



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}, \quad bc: 2^{17} \cdot 7^{17}, \quad ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Во-первых, $abc: 2^{20} \cdot 7^{37}$, так как

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Чтобы abc было наименьшим, оно не должно делиться на другие делители, кроме 2 и 7, так как иначе abc будет больше.

$$\begin{array}{l} \cancel{ab: 2^{14} \cdot 7^{10}} \\ ab: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow a^2 b^2 c^2: 2^{51} \cdot 7^{64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc: \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64}}$$

$$\begin{array}{l} abc: 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2} \quad (\text{округляем в большую сторону}) \\ abc: 2^{26} \cdot 7^{32} \end{array}$$

Но $abc: 7^{37} \Rightarrow$ Наименьшее $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Например, $\begin{array}{l} a = 7^{20} \cdot 2^9 \\ b = 2^6 \cdot 7^{17} \\ c = 7^{11} \cdot 2^{11} \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} ab = 2^{15} \cdot 7^{20} \cdot 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot 2^{17} \cdot 7^{12} \\ ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot 2^{11} \cdot 7^{37} \end{array}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

~~а~~ ~~а~~ $\frac{a}{b}$ - несократима

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$ - сократима на $m \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a+b) : m \Rightarrow (a^2+2ab+b^2) : m \quad / \Rightarrow$$

$$(a^2-6ab+b^2) : m$$

$$\Rightarrow \text{Так как } a^2+2ab+b^2 : m, \text{ то и } a^2-6ab+b^2 : m$$

След. разность кратна $m \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a^2+2ab+b^2) - (a^2-6ab+b^2) : m$$

$$8ab : m$$

Так как $8ab : m$, значит m - делитель $8ab$.

Но m не должно быть кратно a или b , так как если $m : a$, то

$$(a+b) : a \Rightarrow (a+b) : a \Rightarrow \cancel{a+b} = a \cdot k$$

$$\Rightarrow b : a \Rightarrow \frac{a}{b} - \text{дробь была бы сокра-}$$

тима, но по условию она несократима $\Rightarrow m \nmid a$

Аналогично $m \nmid b$, так как иначе $(a+b) : b$

$\Rightarrow a : b \Rightarrow \frac{a}{b}$ - дробь сокра-
тима, а по условию она несократима, а $\Rightarrow$
 $\Rightarrow m_{\max} = 8$ (например $a=1, b=7$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m_{\max} = 8$$

Например, $a=1$ $b=7$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{7} \text{ — дробь не сократима}$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{1+7}{1-42+49} = \frac{8}{8} \text{ — дробь сокращается на } 8$$

Также $a^2+2ab+b^2 : m \Rightarrow 3a^2+6ab+3b^2 : m$
 $a^2-6ab+b^2 : m$

Их сумма также кратна $m \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4a^2+4b^2 : m$$

$$4(a^2+b^2) : m$$

При $m \nmid 4a^2+4b^2$ Если m — делитель $a^2+b^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a+b : a^2+b^2, \text{ но так } a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b \leq a^2+b^2 \Rightarrow \text{Если } a+b < a^2+b^2, \text{ то}$$

$$a+b \nmid a^2+b^2 \Rightarrow m \nmid a^2+b^2$$

$$\text{Если } a+b = a^2+b^2 \Rightarrow a=1 \text{ (при } a, b \in \mathbb{N})$$

$$b=1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \text{ — сократима, что не подходит}$$

по условию $m \nmid a^2+b^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow m$ может быть кратна 4 но не
 больше максимальной $m \Rightarrow 8 > 4 \Rightarrow m=8$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

Дано: ω , Ω
AB - кас. к ω

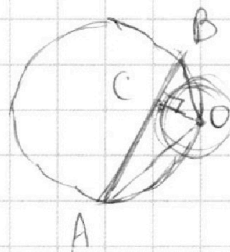
$$AC:CB = 7$$

$$R = 5$$

$$r = 1$$

Решение:

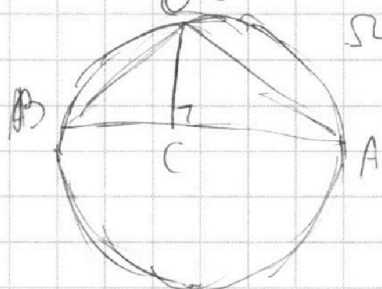
$\triangle ABC$



Найти: AB - ?

Решение: $\triangle ABC$ вписан в окружность Ω .

$$S_{ABO} = \frac{OC \cdot AB}{2}$$



Нам также $S_{ABO} = \frac{OB \cdot BA \cdot \sin \angle AOB}{2}$
где R - радиус описанной окружности
В нашем случае $R = 5$

Так как O лежит на окружности Ω .

Так как AB - касательная к ω , где $C \in \omega$
и $O \in \omega$ $OC = r = 1$

AB - касательная $\Rightarrow OC \perp AB$, где $OC = r$.

По теор. Пифагора: $OC^2 + BC^2 = OB^2$
 $OC^2 + AC^2 = OA^2$

Пусть $BC = x \Rightarrow AC = 7x$ ($\frac{AC}{CB} = 7 \Rightarrow AC = 7 \cdot CB$)

$$OC = 1 \Rightarrow OB = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$OA = \sqrt{1 + 49x^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{ABO} = \frac{OC \cdot AB}{2}$$

$$OC = 1$$

$$AB = BO + OA = x + 7x = 8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABO} = \frac{1 \cdot 8x}{2} = 4x$$

$$S_{ABO} = \frac{OB \cdot BA \cdot AO}{4R} = \frac{8x \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+49x^2}}{4 \cdot 5}$$

$$\frac{8x \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+49x^2}}{4 \cdot 5} = 4x$$

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+49x^2} = 10 \quad \left| \begin{array}{l} \text{возведем в квадрат} \\ \text{обе части} \end{array} \right.$$

$$(1+x^2)(1+49x^2) = 100 \quad \text{положительные}$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$x^2 = 1 \quad x^2 = -\frac{99}{49}$$

$$x = 1 \quad x \in \emptyset$$

$$AB = 8x \Rightarrow AB = 8$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x, \quad x \notin \left[\frac{2}{3}; 1\right]$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Замена: } 2x^2 - 5x + 3 &= a, & a > 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 &= b, & b > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Тогда: } \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$(a - \sqrt{a}) = b - \sqrt{b}$$

$$\text{Тогда } a = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\text{либо } a = 1, b = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &= 1 \\ 2x^2 + 2x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$7x = 1$$

$$x = \frac{1}{7}$$

$$\begin{aligned} \text{либо } b = 1, a = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 2x^2 - 5x + 3 &= 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 &= 1 \end{aligned} \\ 2x^2 - 5x + 3 &= 2x^2 + 2x \end{aligned}$$

$$x = \frac{3}{7}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

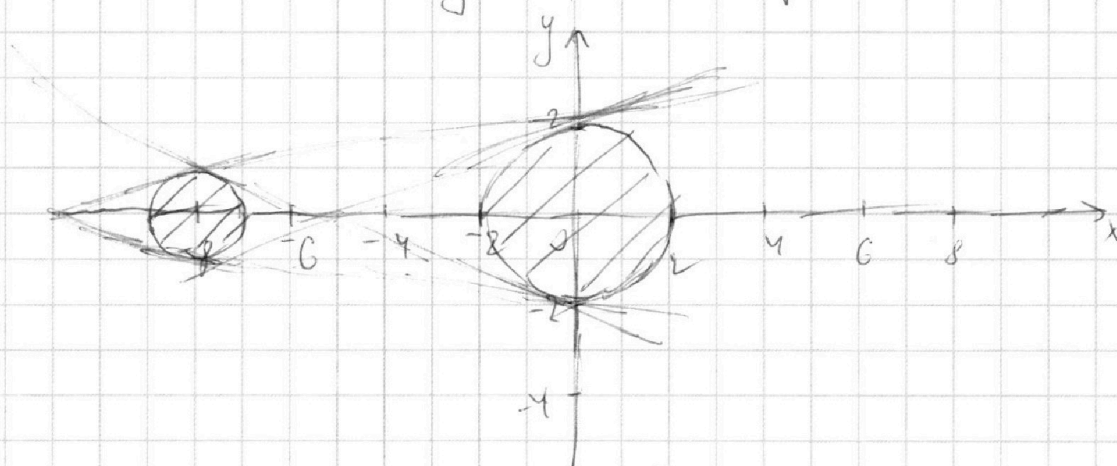
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Нарисуем график

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ — окружность, центр $(-8; 0)$
 $x^2 + y^2 = 4$ — окружность, центр $(0; 0)$
 $y = ax + 10b$ — прямая



Заштрихованная область — область, которая подпадает под второе неравенство.

Если прямая $y = ax + 10b$ будет пересекать окружность, то будет не 2 решения.

Если окружность не будет пересекаться

Чтобы было 2 решения, $y = ax + 10b$ должна быть касательной к окружности.

Тогда $y = ax + 10b$, где $(x+8)^2 + y^2 = 1$
 $y_1 = ax_1 + 10b$, $x_1^2 + y_1^2 = 4$

$$y - ax = y_1 - ax_1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$$

Всего получается 4 параметра a , при этом.

$$y = \pm \sqrt{1 - (x+8)^2}$$

$$y_1 = \pm \sqrt{1 - x_1^2}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_2 \\ a_3 &= -a_4 \end{aligned} \quad | \Rightarrow$$

$$\frac{1 - (x+8)^2}{x^2} = \frac{1 - x_1^2}{x_1^2}$$

$\Rightarrow$ ~~Всего~~

$$\frac{-x^2 - 16x - 64}{x^2} = \frac{1 - x_1^2}{x_1^2}$$

$$\frac{-16x - 64}{x^2} = \frac{1}{x_1^2}$$

$\Rightarrow$ Всего y как получается 4 касательные.

Ответ: всего 4 параметра a , при котором
каждый знак b .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \frac{1}{2} h \cdot a = \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 4$$

$$\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2} h \cdot a$$

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 = 1$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 4$$

$$bc = 2R \cdot h$$

$$\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49x^2+1} = 2 \cdot 28 \cdot 1$$

$$y = ax + 106$$

$$(x^2+1)(49x^2+1) = 2500$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$y = ax + 106$$

$$49x^4 + 50x^2 - 2499 = 0$$

$$49x^2 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$y - ax = y_1 - ax_1$$

$$x^2 = 1$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 4$$

$$y_1 = \sqrt{4 - x_1^2}$$

$$(x=1)$$

$$49x^2 = -99$$

$$x \in \emptyset$$

$$a = \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$$

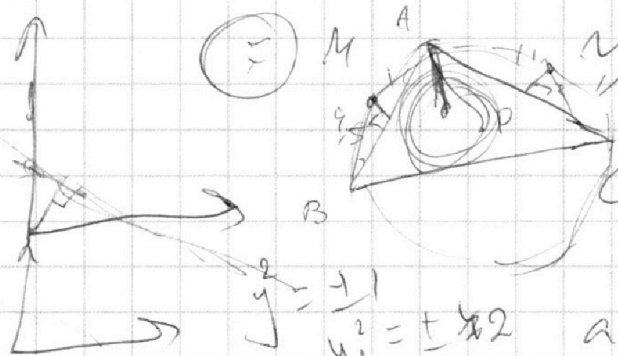
$$\sqrt{1 - (x+8)^2} - ax = \sqrt{4 - x_1^2} - ax_1$$

$$AB = 8$$

$$a \pm \sqrt{1 - (x+8)^2} = \frac{x}{\sqrt{1 - (x_1+8)^2}}$$

$$x_1 2y - x - 1 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$



$$ax - y + 106 = 0$$

$$y = ax + 106$$

$$P = \frac{Ax^2 + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$a^2 + (44/2 - a)^2 = \sqrt{2}$$

$$y = -x$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$y = -x + 2$$

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = ax + 106 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax + 106 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = ax + 106 \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$y - ax = y_1 - ax_1$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad x = \frac{2}{7}$$

$$\begin{cases} y_1 = \pm \sqrt{4 - x^2} \\ y = \sqrt{1 - (x+8)^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + \frac{9}{49}} - \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{4}{7} + \frac{2}{49}} = 0$$

$$\frac{11}{7} = \frac{11}{7}$$

$$4x^2 - 5x + 1 - 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)} = 4 + 49x^2 - 49x$$

$$-45x^2 + 25x = 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$-5x(9x-5) = 2\sqrt{(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)}$$

$$+25x^2(81x^2 - 90x + 25) = 4(x-1)(2x-3)(2x^2+2x+1)$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$

$$y = ax + 106$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b = (2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1)$$

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{B^2}{A^2}} \quad (a - \sqrt{a}) = b - \sqrt{b}$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = a^2 + b^2 - 2ab$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$ $bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$ $ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$ ~~МЗН~~

~~$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$~~

$a^2 b^2 c^2: 2^{51} \cdot 7^{64}$

$abc: 2^{20} \cdot 7^{37}$

~~$ac = 2^{20} \cdot 7^{37}$~~

$abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$

$b = 2$ $c = 2$ $a = 2$

$ab = k \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$
 $bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$
 $ca = n \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$

$a^2 b^2 c^2 = kmn \cdot 2^{51} \cdot 7^{64}$

② $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$
 $1 - 2 + 1$

$a+b: m$
 $a^2-6ab+b^2: m$

$a^2+2ab+b^2: m$
 $a^2-6ab+b^2: m$
 $3a^2+6ab+3b^2: m$

$a = 1$ $b = 7$

$\frac{a+b}{ab} = \frac{8}{7}$

$4a^2+6ab+b^2: m$

$\frac{1+49-42}{8} = 1$

a, b — ~~разные~~ либо оба четные,
либо разной четности

$\frac{a+b}{a^2+b^2}$

$a+b: n$ $a^2+2ab+b^2: n$
 $a^2+b^2: n$ $a^2+b^2: n$
 $2ab: n$

$\frac{a^2-6ab+b^2}{a^2+b^2}$

Ответ: 8

③ $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\Delta = 25 - 24 = 1$ $\Delta = 4 - 8$

~~$x \in \left[\frac{2}{3}, 1 \right]$~~

$\sqrt{(x-1)(2x-3)} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$(2x^2-5x+3) \sqrt{2x^2+2x+1} = 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 = 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$(2x^2 - 5x + 3)$$

$$\begin{matrix} 4 & -6 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & -4 & -3 & 0 \end{matrix} \quad (2x^2 - 5x + 3 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3}) =$$

$$= (2x^2 + 2x + 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$a - \sqrt{a} = b - \sqrt{b}, \quad a, b \geq 0$$

$$(4x^3 - 2x^2 - 4x - 3)$$

$$\begin{matrix} 4 & -2 & -4 & -3 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \end{matrix}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 4 \quad 4 \quad 2 \quad 0$$

$$a = b$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$7x = 1$$

$$x = \frac{1}{7}$$

$$-2 \sqrt{(x-1)(x-1,5)} / (4x^2 + 4x + 2) = 2 - 7x$$

$$2(2x^2 + 2x + 1)$$

$$2 - 16 \cdot 3 \cdot 2$$

$$b = 1 \quad a = 0$$

$$4x^2 - 3x + 4 \approx$$

$$4x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$2(2x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x$$

$$7x = 3$$

$$x = \frac{3}{7}$$

$$(2x^2 + 2x + 1) = (x-1)(x-1,5)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 10x + 6$$

$$2x^2 - 12x + 5 = 0$$

$$\begin{matrix} a = 7^{20} \\ c = 7^{12} \cdot 2^{11} \\ b = 2^6 \end{matrix}$$

$$2 \cdot (2x^2 + 2x + 1) = 2(x-1)(x-1,5) \quad \Delta = 144 - 40 = 104$$

$$2 \cdot 12 \cdot x =$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 \quad (2x^2 + 2x + 1)$$

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x=0 & \quad y = \pm 2 \\ 10b = -2a \\ 10b = 2a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y=0 & \quad x = \pm 2 \\ \begin{cases} 2 = 10b \\ -2 = 10b \end{cases} & \quad \begin{cases} b = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x_1^2 + 5)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x = -8 & \quad y = \pm 1 \\ \begin{cases} 1 = -8a + 10b \\ -1 = -8a + 10b \end{cases} \end{aligned}$$

5) $2x_2^2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$x_2 = 6 + x_1$$

$$p = \frac{\sqrt{Ax^2 + By + C}}{|A+B|}$$

$$10 \cdot 24 = 240$$

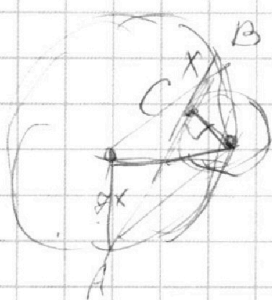
2) $a = 1 \quad b = 15$

$$\frac{16}{1+225-90} = \frac{16}{186} = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$$

$$\begin{array}{r} 226 \\ 90 \\ \hline 186 \end{array}$$

$$\begin{aligned} y &= ax + 10b \\ ax - y + 10b &= 0 \end{aligned}$$

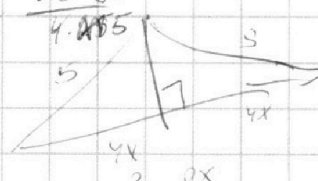
3)



$$S = p \cdot x$$

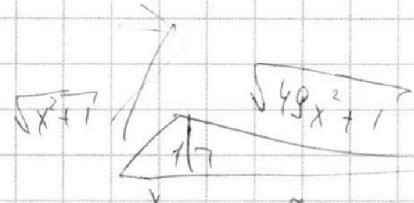
$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \frac{25x^2}{4 \cdot 255}$$



$$S = 4x \cdot 10x$$

$$S = 4x \cdot \sqrt{25 - 16x^2}$$



$$2x = 4x \cdot \sqrt{25 - 16x^2}$$

$$p = \frac{\sqrt{64a^2 + 10b}}{|a-1|}$$

$$2 \cdot \sqrt{25 - 16x^2} = 1$$

$$4(25 - 16x^2) = 1 \quad 2 = \frac{\sqrt{10b}}{|a-1|}$$

$$100 - 64x^2 = 1$$

$$\begin{aligned} 64x^2 &= 99 \\ x^2 &= \frac{99}{64} \end{aligned}$$

$$4(1025 - 16x^2) = 25$$

$$100 - 64x^2 = 25$$

$$\begin{aligned} 64x^2 &= 75 \\ x &= \frac{\sqrt{75}}{8} \end{aligned}$$

$$64a = 306$$

$$32a = 153 \quad \frac{10}{8} \cdot 64a + 4 \cdot 10b = 106$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



⑥ $\begin{cases} ax - y + 106 = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$

$y = ax + 106$
 $y = a\sqrt{4-x^2} + 106$
 $y_1 = a\sqrt{4-(x+8)^2} + 106$

$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$
 $(x+8)^2 + y^2 = 1$

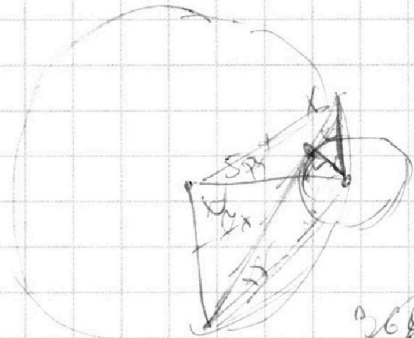
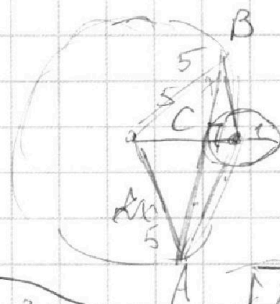
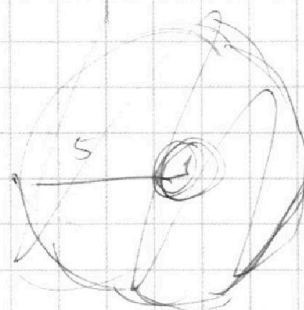
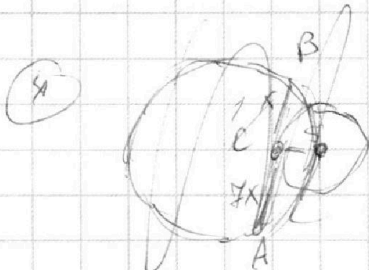
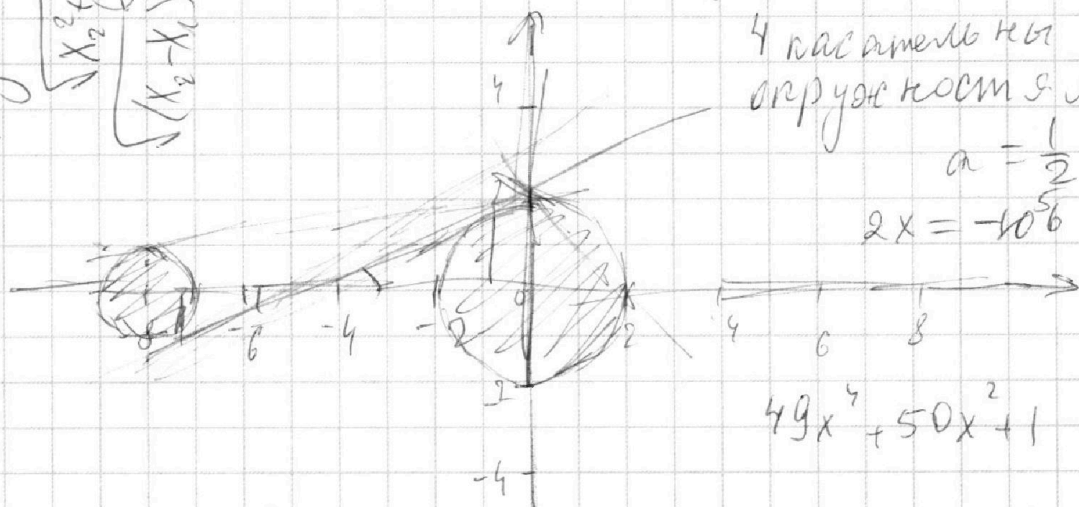
$x^2 + y^2 = 4$

4 касательные к Γ_2
 окружностям Γ_1 и Γ_2

$a = \frac{1}{2}$

$2x = -106$

$49x^4 + 50x^2 + 1$



$\sqrt{x^2 + 1}$ $\sqrt{49x^2 + 1}$

$64x^2 = 50 - 2 \cdot \cos 2\alpha \cdot 25 = 50 - 50 \cdot \cos 2\alpha$

$64x^2 = 50x^2 + 25 - 2 \cos \alpha \cdot \sqrt{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)}$

$50 - 10 \cdot \sin \alpha \cos \alpha = 50x^2$