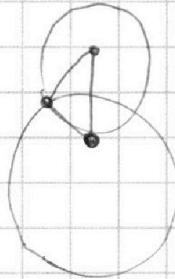
$$= 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x + 18x^2 + 6x + 6.$$

$$216x^4 - 828x^3 + 1038x^2 - 505x + 75 = 0.$$



$$3x^2 - 5x + 6 > 0.$$

$$D = 25 - 6 \cdot 3 \cdot 4$$



$$-504 + 5 - 6$$

$$3 \cdot 4 - 10 + 6$$

$$3x^2 + x +$$

$$\sqrt{3 - 5 + 6} = 2$$

$$12 - 10 + 6 = 8$$

$$3x^2 - 5x + 6 > 3x^2 + x + 1$$

$$\sqrt{3 + 1 + 1}$$

$$24 - 15 + 6 =$$

$$5 > 6x$$

$$x < \frac{5}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} ab^2c^2 \\ \times 7 \\ \hline abc \\ + 12 \\ \hline 98 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 490 \\ \hline 588 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7^2 \cdot 3^2 \\ \times 13 \\ \hline 49 \\ 149 \\ \hline 98 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} S - \\ \times x \\ \hline S - S \\ \hline y \end{array}$$

$$a = 7^2 \cdot 3^2, 49 | 10$$

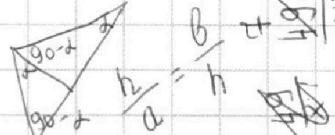
$$\angle_1 + \angle_2 \geq 13$$

$$b = 7^2 \cdot 3^2, 49 | 17$$

$$\angle_2 + \angle_3 \geq 17$$

$$c = 7^2 \cdot 3^2, 49 | 42$$

$$\angle_1 + \angle_3 \geq 42$$



$$\angle_2 = 0, \angle_1 = 13, \angle_3 = 29$$

$$a = 7^2 \cdot 5^2$$

$$\beta_2 = 5, \beta_1 = 9, \beta_3 = 14$$

$$b = 3^5$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 11 \\ \hline 55 \\ 55 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$c = 7^2 \cdot 3^{14}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 13 \\ \hline 77 \\ 77 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\text{HOD}(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$$

$$\begin{array}{r} 315S - 105x = -65x - 147 \\ 315S - 45x = -1176 \\ 168 \quad 462S - 45x = -1176 \\ 434S = -1176 \\ 234S = -1176 \\ S = -52 \end{array}$$

$$\text{HOD}(a+b, a^2 - 9ab + b^2) \leq \text{HOD}$$

$$(a^2 + b^2 + 2ab, a^2 + b^2 - 9ab) = ((a+b)^2, 11ab) \leq 11$$

$$a = 5, b = 6$$

$$\frac{5+6}{25 - 9 \cdot 5 \cdot 6 + 36} = \frac{11}{61 - 270} = \frac{-11}{209} = \frac{1}{19}$$

