



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15-01

$$abc : ac \Leftrightarrow abc : 7^{39} \text{ (так } ac : 7^{39})$$

$$(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ac : (2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}) \Leftrightarrow$$

$$(abc)^2 : 2^{55}, \text{ тогда } abc : 2^{28} \text{ (так как } abc$$

$$: 2^k \text{ (} k \leq 27 \text{), и } (abc)^2 : 2^{2k}, (abc)^2 \not: 2^{2k+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (abc)^2 \not: 2^{55} \text{)}$$

$$\text{Значит, } abc : 2^{28} 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Приведем пример, когда } abc = 2^{28} 7^{39}:$$

$$a = 7^{11} \cdot 2^{11}, b = 2^5, c = 7^{28} \cdot 2^{12}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☒

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15-2

$$\frac{a+b}{(a^2-7ab+b^2)}$$

— Если дробь сократима на $m > 1$,

то $(a+b) : m$, $(a^2-7ab+b^2) : m$, и $a \equiv m$, $b \equiv m$

(если $a \equiv b \equiv 0 \pmod m$), то при $m > 1$ возникает противоре-
чие, если только одно из чисел $a, b \equiv m$, то их
сумма $\not\equiv m$).

$$a^2-7ab+b^2 = (a+b)^2 - 9ab \equiv m, (a+b)^2 : (a+b) \equiv m,$$

то есть $-9ab \equiv m \Leftrightarrow 9ab \equiv m$. Следовательно $9 \equiv m$,

и $m \leq 9$. Приведем пример для $m=9$:

$$\text{*** } a=4, b=5, \quad a+b=9, \quad a^2-7ab+b^2 = -99 \quad \text{—}$$

оба числа сокращаются на $m=9$.

Ответ: при $m=9$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

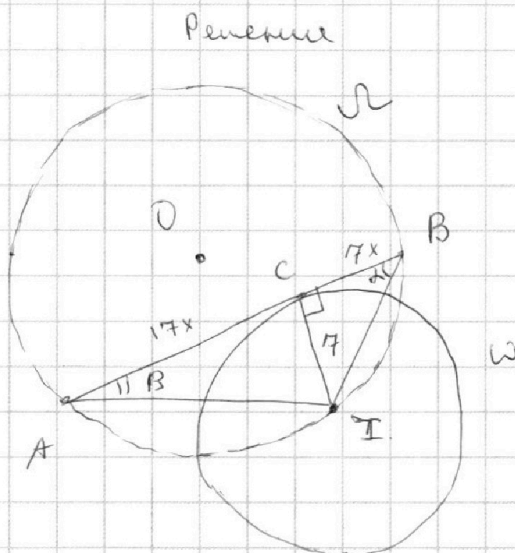
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$N=3$
 Дано
 ω, Ω ,
 $AB, C \in AB$,
 $AC:CB = 17:7$.
 $R_\omega = 7, R_\Omega = 13$
 Найти:
 AB



Сфера O — центр Ω , I — центр ω , $\alpha = \angle ABI$, $\beta = \angle BAI$.

$IC \perp AB$, т.к. ω касается AB в точке C . Примем

$$AB = 24x \Rightarrow AC = 17x, BC = 7x.$$

$$\sin \alpha = \frac{CI}{BI} = \frac{CI}{\sqrt{CI^2 + BC^2}} = \frac{7}{\sqrt{7^2 + (7x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{CI}{AI} = \frac{CI}{\sqrt{CI^2 + AC^2}} = \frac{7}{\sqrt{7^2 + (17x)^2}} = \\ &= \frac{7}{\sqrt{49 + 289x^2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{По теореме синусов в } \triangle ABI \quad 2R_\Omega &= \frac{AI}{\sin \alpha} = \\ &= \left(\frac{CI}{\sin \beta} \right) \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{7}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49+289x^2}} = \sqrt{(x^2+1)(289x^2+49)}. \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Снова $4R_n^2 = 4 \cdot 169 = 676 = (x^2 + 1)(289x^2 + 49)$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$x^2 = \frac{-338 \pm \sqrt{338^2 + 4 \cdot 627 \cdot 289}}{289 \cdot 2} = \frac{-338 \pm \sqrt{209764}}{578}$$

$$= \frac{2\sqrt{52441} - 169}{289} = 1$$

~~$$AB = 24\sqrt{x^2} = 24\sqrt{\frac{2\sqrt{52441} - 169}{289}}$$~~

~~$$\text{Ответ: } AB = 24\sqrt{\frac{2\sqrt{52441} - 169}{289}}$$~~

~~XXXXX~~

$$AB = 24\sqrt{x^2} = 24$$

Ответ: $AB = 24$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_1 = \frac{12 + \sqrt{(-12)^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69}}{69 \cdot 2} = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{69 \cdot 2} =$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} - \text{удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} - \text{удовлетворяет ОДЗ}$$

$$\text{Ответ: } x = \left\{ \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}, \frac{1}{9}, \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$$

~~Сделаем $u^2 = 3x^2 - 6x + 2$, $t^2 =$~~

Сделаем $u = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$, $t = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$.

Сложим $u^2 - t^2 = 1 - 9x$. Значит, мы должны решить

уравнение $u - t = u^2 - t^2$.

~~$(u-t)(u+t-1) = 0$~~ $(u-t)(u+t-1) = 0$

1) $u - t = 0 \Rightarrow u = t$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$x = \frac{1}{9} - \text{удовлетворяет ОДЗ}$$

2) $u + t - 1 = 0 \Rightarrow u + t = 1$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \end{cases} \quad / +$$

$$2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 2 - 9x$$

$$4(3x^2 - 6x + 2) = 81x^2 - 36x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

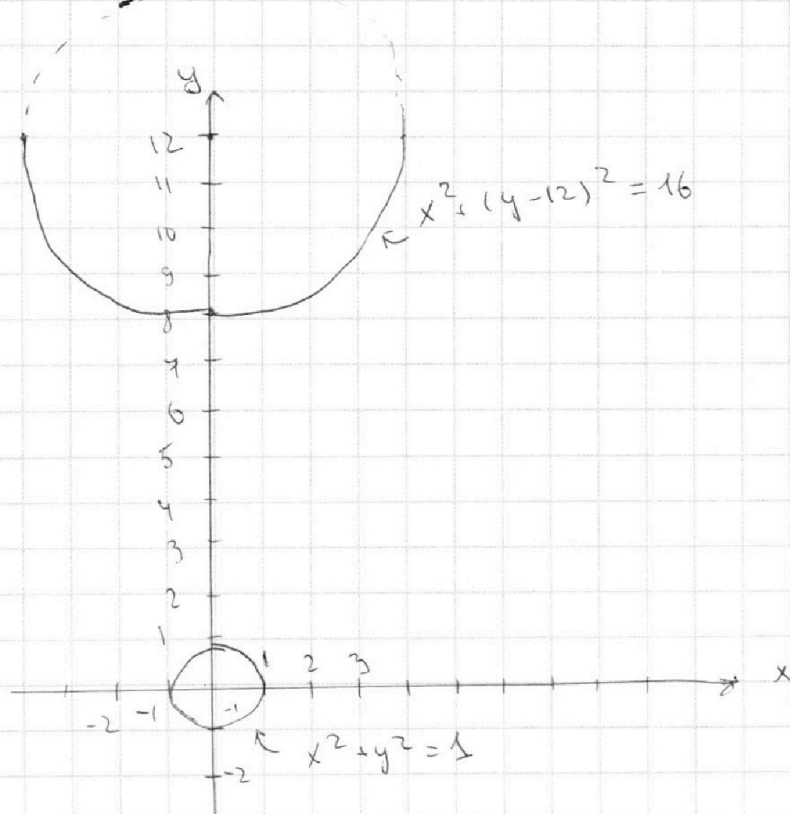
N°6

$$\begin{cases} ax + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - 1^2 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + (y - 12)^2 - 4^2 = 0 \quad -$$

уравнения окружностей с радиусами 1 и 4 и
центрами $(0, 0)$ и $(0, 12)$ соответственно





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Найти значения a , при которых~~

Снаб $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$, равно озна-
то точка $(x; y)$ лежит ~~на~~ внутри ~~канале~~
из данных окружностей, или на ней.

Если прямая $y = -ax + 8b$ проходит через какую-
то окружность, но не касается её, то система будет
иметь ∞ решений, так как точек внутри окружности,
лежащих на прямой, будет бесконечно много.

Значит, ~~то~~ $y = -ax + 8b$ должна лишь касаться
окружностей. А так как решений ровно два, то

$y = -ax + 8b$ касается обеих окружностей:

$$\begin{cases} x_1^2 + (-ax + 8b)^2 - 1 = 0 \\ x_2^2 + (-ax + 8b - 12)^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5

$16 + 25 - 140 = 41 - 140 = -99$

$3(x-1)^2 - 2 = 0$

$(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$|x - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{4}$

$|x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}$

$x - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x \geq \frac{3}{4}$

$x - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow x \leq \frac{1}{4}$

$x - \frac{1}{2} \leq 1,5 - \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{9 - 2\sqrt{5}}{6}$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 2 \sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$

$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$

$3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}x + 1$

$|x - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{4}$

$|x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}$

$x - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x \geq \frac{3}{4}$

$x - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow x \leq \frac{1}{4}$

$x - \frac{1}{2} \leq 1,5 - \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{9 - 2\sqrt{5}}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N-94

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

~~$$3x^2 + 3x + 1 + (1 - 9x) = 3x^2 - 6x + 2$$~~

$$u^2 = 3x^2 + 3x + 1, \quad t = 1 - 9x$$

~~$$u^2 - \sqrt{u+t} = 1$$~~

$$(u^2 - t)^2 = \sqrt{u+t}$$

$$u^4 - 2u^2t + t^2 = u+t$$

$$3x^2 + 3x + 1 =$$

$$(2+a)(x_2 - x_1) = 14$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

$$a = 5$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x-1)^2 - 1$$

N-94

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$D = 36 - 8 \cdot 3 = 12$$

~~$$3x^2 - 6x + 1 = 0$$~~

$$3x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$n=2$

$$\frac{a}{b} : (a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, \text{НОД}(a, b) = 1)$$

$$\begin{aligned} a+b &: m \\ a^2+7ab+b^2 &: m \end{aligned}$$

$$(a+b)^2 - 9ab : m$$

$$9ab : m$$

~~Учитывая~~ $\text{НОД}(a, b) = 1$, то противоречие

$$m = 9$$

$$a = 4, b = 5$$

$$9:9, 16+25-7 \cdot 20 = 41-140 = -99 : 9$$

$n=3$

$a, b, c :$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, bc : 2^{17} \cdot 7^{18}, ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc \sim \text{НОД}(2^{15} \cdot 7^{11}, 2^{17} \cdot 7^{18}, 2^{23} \cdot 7^{39}) = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

~~$$c = 7^{39} \cdot 2^{23}$$~~

$$\begin{aligned} a &= 7^{11} \cdot 2^{11} \\ c &= 7^{28} \cdot 2^{12} \\ b &= 2^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 16 \\ a+c &= 23 \\ b+c &= 17 \end{aligned}$$

$$2a = 39 - 17 = 22$$

$$a-b = a = 11$$

$$(abc)^2 : (2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39}) = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$abc : 7^{34}$$

$$abc : 2^{28}$$

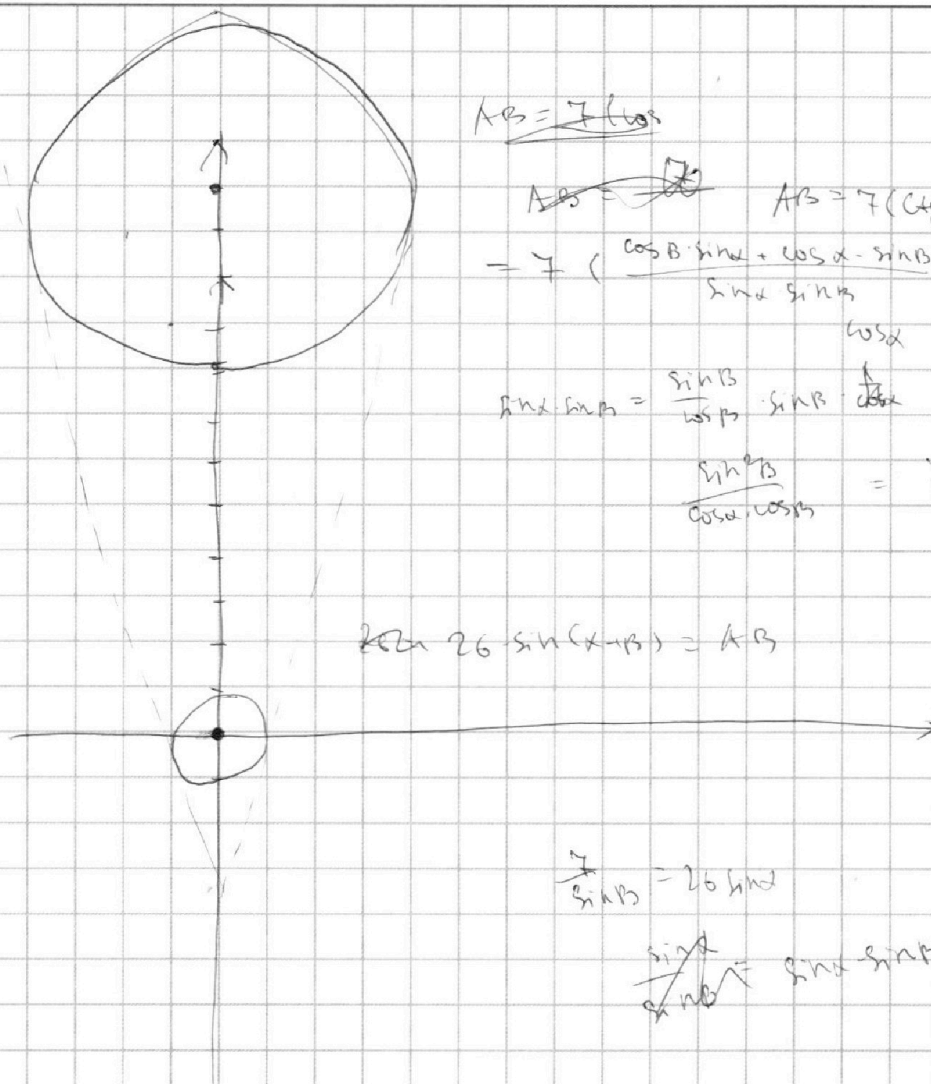
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 7 \cos \alpha$$

$$AB = 7(\cos \alpha + \cos \beta) = 7 \left(\frac{\cos \beta \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \right)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{17}{7} = \frac{7}{26}$$

$$\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{17}{26}$$

$$26 \sin(\alpha - \beta) = AB$$

$$\frac{7}{\sin \alpha} = 26 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \sin \alpha \sin \beta = \frac{7}{26}$$

$$\sin \alpha - \alpha = 0, \text{ no } \beta$$

$$y = -ax + 86$$

$$y(0) = 86$$

$$\frac{7}{\sin \alpha} = \frac{17 \sin \beta}{26 \sin \beta}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{26}{7}$$

$$7 = 17x \tan \beta = 7x \tan \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{17}{7} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{17}{7} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{17}{7}$$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{17}{7} \Rightarrow \tan \beta = \frac{17}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 9x^2 + 18x - 1 = 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$-8x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$D = 225 + 8 \cdot 75 = 825 = 25 \cdot 33$$

$$x_1 = \frac{-15 + 5\sqrt{33}}{150} = \frac{-3 + \sqrt{33}}{30}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{30}$$

$$A = \frac{1}{6} - 2u + v^2$$

$$\frac{6 + \sqrt{12}}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = u^2, \quad 3x^2 + 3x + 1 = v^2$$

$$u^2 - v^2 = 1 - 9x$$

$$u - v = u^2 - v^2 \rightarrow (u - v)(u + v - 1) = 0$$

$$1) u = v$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1, \quad 1 - 9x = 0, \quad x = \frac{1}{9}$$

$$2) u + v = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$
$$\begin{array}{r} 17 \\ + 17 \\ \hline 119 \\ + 7 \\ \hline 126 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N.04

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

224

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$2\sqrt{3x^2 + 6x - 2} = 2 - 5x$$

$$12x^2 + 24x + 8 = 1x^2 - 36x + 4 = 1$$

$$69x^2 - 60x - 4 = 0$$

$$D = 3600 + 4 \cdot 6 \cdot 69 = 4704$$

$$60 \pm \sqrt{4704}$$

$$x_1 =$$

$$\frac{30 + \sqrt{1176}}{69}$$

$$= \frac{30 + \sqrt{1176}}{69}$$

21

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 16 \\ \hline 414 \\ + 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\frac{30 + 28\sqrt{2}}{69}$$

$$2(2x^2 + 3)$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 5x$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 8x^2$$

$$69x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$D = 144 - 16 \cdot 69 = 4848$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 28\sqrt{2}}{69}$$

$$x_1 = \frac{12 + 28\sqrt{2}}{69}$$

$$\frac{10}{23} = 1 - \frac{13}{23}$$

$$\frac{10 + 28\sqrt{2}}{69}$$

$$\frac{10 + 28\sqrt{2}}{69}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$7 \text{ ctg } \beta = 7 \text{ ctg } \alpha$$

$$17x \text{ ctg } \beta = 7x \text{ ctg } \alpha, \text{ ctg } \alpha = \frac{17}{7} \text{ ctg } \beta \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{17}{7} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) = \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \alpha) \cdot \frac{17^2}{7^2}$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) \cdot \frac{185}{49}$$

$$49 \sin^2 \alpha - 49 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = 185 \sin^2 \beta - 185 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

$$26 \sin(\alpha + \beta) = 24x$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{12x}{13}$$

$$17^2 = 400 - 17 \cdot 6 \cdot 8 =$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 338 \\ 49 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$ON^2 = 13^2 - 12^2 x^2 = 169 - 144x^2$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 289 \\ + 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$AI^2 = 49 + 189x^2, BI^2 = 49 + 49x^2$$

$$(x^2 + 1)(189x^2 + 49) = 338x^2 = 676x^2 + 17^2 = 2 \cdot 13^2$$

$$289x^4 + 209x^2 + 49 - 338x^2 = 0$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ - 49 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$289x^4 + 209x^2 - 289x^2 - 289x^2 - 289x^2 = 0$$

$$x^4 + \frac{338}{289}x^2 - 120 = 0$$

$$\begin{array}{r} 676 \\ 49 \\ \hline 62713 \\ - 209 \end{array}$$

$$D = 338^2$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 169 \\ \times 4 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 289 \\ \times 49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$289x^4 + 338x^2 - 676$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} \times 2 = \frac{54 + 1 + 98}{27} = \frac{75}{27}$$

$$\frac{1}{27} - \frac{2}{3} - 2 = \frac{1}{27} - \frac{18}{27} - \frac{54}{27} = \frac{-71}{27}$$

$$\alpha = \frac{-71}{27}$$
$$\sin \alpha = 2x$$
$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} > \frac{1}{3}$$

$$9 - 3\sqrt{3} < 1$$

$$8 < 3\sqrt{3}$$

$$64 < 27$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3} > \frac{1}{3}$$

$$3 - 3\sqrt{3} > 1$$

$$AOE \quad NC = \frac{25}{\sin \alpha}, \quad AM = \frac{5}{\sin \beta}$$
$$AO = R = \frac{NC}{2 \sin \alpha} = \frac{1,25}{\sin^2 \alpha} = \frac{2,5}{\sin^2 \beta}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sin \alpha}$$

$$\frac{23}{4}$$

$$\frac{92}{3}$$

$$276$$

$$\times 63^2$$
$$\frac{63}{189}$$

$$\frac{1}{27}$$
$$\frac{378}{3969}$$

$$3969$$

$$1899$$

$$2070$$

$$1899 + 276 \sqrt{26} < 3969$$

$$< 276 \cdot 6$$

$$276 \sqrt{26} < 2070$$



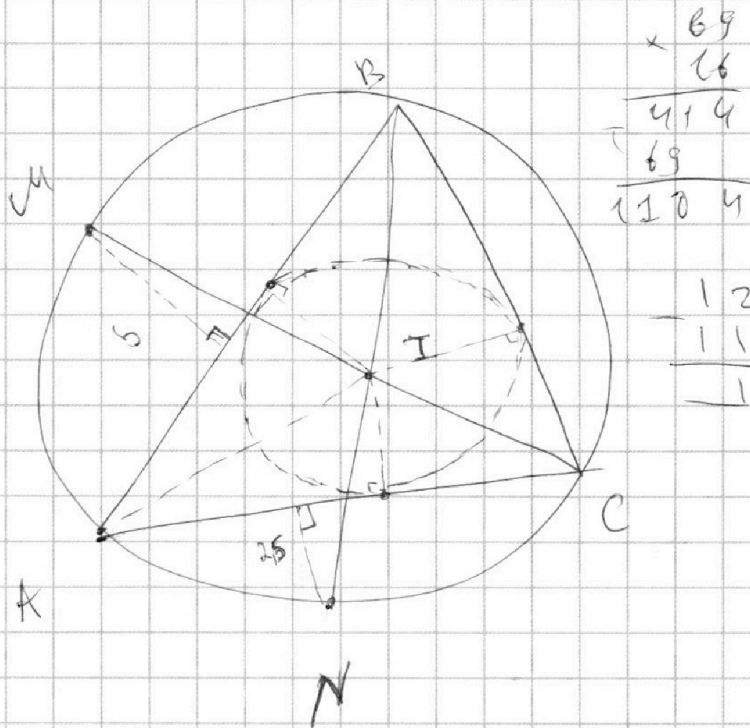
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

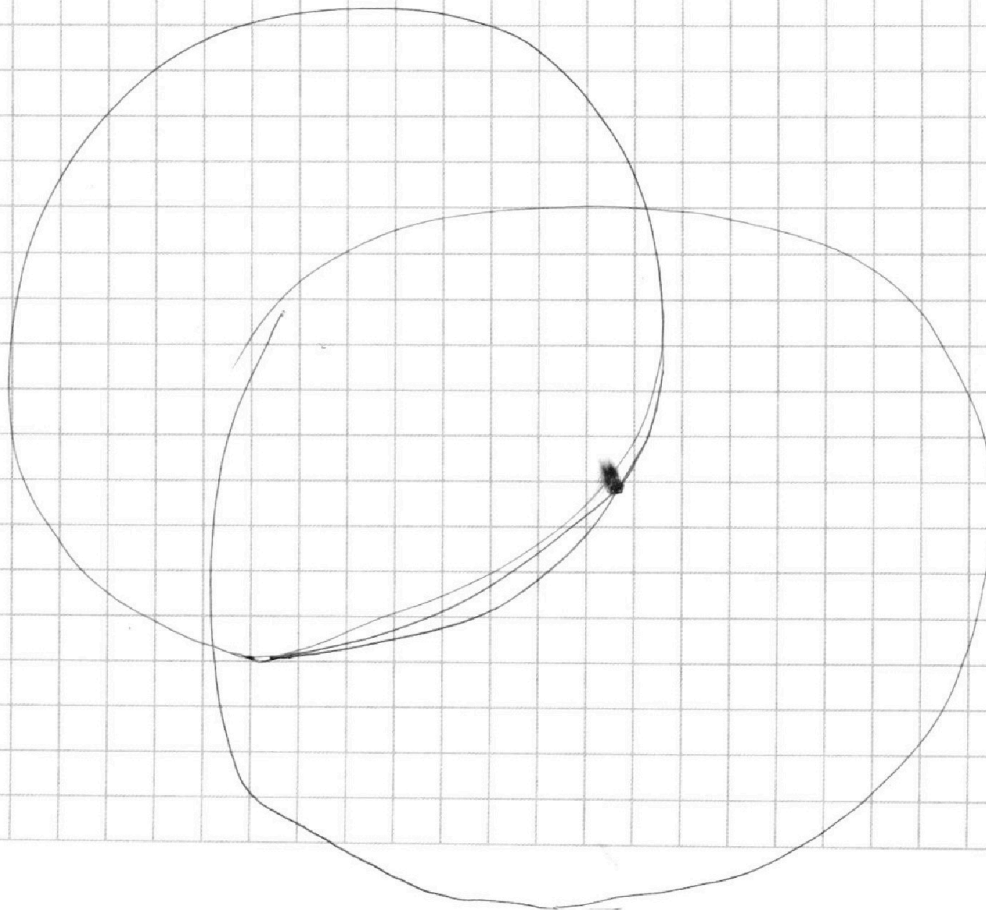


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 16 \\ \hline 414 \\ 69 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1248 & 16 \\ \hline 112 & 78 \\ \hline 128 & \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 338 \\ \times 338 \\ \hline 2704 \\ + 1014 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$627 \cdot 4 = 2400 + 25 \cdot 4 + 2 \cdot 4 =$$

$$= 2508$$

$$\sqrt{52441} =$$

$$\times \begin{array}{r} 2508 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 211 \\ \times 211 \\ \hline 211 \\ + 422 \\ \hline 44421 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2508 \\ \times 289 \\ \hline 22572 \\ + 20064 \\ \hline 5016 \\ \hline 724812 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 724812 \\ + 114244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$211^2 = 40000 + 2 \cdot 400 \cdot 11 + 121 = 40000 + 8800 + 121 = 48921$$

$$341 \mid$$

$$\begin{array}{r} 839056 \\ - 80 \\ \hline 39 \\ - 32 \\ \hline 70 \\ - 64 \\ \hline 65 \\ - 64 \\ \hline 16 \\ \hline 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 233 \\ \times 233 \\ \hline 2151 \\ + 466 \\ \hline 54489 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 38 \\ \hline 144 \\ - 133 \\ \hline 114 \\ - 114 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2151 \\ + 7717 \\ \hline 478 \\ \hline 57121 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 25 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 422 \\ \hline 1024 \\ - 844 \\ \hline 1801 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 338^2 = \\ \times \quad 338 \\ \hline 2704 \\ + 1014 \\ \hline 1014 \\ + 114244 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 627 \\ \hline 4 \\ \hline 2508 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2508 \\ \times 289 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 2508 \\ \hline 289 \\ \hline 22572 \\ + 20064 \\ \hline 5016 \\ + 724812 \\ \hline 114244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\sqrt{1+484}$$

$$\begin{array}{r} 839056 \\ - 8 \\ \hline 39 \\ - 36 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 25 \\ - 24 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 209764 \\ - 20 \\ \hline 5 \\ - 8 \\ \hline 17 \\ - 16 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 52441 \\ - 49 \\ \hline 37 \\ - 28 \\ \hline 64 \\ - 64 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 743 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 17 \\ \hline 285 \end{array}$$

$$AI = \frac{7}{\sin \alpha}$$

$$\frac{AI}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\sqrt{x^2+1} - \frac{\sqrt{289x^2+49}}{7} = 7 = 2k$$

$$289x^2 (t+1)(289t+49)$$

$$289t^2 + 338t + 49 = 4k^2 = 4 \cdot 165 = 338 - 2 = 676$$

$$289t^2 + 338t - 627$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 627 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

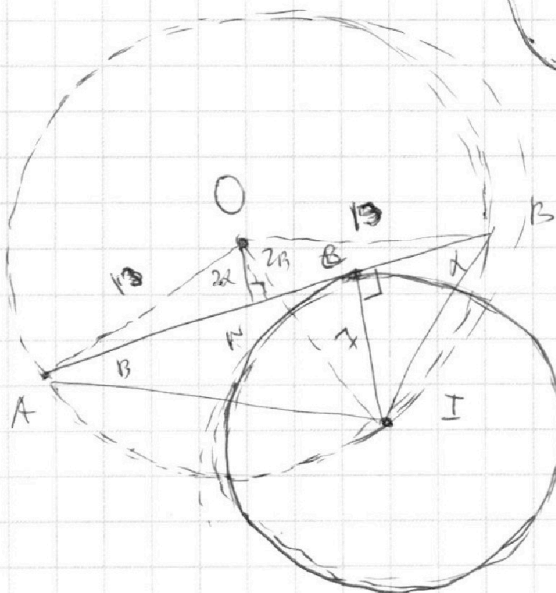
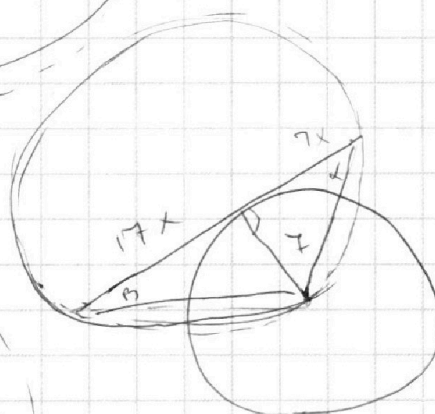
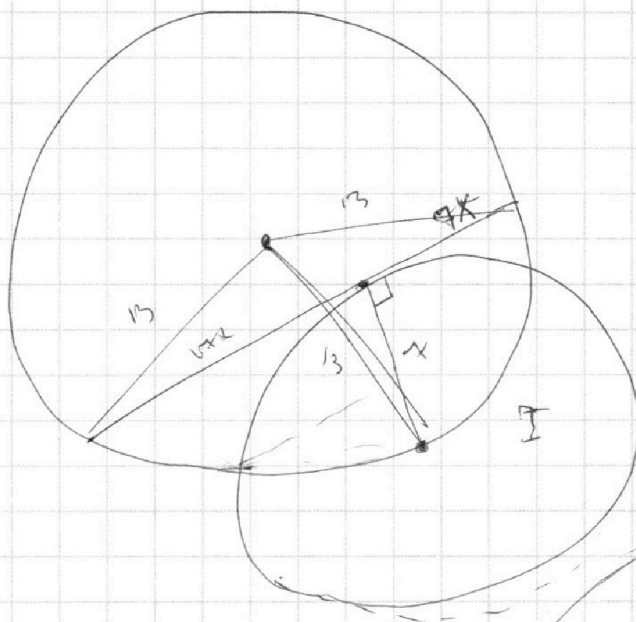
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Реш. 6. 20-120



$$2R = \frac{7 \cdot \sin B}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin B \sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{4\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{49+17x^2}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{49+17x^2}} = \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{185x^2+49} = 2R$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

388

$$\begin{array}{r} 839056 \\ - 8 \\ \hline 39 \\ - 32 \\ \hline 30 \\ - 22 \\ \hline 25 \\ - 24 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 41 \\ 29764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ - 29 \\ \hline 51 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85+51= \\ = 136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 51 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28764 \\ - 28 \\ \hline 17 \\ - 16 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ - \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 209764 \\ - 20 \\ \hline 9 \\ - 8 \\ \hline 14 \\ - 16 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4-51 \\ 52441 \\ - 196 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 458 \\ - 169 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 229 \\ \times 229 \\ \hline 2061 \\ 458 \\ \hline 52441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 229 \\ \hline 2061 \\ 458 \\ \hline 52441 \end{array}$$

$$2-229 = 8458$$
$$\begin{array}{r} 8458 \\ - 169 \\ \hline 289 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$231 \cdot 22$$

$$\begin{array}{r} 231 \\ \times 22 \\ \hline 462 \\ + 4620 \\ \hline 5082 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52441 \\ - 44 \\ \hline 84 \\ - 84 \\ \hline 00 \\ - 00 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 225 \\ \hline 110 \\ + 4400 \\ + 44000 \\ \hline 49500 \end{array}$$

$$54 + 18\sqrt{78} < 69$$

$$144 + 16 \cdot 15$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 16 \\ \hline 1104 \end{array}$$

$$\sqrt{45} \approx 6.7$$

$$6 \times$$

$$36 - 2\sqrt{12} = 3\sqrt{12}$$

$$\begin{array}{r} 1248 \\ - 12 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ - 312 \\ \hline \end{array}$$

$$78$$

$$78/2 = 39 \cdot 2$$

$$4\sqrt{78}$$

$$\frac{12 + 4\sqrt{78}}{69 \cdot 2} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{12 - 4\sqrt{78}}{69 \cdot 2} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\begin{aligned} 12 + 4\sqrt{78} &> 69 \\ 4\sqrt{78} &> 57 \\ 16 \cdot 78 &> 572 \end{aligned}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$18 + 6\sqrt{78}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{78}}{23}$$

$$3 - \sqrt{3}$$

$$6 + 2\sqrt{78} < 69 + 23\sqrt{3}$$

$$23\sqrt{3} + 2\sqrt{78} < 69$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + ax^2 - 4bax + 64b^2 - 1 = 0$$

$$\text{или } a(x^2$$



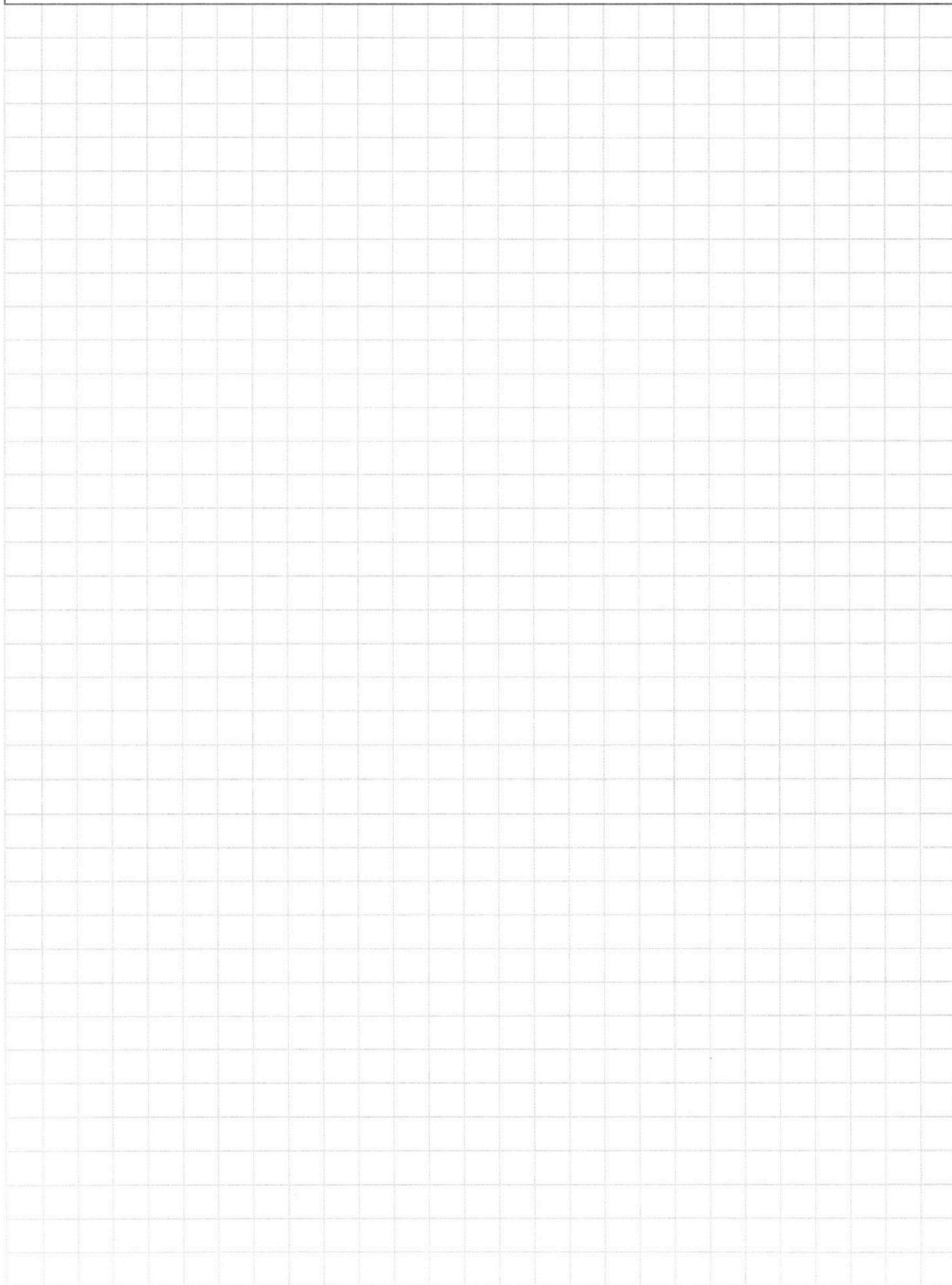
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

