



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11. Пусть k - степень вхождения простого числа 2 в a ,
 l - степень вхождения двойки в b , s - в c . То есть $a \div 2^k$,
но $a \nmid 2^{k+1}$, $b \div 2^l$, $b \nmid 2^{l+1}$, $c \div 2^s$, $c \nmid 2^{s+1}$. Тогда степени
вхождения 2 в $ab - (k+l)$, в $bc - (l+s)$, в $ac - (k+s)$

$$ab \div 2^{15} \Rightarrow k+l \geq 15 \quad (1)$$

$$bc \div 2^{17} \Rightarrow l+s \geq 17 \quad (2)$$

$$ac \div 2^{23} \Rightarrow k+s \geq 23 \quad (3)$$

$$(1) + (2) + (3): 2(k+l+s) \geq 55$$

$$k+l+s \geq 27,5.$$

По $k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}$, так как числа a, b, c - натуральные.

Значит, $k+l+s$ - целое $\Rightarrow k+l+s \geq 28 \Rightarrow abc \div 2^{28}$.

Пусть d - степень вхождения простого числа 7 в a , e - в b ,
 f - в c . Тогда степень вхождения 7 в $ab - (d+e)$, в $bc -$
 $(e+f)$, в $ac - (d+f)$.

$$ab \div 7^{21} \Rightarrow ac \div 7^{39} \Rightarrow d+f \geq 39 \Rightarrow d+e+f \geq 39, \text{ так как}$$

$e \in \mathbb{N}$ или $e = 0$ - степень вхождения простого в натуральное
число. Значит, $abc \div 7^{39}$.

Итак, $abc \div 2^{28}$, $abc \div 7^{39}$. Числа 2^{28} и 7^{39} взаимно
просты, поэтому $abc \div 2^{28} 7^{39} \Rightarrow abc \geq 2^{28} 7^{39}$, так как $abc \in \mathbb{N}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1, Вторая часть.

Теперь проведем примера чисел a, b, c с данными разложением:

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}, \quad b = 2^5, \quad c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$ab = 2^{10+5} \cdot 7^{11} = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{5+13} \cdot 7^{28} = 2^{18} \cdot 7^{28}$$

$$ac = 2^{10+13} \cdot 7^{11+28} = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{10+5+13} \cdot 7^{11+28} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Ответ: наименьшее возможное значение произведения abc равно $2^{28} \cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2. Так как числитель и знаменатель дроби можно
сократить на m , то $(a+b) \div m$, $(a^2 - 7ab + b^2) \div m$.

$$(a+b) \div m \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \div m$$

$$(a^2 + 2ab + b^2) \div m, (a^2 - 7ab + b^2) \div m \Rightarrow (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 7ab + b^2) =$$
$$= 9ab \div m$$

Предположим, что a и m не взаимно просты, то
есть существует простое число p такое, что
 $a \div p$, $m \div p$. $(a+b) \div m$, $m \div p \Rightarrow (a+b) \div p$.

$$(a+b) \div p, a \div p \Rightarrow b \div p.$$

Но это противоречит условию, так как по условию
дробь $\frac{a}{b}$ несократима, а мы получили, что $a \div p$, $b \div p$.

Значит $\text{НОД}(a; m) = 1$. Аналогично $\text{НОД}(b; m) = 1$.

$$9ab \div m, \text{НОД}(a; m) = 1, \text{НОД}(b; m) = 1 \Rightarrow 9 \div m \Rightarrow m \leq 9.$$

На $m=9$ есть пример: $a=1 \in \mathbb{N}$, $b=8 \in \mathbb{N}$.

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{1+8}{1+64-56} = \frac{9}{9} = 1. \text{ Больше, чем } 9 \text{ на } 9 \text{ числитель}$$

и знаменатель дроби

сократить нельзя, так как в числителе записана 9.

Ответ: наибольшее m , на которое можно сократить чис-
литель и знаменатель дроби, равно 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

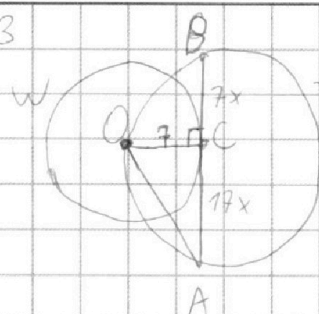
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



Пусть O - центр ω .

Пусть $AC = 17x$, тогда $BC = 7x$,
так как $\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$.

$OC \perp AB$ как радиус, проведенный в
точку касания. $OC = 7$ - радиус ω .

$\sin \angle OAC = \frac{OC}{OA}$ из прямоугольного $\triangle OAC$.

По теореме Пифагора для прямоугольного $\triangle OAC$

$OA = \sqrt{7^2 + 289x^2}$, для прямоугольного $\triangle OCB$ $OB = \sqrt{49 + 49x^2}$

$$\sin \angle OAC = \frac{7}{\sqrt{7^2 + 289x^2}}$$

По обобщенной теореме синусов для $\triangle OAB$ $\frac{OB}{\sin \angle OAC} = R =$
 $= 26$, так как радиус Ω равен 13.

$$\text{Итак, } 26 = \frac{OB}{\sin \angle OAC} = \frac{\sqrt{49 + 49x^2} \cdot \sqrt{7^2 + 289x^2}}{7}$$

$$7 \cdot 2 \cdot 13 = \sqrt{49 + 49x^2} \cdot \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$7^2 \cdot 2^2 \cdot 13^2 = 7^2 \cdot 7^2 + 7^2(49 + 289)x^2 + 7^2 \cdot 17^2 x^4 \quad | : 7^2 > 0;$$

$$17^2 x^4 + 2 \cdot 13^2 x^2 + 49 - 4 \cdot 13^2 = 0.$$

Пусть $x^2 = t \Rightarrow t \geq 0$.

$$17^2 t^2 + 2 \cdot 13^2 t + 49 - 4 \cdot 13^2 = 0$$

Получим, что $t = 1$ является корнем:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3, вторая часть

$$289 + 338 + 49 - 338 \cdot 2 = 289 + 49 - 338 = 0$$

Пусть t_2 - второй корень (возможно, совпадающий с первым).

$$\text{По теореме Виета } t_1 t_2 = \frac{49 - 4 \cdot 13^2}{17^2} < 0.$$

По $t_2 \geq 0$, так как квадрат числа неотрицателен ($t = x^2$).

Значит, $x^2 = 1 \Rightarrow |x| = 1$. По $x \geq 0$, так как $17x$ - длина отрезка. Значит, $x = 1$.

$$AB = AC + CB = 24x = 24.$$

$C \in [AB]$, так как по условию задачи окружность ω касается хорды AB , а не ее продолжения.

Рисунком, приведенным в начале решения, я нигде не пользовалась.

Ответ: $AB = 24$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4. Проверим, что $x = \frac{1}{9}$ является корнем:

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = \sqrt{\frac{3 - 54 + 162}{81}} - \sqrt{\frac{3 + 27 + 81}{81}} = \sqrt{\frac{111}{81}} - \sqrt{\frac{111}{81}} = 0$$

$$1 - 9x = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9} = 0. \text{ Далее считаем, что } x \neq \frac{1}{9}.$$

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = 1 - 9x \mid \cdot (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}).$$

Докажем, что то, на что мы делим, не равно 0.

~~$\sqrt{3x}$~~ Корень числа неотрицателен, поэтому сумма двух корней равна 0, только если каждый корень равен 0.

Это есть в случае, когда $3x^2 - 6x + 2 = 0 = 3x^2 + 3x + 1$

$$1 = 9x \Rightarrow x = \frac{1}{9}, \text{ но}$$

$x = \frac{1}{9}$ мы больше не рассматриваем. Итак, мы можем делить на сумму корней.

$$(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1})$$

$$\cancel{3x^2} - 6x + 2 - \cancel{3x^2} - 3x - 1 = (1 - 9x)(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) \mid : (1 - 9x) \neq 0,$$

т.к. $x \neq \frac{1}{9}$

$$1 = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\cancel{x} + \cancel{3x^2} - 6x + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \cancel{3x^2} + 3x + \cancel{1}$$

$$2 - 9x = 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$81x^2 - 36x + 4 = 12x^2 - 24x + 8$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4, вторая часть

$$D = 12^2 + 16 \cdot 69 = 144 + 16 \cdot 60 + 144 = 960 + 288 = 1000 + 248 = 1248 = 4 \cdot 312 = 4 \cdot 4 \cdot 78$$

$$x_1 = \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69}$$

$$x_2 = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69}$$

$$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$$

~~$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$ и $3x^2 + 3x + 1 > 0$, т.к. квадрат под знаком радикала.~~

~~$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$~~

~~$$D = 36 + 4 \cdot 6 = 60$$~~

~~$$x \in (-\infty; \frac{6 - \sqrt{60}}{6}] \cup [\frac{6 + \sqrt{60}}{6}; +\infty)$$~~

Подставим $x = x_1$

~~$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right) + 2} + \sqrt{3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\right) + 1} =$$

$$= \frac{1}{23} \sqrt{\frac{36 + 4 \cdot 78 - 24\sqrt{78}}{3} - 2(6 - 2\sqrt{78}) + 2 + 23^2} + \sqrt{\frac{36 - 24\sqrt{78} + 4 \cdot 78}{3} + 23(6 - 2\sqrt{78}) + 23^2} =$$

$$= \frac{1}{23} \sqrt{12 + 104 - 8\sqrt{78} + 23(46 - 12) + 92\sqrt{78}} + \sqrt{12 + 104 - 8\sqrt{78} + 23 \cdot 29 - 46\sqrt{78}} =$$

$$= \frac{1}{23} \sqrt{12 + 104 - 8\sqrt{78} + 23 \cdot 29 - 46\sqrt{78}} =$$~~

Теперь проверим эти корни, ведь в процессе решения мы совершили неравносильные переходы. x_1 и x_2 корни уравнения $(2 - 9x)^2 = (2\sqrt{3x^2 - 6x + 2})^2$. Из этого следует равенство

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4, третья часть

$$2-9x = 2\sqrt{3x^2+3x+1}, \text{ если } 2-9x \geq 0 \text{ и } 3x^2+3x+1 \geq 0.$$

Заметим, что второе условие выполнено всегда:

$$3x^2+3x+1 = 0,75x^2 + 2,25x^2 + 3x + 1 = 0,75x^2 + (1,5x+1)^2 \geq 0.$$

$$2-9x_1 = 2 - 9 \cdot \frac{6-2\sqrt{78}}{69} = \frac{138-54+18\sqrt{78}}{69} = \frac{18\sqrt{78}+84}{69} > 0. \text{ верно}$$

$$2-9x_2 = 2 - 9 \cdot \frac{6+2\sqrt{78}}{69} = \frac{138-54-18\sqrt{78}}{69} = \frac{84-18\sqrt{78}}{69} \leq \frac{84-18 \cdot 5}{69} < 0,$$

так как $\sqrt{78} > \sqrt{25} = 5$.

Итак, ~~из~~ для $x = x_2$ из равенства $69x^2 - 12x - 4 = 0$ следует

$$9x-2 = 2\sqrt{3x^2-6x+2}, \text{ а для корней исходного}$$

уравнения верно $2-9x = 2\sqrt{3x^2-6x+2}$. При этом $2-9x \neq 9x-2$,

$$\text{так как } x_2 = \frac{6+2\sqrt{78}}{69} \neq \frac{2}{9}.$$

$$\text{А для } x = x_1 \text{ верно } 2-9x = 2\sqrt{3x^2-6x+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{верно } (1-\sqrt{3x^2-6x+2})^2 = (\sqrt{3x^2+3x+1})^2. \text{ Из этого следует}$$

необходимое равенство $1 = \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}$, если

$$3x^2-6x+2 \geq 0 \text{ (справа под корнем)} \text{ и } \sqrt{3x^2-6x+2} \leq 1.$$

$$0 \leq 3x^2-6x+2 \leq 1.$$

$$3x^2-6x+1 \leq 0 \leq 3x^2-6x+2.$$

$$3x^2-6x+1 \leq 0$$

$$D = 36 - 12 = 24$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4, четвертая часть

$x \in \left[\frac{6-2\sqrt{6}}{6}; \frac{6+2\sqrt{6}}{6} \right]$, так как верши параболы направлены
вверх (т.к. $3 > 0$)

$$x \in \left[1 - \frac{\sqrt{6}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \right]$$

Проверим $x = x_2$ на принадлежность этому промежутку

$$\frac{6-2\sqrt{78}}{69} < \frac{6-2 \cdot 5}{69} < 0, \text{ т.к. } \sqrt{78} > \sqrt{25} = 5.$$

А для $x \in \left[1 - \frac{\sqrt{6}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \right]$ верно $x \geq 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{6}}{3} > 0$.

Противоречие. Значит, для $x = x_1$ из равенства

$$(1 - \sqrt{3x^2 - 6x + 2})^2 = (\sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 \text{ следует}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1 = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \text{ если } 3x_1^2 - 6x_1 + 2 > 0 \text{ (иначе этот корень не подходит сразу)}$$

Но $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - 1 = -\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ для корней исходного
равенства. Значит, это может быть верно, только

если $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = -\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$, т.е. если $3x^2 + 3x + 1 = 0$.

$$D = 9 - 4 \cdot 3 < 0 \Rightarrow$$

у этого уравнения корней нет.

Значит, ни $x = x_1$, ни $x = x_2$ не являются корнями исходного
уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{3}$ — единственный корень.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6. Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задаёт окружность с центром $(0; 0)$ и радиусом 1. Уравнение $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$ задаёт окружность с центром $(0; 12)$ и радиусом 4. Если точка находится ^{внутри} обеих окружностей, то для её координат верно $x^2 + y^2 - 1 > 0, (x^2 + (y - 12)^2 - 16) > 0 \Rightarrow \Rightarrow$ для неё неверно второе условие системы. Если точка лежит на одной из окружностей, то соответствующее выражение обращается в 0, и для неё верно второе неравенство системы. Так как окружности не пересекаются (расстояние между центрами $12 > 5 = 4 + 1$ — сумма радиусов), то точка, лежащая внутри одной окружности, лежит вне другой $\Rightarrow$ одно из выражений $x^2 + y^2 - 1$ и $x^2 + (y - 12)^2 - 16$ при подстановке её координат будет отрицательным, а другое — положительным. Значит, второе условие системы $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$ удовлетворяют точки внутри окружностей и на них.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

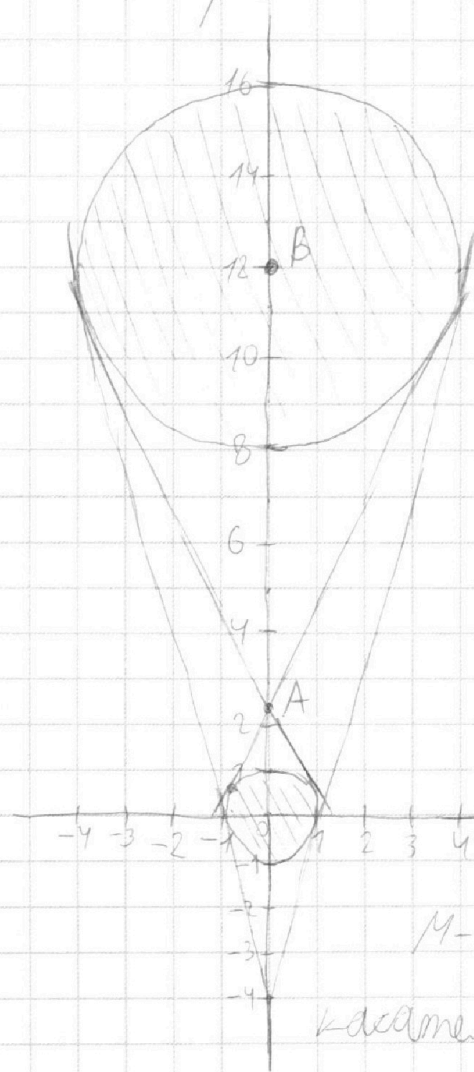
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ax+y-8b=0$ задает прямую. По условию задачи эта прямая должна пересекать эти два круга в двух точках. Если она пересекает один из кругов в двух точках, то она пересекает его по хорде, то есть система имеет больше двух решений. Значит, прямая пересекает каждый из кругов ровно в одной точке $\Rightarrow$ прямая касается $\&$ обеих окружностей.



Сначала найдем условный коэффициент обобщающей касательных. Они пересекают ось ординат в точке $(0; 2.4)$, так как делят отрезок, соединяющий центры, в отношении радиусов $\frac{2.4}{6} = \frac{1}{4}$.

$$y = -ax + 8b \Rightarrow 8b = 2.4 \Rightarrow b = 0.3$$

Пусть $A(0; 2.4)$, $B(0; 12)$,
 M - точка касания обобщающей касательной с $\&$ верхней $\&$

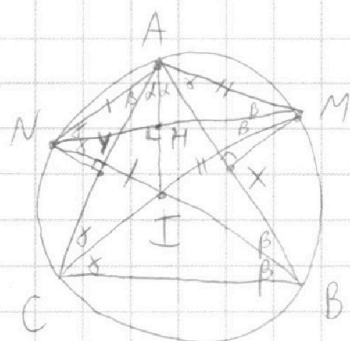
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



М-ср Пусть X - середина AB , Y - середина AC .

$MX \perp AB$ (срединный перпендикуляр к отрезку AB), аналогично, $NY \perp AC$.

Значит, $\rho(M; AB) = MX = 5$, $\rho(N; AC) = NY = 2,5$.

Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$. M - середина дуги $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow CM$ - биссектриса $\angle ACB \Rightarrow \angle ACM = \angle BCM = \gamma$.

N - середина дуги $AC \Rightarrow BN$ - биссектриса $\angle ABC \Rightarrow \angle ABN = \angle CBN = \beta$.

Кроме того $I = BN \cap CM$ - центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, $\Rightarrow \angle CAI = \angle BAI = \alpha$.

$\angle NAC = \angle NBC = \beta$, т.к. опираются на одну и ту же дугу.

Аналогично, $\angle NMC = \angle NMA = \beta$, $\angle MAB = \angle MNB = \angle ANM = \gamma$.

По лемме о хордах $AN = AI$, $AM = MI \Rightarrow NM \perp AI$ (срединный перпендикуляр к отрезку AI). Значит, $H = AI \cap NM$ - середина AI .

Из прямоугольного $\triangle ANH$ $\sin \gamma = \sin \angle ANH = \frac{AH}{AN}$.

Из прямоугольного $\triangle AMX$ $\sin \gamma = \sin \angle MAX = \frac{MX}{MA} = \frac{5}{AM}$. (1)

$$\frac{AH}{AN} = \frac{5}{AM} \Rightarrow AH = \frac{5AN}{AM}$$

Из прямоугольного $\triangle ANY$ $\sin \beta = \sin \angle NAY = \frac{NY}{AN} = \frac{2,5}{AN}$. (2)

По теореме синусов в $\triangle ANM$ $\frac{AM}{\sin \gamma} = \frac{AN}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{AM}{AN}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7, вариант 2016
(1):(2)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{5 \cdot AN}{AM \cdot 2,5} = \frac{2AM}{AM}$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2AM}{AM}$$

$$AM^2 = 2AN^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AN}{AM}$$

$$\text{Зная, } AH = 5 \frac{AN}{AM} = \frac{5}{\sqrt{2}}; AI = 2AH = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Ответ: } AI = 5\sqrt{2}.$$



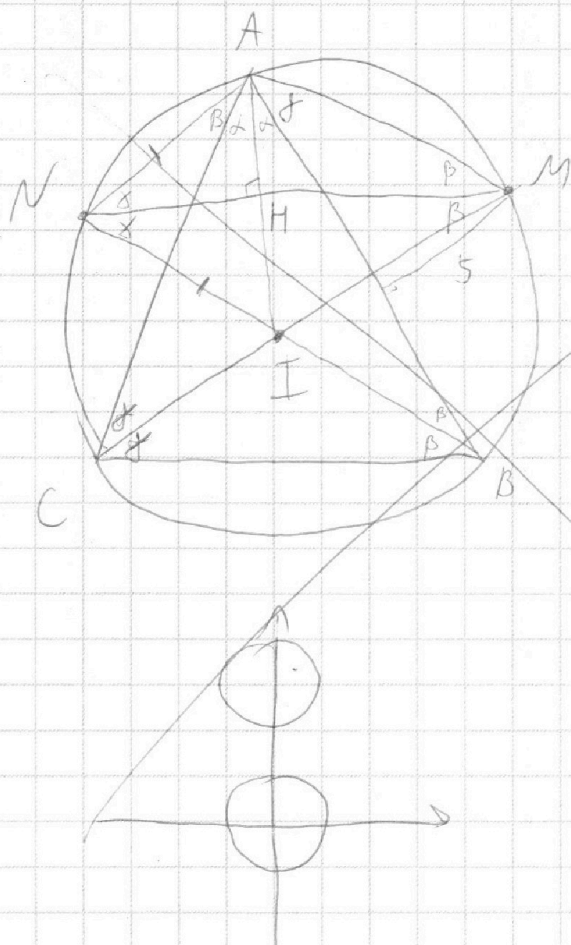
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AH}{AN} = \sin \alpha = \frac{5}{AM}$$

$$\sin \beta = \frac{2.5}{AN}$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2.5 \cdot AN}{AM \cdot 2.5}$$

$$AM^2 = 2AN^2 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AN}{AM}$$

$$AH = 5 \frac{AN}{AM} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 169 \\ \hline 169 \\ 1521 \\ 1014 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ \times 289 \\ \hline 29 \\ 2611 \\ 578 \\ \hline 8391 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ + 1156 \\ 169 \\ \hline 1325 \end{array}$$

$$5 \cdot 265 = 25 \cdot 53$$

$$\begin{array}{r} \times 28561 \\ \hline 114214 \\ 839100 \\ \hline 053344 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 998 \\ \hline 998 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 956 \\ \hline 956 \\ 5736 \\ 4780 \\ 8504 \\ \hline 903936 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 968 \\ \hline 968 \\ 7744 \\ 5808 \\ 8712 \\ \hline 937024 \end{array}$$

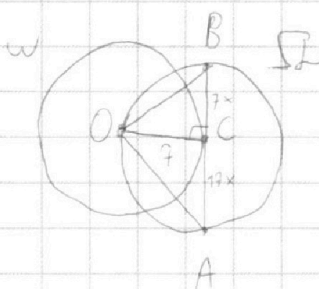
$$\begin{aligned} dx^2 - 20x + c \\ 40^2 - 40c = 0 \\ 20 \pm \sqrt{40^2 - 40c} \\ 2a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5400 + 420 + 36 \\ 6300 + 420 + 42 \\ 8100 + 630 + 54 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 978 \\ \hline 978 \\ 7824 \\ 6846 \\ 8802 \\ \hline 956484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 976 \\ \hline 976 \\ 5856 \\ 6832 \\ 8784 \\ \hline 952576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 280 \\ 49 \\ \hline 338 \end{array}$$



$$OB = \sqrt{49 + 49x^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{49 + 289x^2}}$$

$$\sqrt{49 + 49x^2} \cdot \sqrt{49 + 289x^2} = 26$$

$$7^2 + 7(7^2 + 17^2)x^2 = 2^2 \cdot 13^2$$

$$17x^4 + 2 \cdot 13^2x^2 + 7^2 - 4 \cdot 13^2 = 0$$

$$13^4 - 4 \cdot 17^2 \cdot 7^2 + 17^2 \cdot 4 \cdot 13^2 =$$

$$= 13^2(169 + 1156) - 119^2 = 65^2 \cdot 53 - 119^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

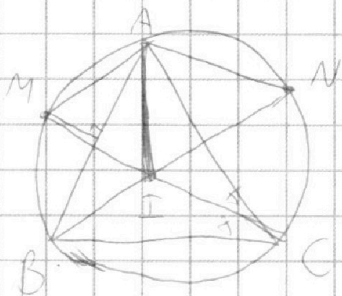
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3(x^2 - 2x + 1) - 1$$

$$36 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 36 + 24 = 60$$



$$y = 88 - ax$$

$$y = ax = 88$$

$$AB = \frac{10}{\cos \alpha}$$

$$\frac{AB}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{10 \cdot 2}{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{2,5}{\sin \beta \cos^2 \beta}$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} \sqrt{6 - 2\sqrt{78}}$$

$$\frac{69}{6}$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{23} \sqrt{3 - \sqrt{78}}$$

$$\frac{2,5}{AB} = \cos \alpha$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{78}}{23} \sqrt{69 - 23\sqrt{78}}$$

$$23\sqrt{78} \sqrt{69 - 23\sqrt{78}}$$

$$23^2 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{3 \cdot 78} + 23 \cdot 3 \cdot 59 + \dots + 126\sqrt{78}$$

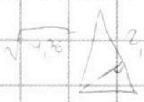
$$a) \frac{\sqrt{4,76}}{2,4} + \frac{1}{2,4} - 2,4 = 0$$

$$-\sqrt{4,76} + 1 - 5,76 = 0$$

$$d =$$



$$98 = 3 \cdot 26$$



$$-a \frac{\sqrt{4,76}}{2,4}$$

$$625 - 49 = 576$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$2,4 =$$

$$3 \left((x-1)^2 - \frac{1}{3} \right)$$

$$3(x-1)^2 - 1$$

$$b = 0,3$$

$$(ax - 2,4)^2 + x^2 - 1 = 0$$

$$(a^2 + 1)x^2 - 4,8ax + 4,76 = 0$$

$$ax + y - 2,4 =$$

$$\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\begin{array}{r} \times 48 \\ 376 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 48 \\ 384 \\ \hline 192 \\ 2304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 4,76 \\ 19,04 \end{array}$$

$$2304 - 19,04(a^2 + 1) = 0$$

$$5 - 19,04a^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{5}{4,476}$$



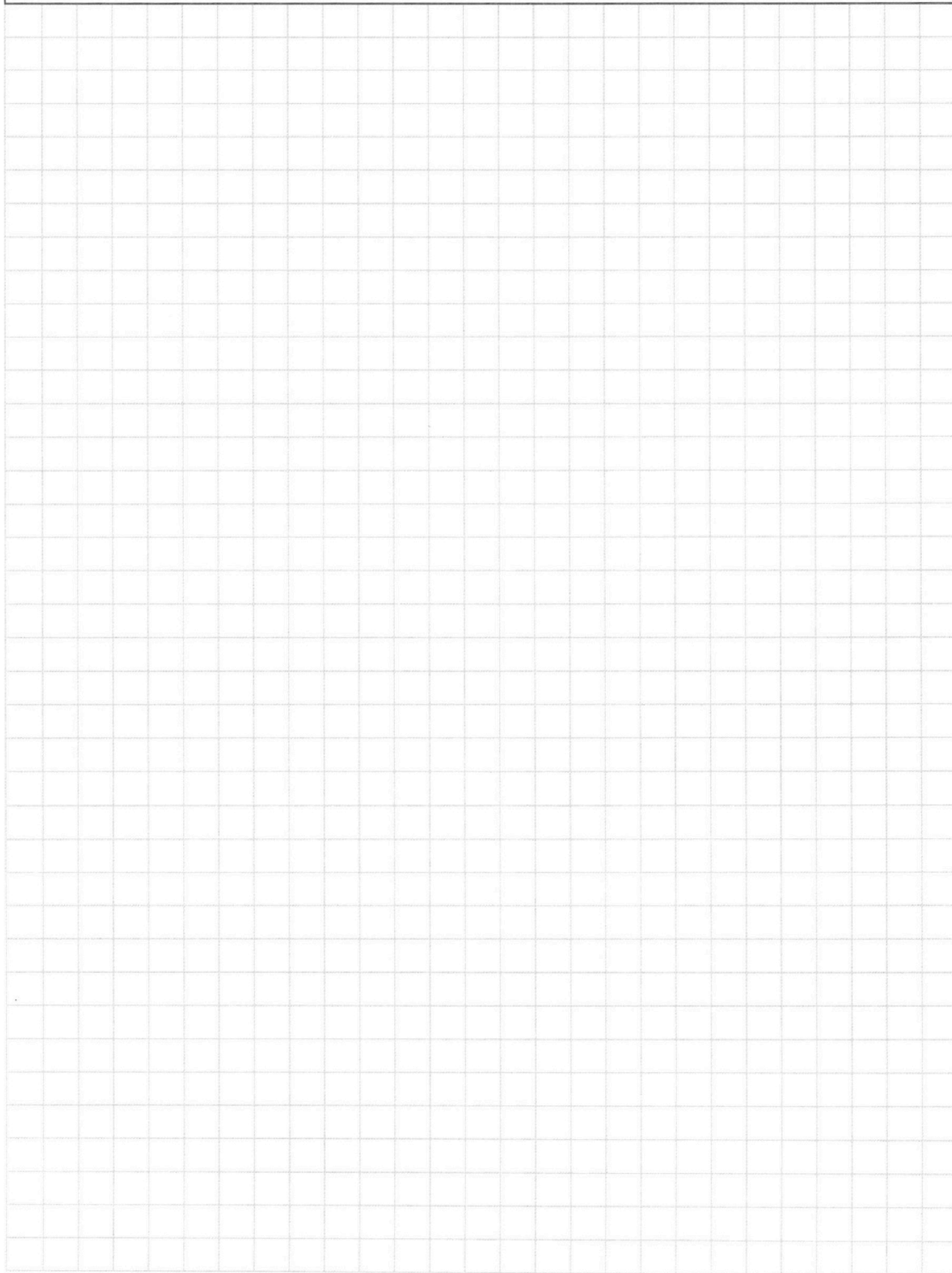
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





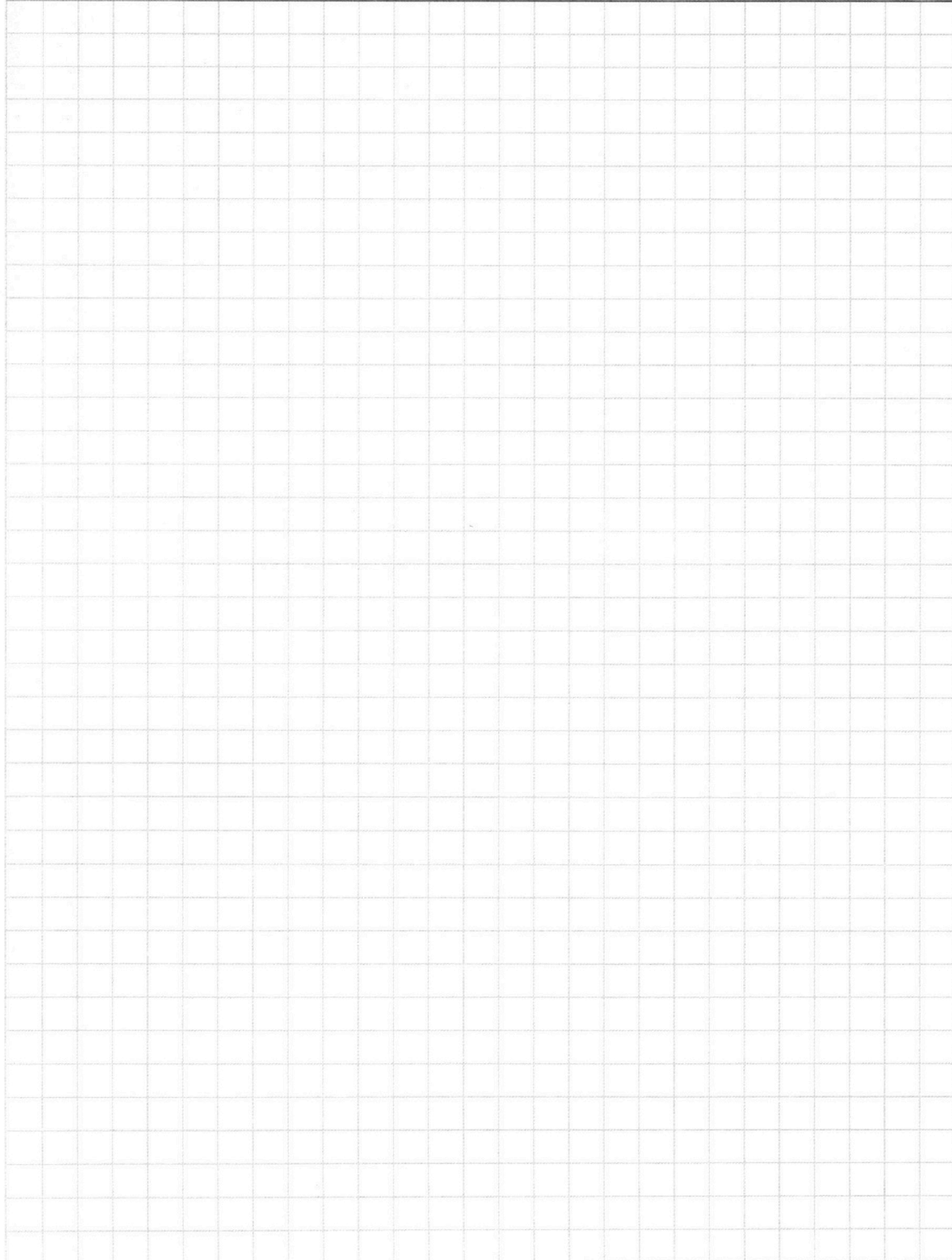
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





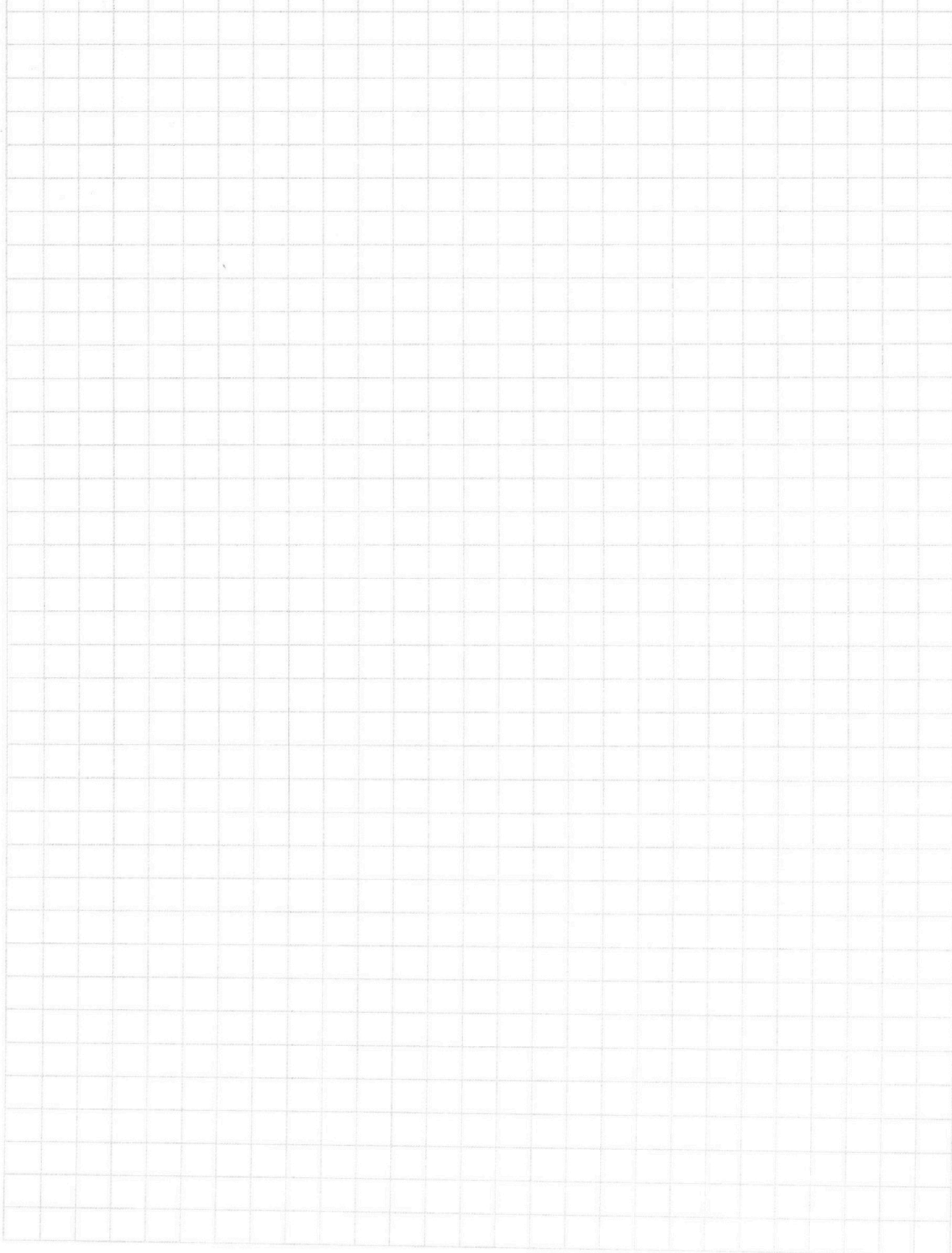
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





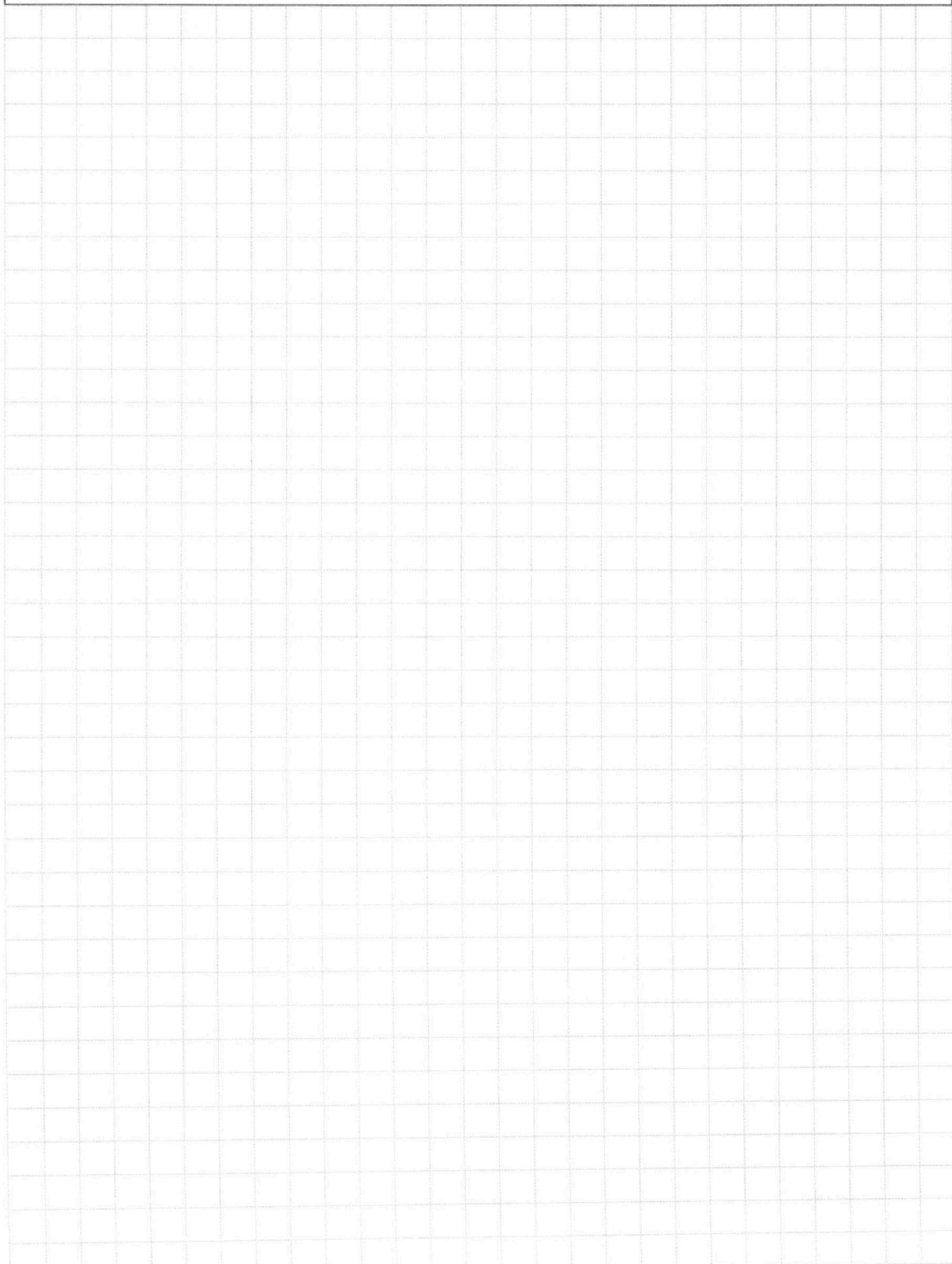
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

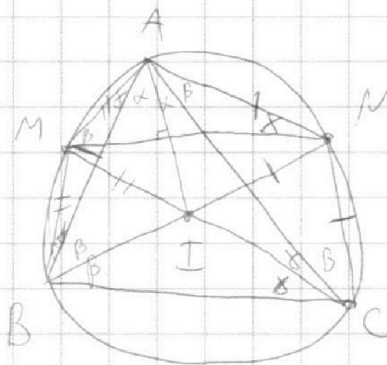
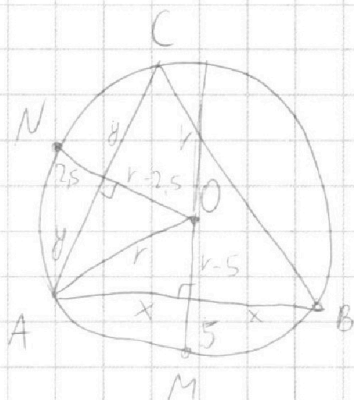
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{\bar{S}}{MB} = \sin x$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 15 \\ + 17 \\ \hline 32 \\ + 23 \\ \hline 55 \end{array}$$

6-2-2020

$$(x-5) \cdot 5 = x^2$$

$$X^2 = 10V - 25$$

$$y^2 = 2,5(x-2,5)$$

$$y^2 = 51 - 6,25$$

$$\frac{MA}{BT} = \frac{AN}{IC} = \frac{MN}{BC}$$

$$C = 0$$

$$a = 11$$

$$f = 28$$

$$\begin{array}{r} -12 \\ 72 \overline{) 84} \\ \underline{72} \\ 12 \end{array}$$

d. 7

$d + e = 2, 11$

674

$$e + f \geq 17$$

62

$$d + f \geq 39$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 23 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$d + e + f \geq 34$$

$$5r - 6,25 + r^2 - 5r + 6,25$$

4 Spic. MI. IN 090

BI-IC-MN

$$k+l+s=28$$

$$a \quad \cdot \quad 2^k$$

$\theta; 2'$

C. 2 S

$$k+1 \geq 15$$

$1 + 5 \geq 17$

$$K + S > 23$$

$$k+1+s \geq 28$$

$S = 13$
 $K = 10$
 $I = 5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a, b) = 1.$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2-9ab}$$

$$4 \cdot 13^2 = 289x^4 + 338x^2 + 49$$

$$289x^4 + 2 \cdot 169x^2 - 725.$$

$$4 \cdot 13^4 + 4 \cdot 17^2 \cdot 5 \cdot 29$$

$$\begin{array}{r} x = \frac{6-2\sqrt{12}}{69} \\ x^2 = \frac{36+312-12\sqrt{12}}{69^2} \end{array}$$

$$a+b \div m \div p$$

$$(a+b)^2 \div m$$

$$9ab \div m$$

$$a \div p$$

$$b \div p$$

$$9 \div m$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 289 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 338 \\ - 627 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \cdot 169$$

$$725 =$$

$$= 5 \cdot 145 =$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 29$$

$$4 \cdot 169$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 338 \\ \hline 2366 \\ - 730 \\ \hline 499 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 730 \\ - 499 \\ \hline 231 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 231 \\ - 235 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 99 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 11 \\ \hline \end{array}$$

$$(10+7)(10+7) =$$

$$= 100 + 140 + 49$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

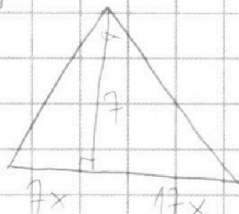
$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \\ - 119 \\ \hline \end{array}$$

$$BO^2 = 49 + 49x^2$$

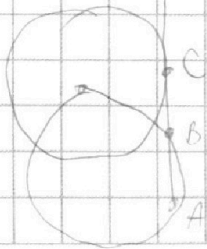
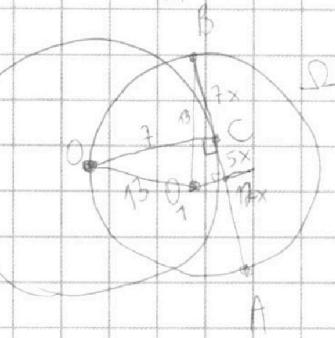
$$AO = 49 + 289x^2$$

$$3\sqrt{12}$$



$$\frac{24x}{\sin x} = 26$$

$$\sin x = \frac{12x}{13}$$



$$7 \cdot \frac{24x}{13} = \frac{12x}{13} \cdot \sqrt{49 + 49x^2} \cdot \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$14 \cdot 13^2 = 49 \cdot 289x^4 + 49(49 + 289x^2)x^2 + 49 \cdot 49$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 4225 \\ 53 \\ \hline 12675 \\ 21125 \\ \hline 223925 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 119 \\ 119 \\ \hline 1071 \\ 119 \\ \hline 14161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 10 = 10 \\ 223925 \\ - 14161 \\ \hline 209764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 172 \\ 172 \\ \hline 344 \\ 1204 \\ 172 \\ \hline 29584 \end{array}$$

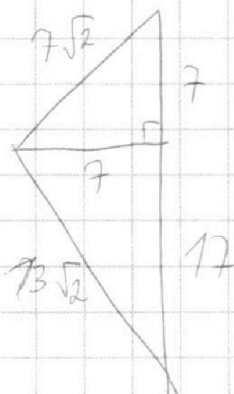
$$\begin{array}{r} \times 462 \\ 462 \\ \hline 924 \\ + 2772 \\ \hline 1848 \\ 213444 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 478 \\ 478 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 458 \\ 458 \\ \hline 3664 \\ 2290 \\ \hline 1832 \\ 209764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 10 = 10 \\ 458 \\ - 169 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 169 + 458 \\ \hline 289 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} + 289 \\ 49 \\ \hline 7\sqrt{2} \\ 7 \\ \hline 13\sqrt{2} \end{array} = \frac{7\sqrt{2} \cdot 13\sqrt{2}}{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on grid paper:

Graphs and calculations:

Graph 1: A curve passing through (0,0) and (26,0). The area under the curve is shaded. Calculations: $144 + 16 \cdot 69$, $240 - 13$, $36 + 36 = 72$, $6^2 + 4 \cdot 69$, $312 = 4 \cdot 78$.

Graph 2: A triangle with vertices at (-13,0), (0,0), and (16,0). The area is shaded. Calculations: $144 + 16 \cdot 69$, 1104 , 144 , 1248 , $312 = 4 \cdot 78$.

Equations and calculations:

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1$$

$$81x^2 + 3x^2 - 6x + 2 + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$81x^2 - 9x$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$(\sqrt{3x^2 + 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}) / (1 - 9x) = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1$$

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$3x^2 + 6x + 2 = 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$$3x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$144 - 48 = 96$$