



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\left. \begin{array}{l} ab : 3^{14} \cdot 7^{13} \\ bc : 3^{19} \cdot 7^{17} \\ ac : 3^{23} \cdot 7^{42} \end{array} \right\} \Rightarrow abbcac : (3^{14+19+23} \cdot 7^{13+17+42})$$
$$(abc)^2 : 3^{56} \cdot 7^{72} \Rightarrow abc : 3^{28} \cdot 7^{36} \Rightarrow$$

\Rightarrow степень вхождения 3 в abc хотя бы 28, а степень вхождения 7 хотя бы 42 (ac : 7^{42} , а abc : ac $\Rightarrow abc : 7^{42}$) $\Rightarrow abc : 3^{28} \cdot 7^{42} \Rightarrow abc \geq 3^{28} \cdot 7^{42}$
(abc $\neq 0$, т.к. a, b, c - натуральн.)

Покажем, что abc может быть равно $3^{28} \cdot 7^{42}$.

при $a = 7^{13} \cdot 3^9$
 $b = 3^5$
 $c = 7^{29} \cdot 3^{14}$

$$ab = 7^{13} \cdot 3^{14} \quad ; \quad 7^{13} \cdot 3^{14}$$
$$bc = 7^{29} \cdot 3^{19} \quad ; \quad 3^{19} \cdot 7^{17}$$
$$ac = 7^{42} \cdot 3^{23} \quad ; \quad 7^{42} \cdot 3^{23}$$

$$abc = 3^{9+5+14} \cdot 7^{13+29} = 3^{28} \cdot 7^{42} \Rightarrow \text{это мин. и он дост.}$$

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2.

$$\frac{a}{b} - \text{несократима} \Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1.$$

Заметим, что m - это наибольший возможный

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2)$$

$$(a^2 - 9ab + b^2 \neq 0)$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 9ab + b^2) \leq \text{НОД}((a+b)^2, a^2 - 9ab + b^2) =$$

все прежние мн.
остались, а степ. воз. увел. в 2 раза \Rightarrow
 \Rightarrow НОД не уменьшился

$$\begin{aligned} \text{НОД}((a+b)^2, a^2 - 9ab + b^2) &= \text{НОД}(a^2 + 2ab + b^2, a^2 - 9ab + b^2) = \\ &= \text{НОД}((a+b)^2, 11ab) \end{aligned}$$

(по алгоритму Евклида)

Рассмотрим какой-нибудь ~~мн~~ простой множитель

p , такой, что $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, тогда $b \not\equiv 0 \pmod{p}$ ($\text{НОД}(a, b) = 1$) \Rightarrow

$\Rightarrow (a+b) \not\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (a+b)^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Это верно для всех пр.

множителей $\Rightarrow \text{НОД}(a, (a+b)^2) = 1$. А-но $\text{НОД}(b, (a+b)^2) = 1$

$\Rightarrow \text{НОД}((a+b)^2, ab) = 1$, тогда $\text{НОД}((a+b)^2, 11ab) \leq 11$

(1 или 11) \Rightarrow его макс. $m = 11$, такое возможно:

$$\begin{aligned} a &= 5 \\ b &= 6 \end{aligned}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{5+6}{25 - 9 \cdot 5 \cdot 6 + 36} = \frac{11}{-209} = \frac{1}{-19}$$

Ответ: $\max m = 11$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

Пусть $a = 3x^2 + x + 1$, а $b = 5 - 6x$, тогда:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} = b \quad (3x^2 + x + 1 + 5 - 6x = 3x^2 - 5x + 6)$$

Возведём обе части в квадрат (при этом мы не потеряем корни, но возможно приобр. лишние, поэтому в конце обяз. проверим корни).

$$a+b - 2\sqrt{a^2+ab} + a = b^2$$

$$-2\sqrt{a^2+ab} = b^2 - 2a - b$$

4 Возведём обе части в квадрат.

$$4a^2 + 4ab = b^4 + 4a^2 + b^2 - 4ab^2 + 4ab - 2b^3$$

$$b^4 + b^2 - 4ab^2 - 2b^3 = 0$$

$$b^2(b^2 + 1 - 4a - 2b) = 0$$

1) $b=0$, т.е. $5-6x=0$, т.е. $x = \frac{5}{6}$.

$$\text{(пров. } \sqrt{3 \cdot (\frac{5}{6})^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} + 6} - \sqrt{3 \cdot (\frac{5}{6})^2 + \frac{5}{6} + 1} = \sqrt{\frac{75-150+216}{36}} - \sqrt{\frac{75+30+36}{36}} =$$

$$= \sqrt{\frac{141}{36}} - \sqrt{\frac{141}{36}} = 0, \text{ и } 5 - 6 \cdot \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow \text{подходит.)}$$

2) $b^2 - 2b - 4a + 1 = 0$ (подставим вместо a, b их выраж., совершим обратную замену).

$$(5-6x)^2 - 2 \cdot (5-6x) - 4(3x^2+x+1) + 1 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$25 + 36x^2 - 60x - 10 + 12x - 12x^2 - 4x - 4 + 1 = 0.$$

$$24x^2 - 52x + 12 = 0.$$

$$12 \cdot 6x^2 - 13x + 12 = 0.$$

$$D = 169 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 169 - 72 = 97.$$

$$x_1 = \frac{13 + \sqrt{97}}{2 \cdot 6} = \frac{13 + \sqrt{97}}{12}$$

$$x_2 = \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$

Провер. эти корни

$$1) \quad x^2 = \left(\frac{13 + \sqrt{97}}{12} \right)^2 = \frac{13^2 + 2 \cdot 13 \cdot \sqrt{97} + 97}{144} = \frac{266 + 26\sqrt{97}}{144} =$$

$$= \frac{133 + 13\sqrt{97}}{72}$$

$$3x^2 - 5x + 6 = 3 \cdot \frac{133 + 13\sqrt{97}}{72} - \frac{5(13 + \sqrt{97})}{12} + 6 =$$

$$= \frac{133 + 13\sqrt{97} - 2 \cdot 5 \cdot 13 - 10\sqrt{97} + 144}{24} = \frac{147 + 3\sqrt{97}}{24} = \frac{49 + \sqrt{97}}{8} =$$

$$= \frac{97 + 1 + 2\sqrt{97}}{16} = \frac{(1 + \sqrt{97})^2}{4^2} = \left(\frac{1 + \sqrt{97}}{4} \right)^2$$

$$3x^2 + x + 1 = 3x^2 - 5x + 6 = (5 \cdot 6x) = \frac{49 + \sqrt{97}}{8} - \frac{40}{8} + \frac{6(13 + \sqrt{97})}{12} =$$

$$= \frac{49 + \sqrt{97} - 40 + 52 + 4\sqrt{97}}{8} = \frac{61 + 5\sqrt{97}}{8} = \frac{97 + 25 + 2 \cdot 5\sqrt{97}}{16} = \left(\frac{5 + \sqrt{97}}{4} \right)^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = \frac{1+\sqrt{97}}{4} - \frac{5+\sqrt{97}}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \neq 5 - 6 \cdot \frac{13+\sqrt{97}}{12}$$

\Rightarrow этот корень не подходит.

$$2) \quad x^2 = \left(\frac{13-\sqrt{97}}{12}\right)^2 = \frac{133-13\sqrt{97}}{72}$$

$$3x^2-5x+6 = 3 \cdot \frac{133-13\sqrt{97}}{72} - \frac{5(13-\sqrt{97})}{12} + 6 = \frac{133-13\sqrt{97}}{24} - \frac{65-5\sqrt{97}}{12} + 6$$

$$= \frac{133-13\sqrt{97}-2 \cdot 5 \cdot 13+10\sqrt{97}+144}{24} = \frac{147-3\sqrt{97}}{24} = \frac{97+1-2\sqrt{97}}{16}$$

$$= \left(\frac{1-\sqrt{97}}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{97}-1}{4}\right)^2$$

$$3x^2+x+1 = 3x^2-5x+6 - (5-6x) = \frac{49-\sqrt{97}}{8} - \frac{40}{8} + \frac{6(13-\sqrt{97})}{12}$$

$$= \frac{49-\sqrt{97}-40+52-4\sqrt{97}}{8} = \frac{61-5\sqrt{97}}{8} = \frac{122-2 \cdot 5 \cdot \sqrt{97}}{16}$$

$$= \frac{25+97-2 \cdot 5 \cdot \sqrt{97}}{16} = \left(\frac{\sqrt{97}-5}{4}\right)^2$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = \frac{\sqrt{97}-1}{4} - \frac{\sqrt{97}-5}{4} = \frac{-1+5}{4} = 1$$

$$5 - 6 \cdot \frac{5-\sqrt{97}}{12} \neq 1 \Rightarrow \emptyset \text{ не подходит.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{5}{6}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

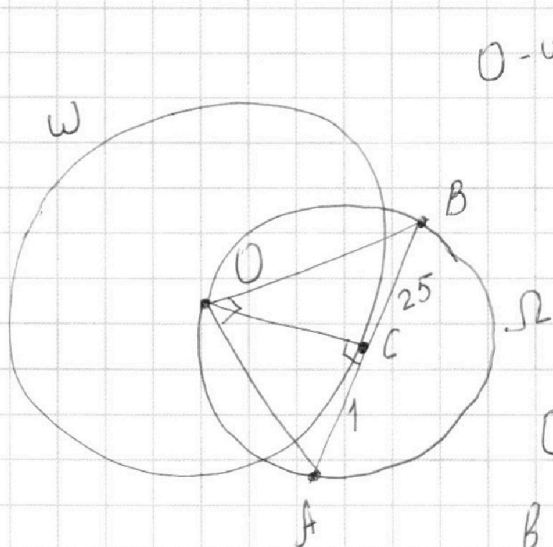
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

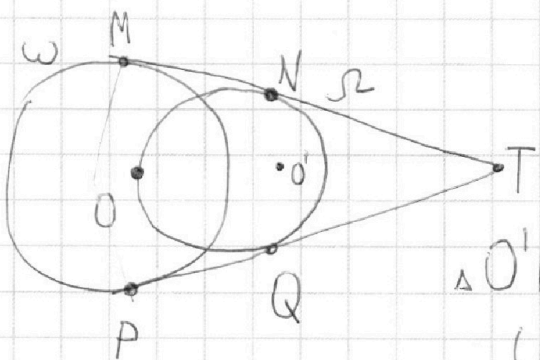


$O - \omega, \Omega$
 $OC \perp AB$ (радиус в т. касания).
 $\angle BOA = 90^\circ$ (опирается на диаметр)

$OC^2 = AC \cdot BC$ (по св. высоты в п/ч Δ)

$$OC = \sqrt{AC \cdot BC} \Rightarrow OC = \sqrt{1 \cdot 25} = 5 \Rightarrow$$

\Rightarrow радиус ω 5, а Ω $\frac{25+1}{2} = 13$ (половина диаметра)



O, O', T - на одной пр.

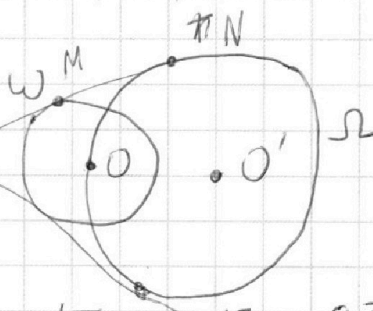
O' - ц. Ω, T , т. пересек.

общих касат.

$\Delta O'NT \sim \Delta OMT$ (один угол 90° , др. общий)
 (N, M - т. касания, см. рис.)

$$\frac{O'N}{OM} = \frac{NT}{MT} = \frac{O'T}{OT}$$

$$\frac{5 \cdot 13}{13 \cdot 5} = \frac{O'T}{O'T + O'O}$$



$$\frac{O'N}{OM} = \frac{NT}{MT} = \frac{O'T}{OT} \Rightarrow \frac{13}{5} = \frac{OT+13}{OT} \Rightarrow \frac{13}{5} = 1 + \frac{13}{OT}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left. \begin{aligned} \frac{8}{5} &= \frac{13}{OT} \Rightarrow OT = \frac{65}{8} \\ OM &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow TM^2 = \left(\frac{65}{8}\right)^2 + 5^2 \text{ (по м. Пифагор.)}$$

$$TM^2 = 5^2 \left(\frac{13^2}{8^2} + 1 \right) = 5^2 \left(\frac{169+64}{64} \right) = \frac{5^2}{8^2} \cdot 233$$

$$TM = \frac{5}{8} \sqrt{233}$$

$$\frac{O'N}{OM} = \text{---}$$

$$\frac{O'N}{OM} = \frac{NT}{MT} = \text{---}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{8}{5} &= \frac{13}{OT} \Rightarrow OT = \frac{65}{8} \\ OM &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow TM^2 = \left(\frac{65}{8}\right)^2 + 5^2 \text{ (по м. Пиф.)}$$

$$TM = \frac{5}{8} \sqrt{233}$$

$$\frac{O'N}{OM} = \frac{NT}{MT} \Rightarrow \frac{13}{5} = \frac{NT}{\frac{5}{8} \sqrt{233}} \Rightarrow NT = \frac{13}{8} \sqrt{233}$$

$$MN = NT - TM = \frac{13}{8} \sqrt{233} - \frac{5}{8} \sqrt{233} = \frac{8}{8} \sqrt{233} = \sqrt{233}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{233}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{100z^2 - z^2 - 9z^2}{z^2 + 27z^2} = \frac{90z^2}{28z^2} = \frac{45}{14} = 3\frac{3}{14}$$

($z \neq 0$)

$$2) \quad x = \frac{12}{25}z$$

$$y = 5 \cdot \frac{12}{25}z - 3z = -\frac{3}{5}z$$

Тогда наша дробь $\frac{25 \cdot (\frac{12}{25}z)^2 - (-\frac{3}{5}z)^2 - z^2}{(-\frac{3}{5}z)^2 + 3z^2} =$

$$= \frac{12z^2 - 9z^2 - 25z^2}{+9z^2 + 3z^2} = \frac{-22z^2}{12z^2} = -\frac{11}{6}$$

($z \neq 0$)

Наименьшее знач. - $\frac{11}{6}$

Ответ: $-\frac{11}{6} \quad (-1\frac{5}{6})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6

Пусть скорость мотоциклиста x км/ч, а велосипедиста y км/ч, а расстояние между пунктами S км,

тогда:

$$(x \neq 0, y \neq 0, \\ x+7 \neq 0, y+7 \neq 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{x} - \frac{S}{y} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \cdot \frac{S}{x} - x \cdot \frac{S}{y} - y \cdot \frac{S}{x} = 49 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S}{x+7} - \frac{S}{y+7} = \frac{3}{5} \quad (36 \text{ мин} = \frac{3}{5} \text{ ч}) \end{array} \right.$$

$$Sy - Sx$$

$$Sx - Sy = xy$$

$$x^2 S - y^2 S = 49xy$$

(разд. одно на др.)

$$\frac{S(x-y)}{S(x^2-y^2)} = \frac{1}{49}$$

$S \neq 0, x \neq y$ (т.к. приезд в разное время).

$$\frac{S(x-y)}{S(x-y)(x+y)} = \frac{1}{49}$$

$$x+y = 49 \Rightarrow Sx - S(49-x) = x(49-x)$$

$$Sx - 49S + Sx = 49x - x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{5} + \frac{1}{x} \Rightarrow S = \frac{xy}{x-y} \\ \frac{1}{y+7} - \frac{1}{x+7} = \frac{3}{5S} \Rightarrow \frac{y+7-x-7}{(x+7)(y+7)} = \frac{3}{5S} \Rightarrow S = \frac{3}{5} \frac{(x+7)(y+7)}{y-x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{x-y} = \frac{3}{5} \frac{(x+7)(y+7)}{y-x} \quad (x \neq y)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5xy = 3xy + 21x + 21y + 147 \\ y = 49 - x \end{array} \right.$$

$$5x(49-x) = 3x(49-x) + 21x + 21 \cdot 49 - 21x + 147$$

$$2x(49-x) = 24 \cdot 49$$

$$49x - x^2 = 12 \cdot 49$$

$$x^2 - 49x + 588 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 12 \cdot 49 = 49(49 - 48) = 49$$

$$x_1 = \frac{49-7}{2} = 21, \text{ тогда } y = 28 > x \Rightarrow \emptyset$$

$$x_2 = \frac{49+7}{2} = 28 \text{ (км/ч)} \Rightarrow y = 21 \text{ (км/ч)}$$

$$\frac{S}{21} - \frac{S}{28} = 1 \Rightarrow S = \frac{21 \cdot 28}{28-21} = \frac{21 \cdot 28}{7} = \frac{21 \cdot 4}{1} = 84 \text{ (км)}$$

Ответ: 84 км

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + 2Sx - 49S - 49x = 0 \\ \frac{S}{x+7} - \frac{S}{(49-x)+7} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Черновик.

$$\begin{cases} x^2 + 2Sx - 49S - 49x = 0 \\ \frac{S}{x+7} - \frac{S}{56-x} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2Sx - 49S - 49x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(56-x) - S(x+7) = \frac{3}{5}(x+7)(56-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 56S - Sx - Sx + 7S = \frac{3}{5}(56x - x^2 + 392 - 7x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2Sx - 49S - 49x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 63S - 2Sx = \frac{3}{5}(-x^2 + 49x + 392) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2Sx - 49S - 49x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 315S - 10Sx = -3x^2 + 147x + 1176 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2Sx - 49S - 49x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 2Sx + 49S + 49x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 315S - 10Sx = -6Sx - 147S - 147x + 147x + 1176 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 462S - 4Sx - 1176 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 2Sx + 49S + 49x \end{cases}$$

$$231S - 2Sx - 588 = 0 \Rightarrow Sx = \frac{231}{2}S - 294.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \frac{\frac{231}{2}S - 294}{S} = \frac{231S - 588}{2S} = \frac{231}{2} - \frac{294}{S}$$

$$\left(\frac{231S - 588}{2S}\right)^2 = 2S \cdot \frac{231S - 588}{2S} + 49S + 49 \cdot \frac{231S - 588}{2S}$$

$$(231S - 588)^2 = 4S^2(231S - 588) + 196S^3 + 49 \cdot 2S$$

$$(231S - 588) \quad (\div 7) \quad (\div 49)$$

$$(231S - 588)^2 = S(924S^3 - 2352S^2 + 196S^3 + 22638S^2 -$$

$$+ (33S - 84)^2 = \frac{4S^2(231S - 588) - 4S^2(33S - 84)}{7} + 4S^3 +$$

$$+ 2S(231S - 588)$$

$$7(33S - 84)^2 = 4S^2(33S - 84) + 28S^3 + 14S(33S - 84)$$

$$7(33S - 84)^2 = 132S^3 - 336S^2 + 28S^3 + 98(33S - 84)$$

$$(33S - 84)(7(33S - 84) - 4S^2 - 98) = 28S^3$$

$$x + y = 49$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{S}$$

$$\frac{1}{x+7} - \frac{1}{y+7} = \frac{3}{5S}$$

(р-одно на др.)

$$S = \frac{5^3}{3^5} \frac{(x+7)(y+7)}{x-y}$$

$$\frac{x-y}{xy} = \frac{1}{S} \Rightarrow S = \frac{xy}{x-y}$$

$$5xy = 3xy$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = 3z - 5x \quad y = 5x - 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$y^2 = 25x^2 + 9z^2 - 30xz$$

$$8yz + xz = 15xy$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ - 39 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$8(3z - 5x)z + xz = 15x(3z - 5x)$$

$$24z^2 - 40xz + xz = 45xz - 75x^2 \quad x_1 =$$

$$24z^2 - 84xz + 75x^2 = 0$$

$$8z^2 - 28xz + 25x^2 = 0$$

$$D = (28^2 - 4 \cdot 8 \cdot 25) = 28^2 - 800$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 86 \\ \hline 516 \\ 688 \\ \hline 7396 \end{array}$$

$$8(5x - 3z)z + xz = 15x(5x - 3z)$$

$$40xz - 24z^2 + xz = 75x^2 - 45xz$$

$$75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0$$

$$25x^2 - 25x^2 - 9z^2 + 30xz - z^2 = \frac{30xz - 10z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 75 \\ \hline 450 \\ 675 \\ \hline 78200 \end{array}$$

$$D = 196z^2$$

$$x_1 = \frac{86z + 14z}{2 \cdot 75} = \frac{90z}{150} = \frac{3}{5}z$$

$$x_2 = \frac{86z - 14z}{2 \cdot 75} = \frac{72z}{150} = \frac{12}{25}z$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



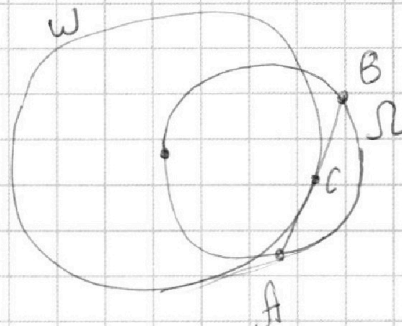
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = \frac{3}{5} z$$

$$x_2 = \frac{12}{25} z$$

1) $y = 5 \cdot \frac{3}{5} z - 3z = 0 \Rightarrow \emptyset$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 144 \\ -25 \\ \hline 119 \end{array}$$



2) \times

$$y = 5 \cdot \frac{12}{25} z - 3z = 2,4z - 3z = -\frac{3}{5} z$$

$$\frac{25 \cdot \frac{144}{625} - \frac{9}{25} - 1}{\frac{9}{25} + 3} = \frac{144 - 9 - 25}{9 + 75} \neq 7 = \frac{110}{84} = \frac{55}{42} \text{ "}$$

$$\frac{s}{x} - \frac{x}{y} = 1$$

$$\frac{231}{231} \times \frac{98}{98}$$

$$\frac{1848}{2079}$$

$$\frac{22638}{588 \times 98}$$

ск. велос. мот

$$\frac{231}{588} - \frac{231}{357}$$

$$y \cdot \frac{s}{x} - x \cdot \frac{s}{y} = -49$$

$$\frac{357}{-231} \frac{126}{126}$$

$$\frac{231}{-126} \frac{10}{10}$$

$$\frac{55}{392} \times 55 = \frac{3025}{392}$$

$$244 \cdot 105$$

$$x = \frac{-241s - 588}{2s}$$

$$\frac{s}{x+7} = \frac{s}{y+7} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{60}{60} = \frac{5}{5}$$

$$\frac{359}{232} = \frac{3}{6}$$

$$315s - 105x = -65x - 147s + 1176$$

$$462s - 45x - 1176 = 0$$

$$x = \frac{241s - 588}{2s}$$

$$x = \frac{241}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5x - y = 3z \Rightarrow y = 5x - 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{5x - 3z} = \frac{15}{z}$$

$$8(5x - 3z)z + xz = 15x(5x - 3z)$$

$$40xz - 24z^2 + xz = 75x^2 - 45xz$$

$$75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0$$

$$\frac{25x^2 - (25x^2 + 9z^2 - 30xz) - z^2}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{-9z^2 + 30xz - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{-8z^2 - 10z^2 + 30xz}{25x^2 + 12z^2 - 30xz}$$

$$= 10x \frac{z(x-z)}{25x^2 + 12z^2 - 30xz}$$

$$25x^2 + 12z^2 - 30xz$$

$$0 - \text{НО } x: \frac{30z}{2 \cdot 25} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5}z$$

$$0 - \text{НО } z: z = \frac{30x}{2 \cdot 12} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}x$$

$$\sqrt[3]{169}$$

$$\sqrt[3]{169}$$

$$\frac{169 + 9\sqrt[3]{169} + 26\sqrt[3]{169}}{144}$$

$$z = \frac{2(153 + 13\sqrt[3]{169})}{24}$$

$$x = \frac{169 - 6 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{169} + 12}{12} = \frac{169 - 24\sqrt[3]{169} + 12}{12}$$

$$= \frac{153 + 13\sqrt[3]{169}}{24} - \frac{5 \cdot 13 + 5\sqrt[3]{169}}{12} + 6 = \frac{3 + 3\sqrt[3]{169}}{24} + 6 = \frac{1 + \sqrt[3]{169} + 48}{8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 - 5x + 6$$

$$\frac{1}{3} - \frac{5}{3} + \frac{18}{3} = \frac{14}{3}$$

$$y = 3x^2 + x + 1$$

$$z = 5 - 6x$$

$$-5x + 6 = x + 1$$

$$-6x = -5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$3 \cdot \frac{9}{16} - 5 \cdot \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{16} - 60 + 96 = \frac{63}{16}$$

$$\sqrt{y+z} - \sqrt{y} = z$$

$$y+z+y-2\sqrt{y(y+z)} = z^2$$

$$2y+z-z^2 = 2\sqrt{y(y+z)}$$

$$4y^2 + z^2 + z^4 + 4yz - 4yz^2 - 2z^3 = 4y^2 + 4yz$$

$$z^4 - 2z^3 + z^2 - 4yz^2 = 0$$

$$z^2(z^2 - 2z + 1 - 4y) = 0$$

1) $z = 0$

$$5 = 6x \rightarrow x = \frac{5}{6}$$

$$\frac{75}{36} - \frac{25^{16}}{6} + \frac{216}{6} = \frac{75+216-150}{36} = \frac{291}{36}$$

$$\frac{75}{36} + \frac{330}{36} + \frac{36}{36} = \frac{441}{36} \quad (\checkmark)$$

2) $z^2 - 2z + 1 - 4y = 0$

$$25 + 36x^2 - 60x - 10 + 12x + 1 - 12x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$48x^2 - 52x + 12 = 0$$

$$12x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$x_1 = \frac{13+5}{2 \cdot 12} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$D = 169 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 25$$

Проверь корни

$$x_2 = \frac{13-5}{2 \cdot 12} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

122+10/97

61+5/97

6 \cdot 24 = 120 \cdot x

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

$$3x^2-5x+6 + 3x^2+x+1 - 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)} = 36x^2+25-60x$$

$$-8x \quad 56x - 30x^2 - 18 = 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)}$$

$$-15x^2 + 28x - 9 = \sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)}$$

$$\frac{MO}{NO} = \frac{MT}{NT}$$

$$D = 28^2 - 4 \cdot 9 \cdot 15$$

$$y = 3x^2$$

$$\begin{array}{r} 784 \\ + 270 \\ \hline 1054 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$

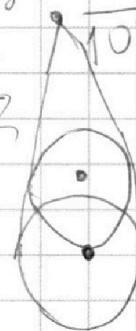
$$\begin{array}{r} 784 \\ - 540 \\ \hline 244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ - 6 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 30 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 18 \\ \hline 224 \\ 28 \\ \hline 504 \end{array}$$

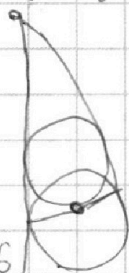
$$\begin{array}{r} 1051 \\ - 1056 \\ \hline 18 \\ \hline 1038 \end{array}$$



$$225x^4 + 784x^2 + 81 - 840x^3 + 270x^2 - 504x =$$

$$= 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x + 18x^2 + 6x + 6$$

$$216x^4 - 828x^3 + 1038x^2 - 505x + 75 = 0$$



$$3x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$D = 25 - 6 \cdot 3 \cdot 4$$

$$3x^2 + x +$$

$$-504 + 5 - 6$$

$$3 \cdot 4 - 10 + 6$$

$$\sqrt{3-5+6} = 2$$

$$12 - 10 + 6 = 8$$

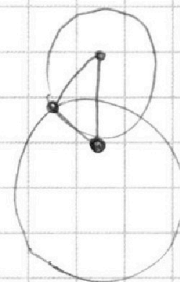
$$3x^2 - 5x + 6 > 3x^2 + x + 1$$

$$\sqrt{3+1+1}$$

$$27 - 15 + 6 =$$

$$5 > 6x$$

$$x < \frac{5}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d_{bc}^{2,2,2}, 3^{56} 7^{72}$$

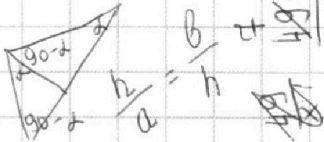
$$abc, 3^{28} 7^{36}$$

$$7^{42} 3^{28}$$

$$a = 7^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 11^{\gamma_1}$$

$$b = 7^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 11^{\gamma_2}$$

$$c = 7^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 11^{\gamma_3}$$



$$a = 7^{13} \cdot 3^9$$

$$b = 3^5$$

$$c = 7^{29} \cdot 3^{14}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ + 12 \\ \hline 98 \\ 49 \\ \hline 588 \end{array}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 13$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 17$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq 42$$

$$\alpha_2 = 0, \alpha_1 = 13, \alpha_3 = 29$$

$$\beta_2 = 5, \beta_1 = 9, \beta_3 = 14$$

$$x + y = 49$$

$$\begin{array}{r} 315 \\ + 10 \\ \hline 315 \\ - 147 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 490 \\ + 98 \\ \hline 588 \end{array}$$

$$\frac{S}{x} - \frac{S}{y}$$

$$\frac{S}{y} - \frac{S}{x}$$

$$\frac{S}{y+7} + \frac{S}{x+7} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{array}{r} 231 \\ \times 4 \\ \hline 924 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 315 \\ \times 4 \\ \hline 1260 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 315 \\ 147 \\ \hline 462 \end{array}$$

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

$$315S - 105x = -65x - 147S - 147x + 147x + 1176$$

$$315S - 45x$$

$$168 \quad 462S - 45x - 1176 = 0$$

$$434S - 27x = 231S - 369$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2-9ab+b^2) \equiv \text{НОД}$$

$$(a^2+b^2+2ab, a^2+b^2-9ab) = ((a+b)^2, 11ab) \equiv 11$$

$$a=5 \quad b=6$$

$$\frac{5+6}{25-9 \cdot 5 \cdot 6+36} = \frac{11}{61-270} = \frac{-11}{209} = \frac{1}{19}$$

