МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 $a, b, c \in \mathbb{N}$

1) $ab \vdots 2^{75} \cdot 7^{77}$

2) $bc \vdots 2^{77} \cdot 7^{79}$

3) $ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39}$

Перемножим полученные при выражении ε:

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{55} \cdot 7^{65}$. Заметим, что тогда abc делится на 2^{28}. Пусть $abc \not\vdots 2^{28}$, тогда $abc \vdots 2^{k+2^{k+1}}$, где $k \le 27$. Тогда $(abc)^2 \vdots 2^{2k} \not\vdots 2^{2k+1}$. Тогда $2k \ge 55 \Rightarrow k \ge 28$. ~~Но предположили, что k~~ Противоречие, значит $abc \vdots 2^{28}$. $\&$ $ac \vdots 7^{39} \Rightarrow abc \vdots 7^{39}$. Получим, что $(abc \vdots 2^{28} \vdots 7^{39}) \Rightarrow abc \vdots 2^{28} \cdot 7^{39}$

Тогда $abc \ge 2^{28} \cdot 7^{39}$. Приведем пример, когда $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$. Пусть $a = 7^{77} \cdot 2^{70}$; $b = 2^5$; $c = 7^{28} \cdot 2^{13}$. Тогда все условия выполнены и $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 Из условия $(a;b)=1$. Пусть $m=d$.

Тогда $a+b \vdots d$; $a^2-7ab+b^2 \vdots d$. Заметим, что тогда $(a;d)=1$, иначе $a \vdots k$; $d \vdots k$; $k>1$ $(a+b=dx;\ x\in\mathbb{Z}) \Rightarrow dx-a=b \vdots k$. Т.е. $(a;b)\geq k$. Противоречие, значит, $(a;d)=1$. $(b;d)=1$ аналогично.

$(a+b) \vdots d \Rightarrow (a+b)(4a-8b)=a^2-7ab4-8b^2 \vdots d$

Вычтем из $a^2-7ab+b^2$ полученное выражение, получим $b^2-(-8b^2)=9b^2 \vdots d$. Но $(b;d)=1 \Rightarrow 9 \vdots d \Rightarrow d\leq 9$. Приведем пример, когда $d=9$. Пусть $a=4$; $b=5$. Тогда $(a;b)=1$; $a+b=9 \vdots 9$; $a^2-7ab+b^2=$

$=49-140=-91 \not\vdots 9$

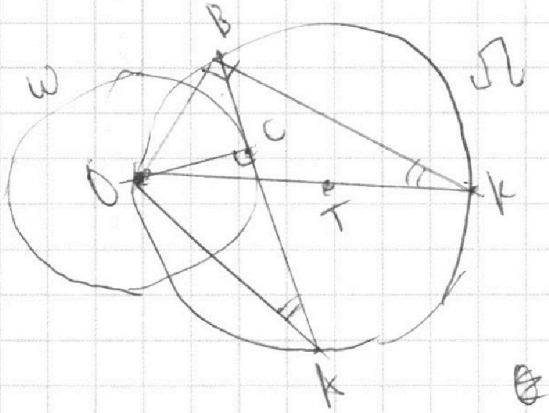
Ответ: $d=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



O - центр ω

$OC \perp BK$

T - центр Ω

$OT \cap \Omega = K$

$\angle OBK = 90$

$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$ $AC = 17x$, $CB = 7x$

$\triangle OBK \sim \triangle OCK$ по 1 признаку

$\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OK}$

$OA \cdot OB = OC \cdot OK = 7 \cdot 17$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 Обозначим $1-9x=t$; $3x^2-6x+2=k$

Тогда $3x^2+3x+1=k-t$. Перепишем уравнение:

$\sqrt{k}-\sqrt{k-t}=t$ $\quad k\geq 0;\ k-t\geq 0$

$\sqrt{k}=t+\sqrt{k-t}$ Возведем в квадрат обе части

$k=t^2+k-t+2t\sqrt{k-t}$

$t-t^2=2t\sqrt{k-t}$ (1)

Разберем случай $t=0$, тогда $1-9x=0$

$x=\frac{1}{9}$, тогда $\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=$

$=\sqrt{\frac{1}{27}-\frac{2}{3}+2}-\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+1}=$

$=\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+1}-\sqrt{\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+1}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{9}$ подходит.

Теперь $t\neq 0$. Разделим (1) на t

$1-t=2\sqrt{k-t}$

$t^2+1-2t=4(k-t)$

$t^2+1+2t=4k$

$4k=(t+1)^2$ Вспомним, что такое k и t

$4(3x^2-6x+2)=(2-9x)^2$

$12x^2-24x+8=4+81x^2-36x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$D = 144 + 4 \cdot 4 \cdot 69 = 16(9 + 69) = 16 \cdot 78$

$x_1 = \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} < \frac{70}{69}$

$3x_1^2 + 3x_1 + 1 = 3\frac{(6-2\sqrt{78})^2}{69^2} + 3 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 1 =$

$= 3 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69}\left(\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} + 1\right) + 1 > 0$

$-1 < 0 \qquad 0 < 1$

$3x_1^2 + 3x_1 + 1 > 0$, ибо $x_1 < 0$

$x_2 = \frac{12 + 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > \frac{22}{69}$

$1 \quad \frac{24}{69}$

Тогда $3x_2^2 - 6x_2 + 2 > 0$; $3x_2^2 + 3x_2 + 1 > 0$

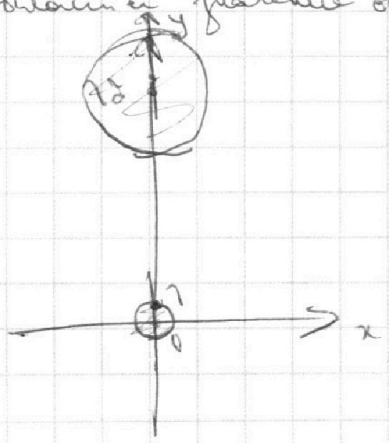
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 Рассмотрим на второе неравенство. ~~Пер~~ $x^2+y^2=$ $=9$ задает окружность с центром в $(0;0)$ и радиусом 3. $x^2+(y-12)^2=16$ задает окружность с радиусом 4 с центром в $(0;12)$. Тогда решением второго неравенства будет внутренняя часть и граница этих окружностей, а в остальных областях значение обеих скобок будет >0.



Первое уравнение перепишем:

$y=ax+8b$ – это прямая.

Если эта прямая пересекает хотя бы одну из окружностей в 2 точках, то решений системы бесконечно много. Также прямая не может не пересекать окружности => она должна касаться обеих окружностей. Найдем уравнение общей внутр. касательной, а также общей внешней касательной.

Общая внутренняя:

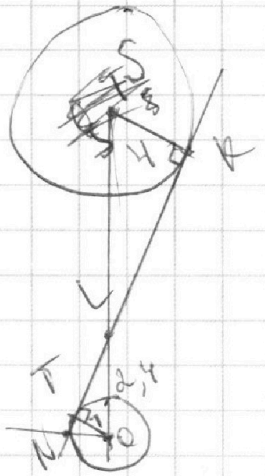
$y=k_1x+c_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\triangle SRL \sim \triangle OTL$, ибо

$SR \parallel OT$ из $\angle SRL = \angle LTO = 90$

$\frac{SL}{LO} = \frac{SR}{OT} = \frac{4}{1}$

$SL = 4x \quad LO = x$

$SL + LO = 5x = 12 \quad x = 2,4$

$OL = 2,4 \Rightarrow c_1 = 2,4$

$TL = \sqrt{2,4^2 - 1^2} = \sqrt{1,4 \cdot 3,4}$

$OT^2 = NT \cdot TL = 1$

$NT \cdot \sqrt{1,4 \cdot 3,4} = 1 \qquad NT = \frac{1}{\sqrt{1,4 \cdot 3,4}}$

$ON = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{1,4 \cdot 3,4}}\right)^2} = \sqrt{\frac{5,76}{4,76}} = \frac{2,4}{\sqrt{4,76}}$

$0 = y = k_1 \cdot \frac{2,4}{\sqrt{4,76}} + 1$

$k_1 \cdot \frac{2,4}{\sqrt{4,76}} = -1$

$k_1 = \cancel{-\frac{2,4}{1}} \; -\frac{\sqrt{4,76}}{2,4}$

Заметим, что тогда $-k_1$ тоже подходит, ибо

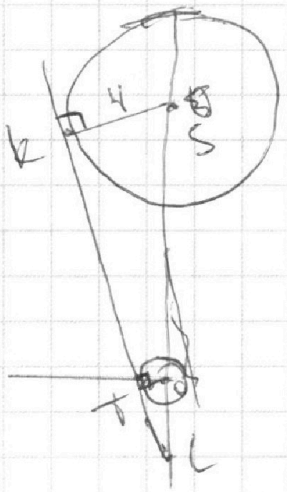
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Внутренние и внешние касательные симметричны оси. $x=0$. Внешняя касательная: $y=k_2x+c_2$



$OT=1$

$KS \parallel TO$ из $\angle TKS + \angle KTO =$

$= \cancel{180}\ 90+90=180$

$\cancel{LO}$

$\cancel{TTO}$ $\triangle LTO \sim \triangle LKS$

$$\frac{LO}{LS}=\frac{1}{4}=\frac{TO}{KS}$$

$LS=4x \quad LO=x$

$SO=3x=12 \quad x=4$

$LS=16$; $LO=4 \Rightarrow c_2=-4$

k_2 находим аналогично.

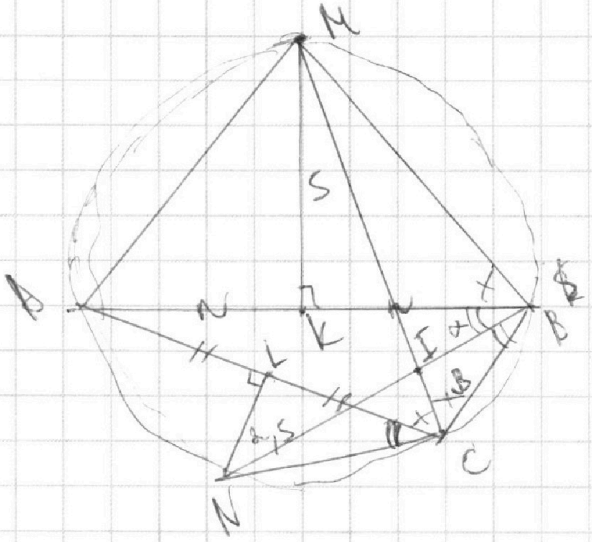
Тогда для всех a, таких, что $|a|=|k_1|$ или $|a|=|k_2|$ мы сможем подобрать b так, чтобы ~~b~~ получившаяся прямая была внутр. или внеш. касательной. При всех остальных a при любом b прямая $-ax+8b$ ~~будет~~ не будет общей касательной для двух окружностей $\Rightarrow$ решений системы не будет равно 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$MK \perp AB$

$NL \perp AC$

($\angle ABM = \angle ACM$; $\angle ACN = \angle ABN$, $\angle AMC = \angle ABC$)

из вписанности $AMBCN$

(BN - биссектриса $\angle ABC$)

Из условия, M - середина $AB \Rightarrow AM = MB$; $AK = KB$). N - середина $AC \Rightarrow$ ($AN = NC$; $AL = LC$. CN - биссектр. $\angle ACB$)

По т. синусов $\frac{BM}{\sin\beta} = \frac{CN}{\sin\alpha}$ (1)

Из $\triangle LCN$ $\sin\alpha = \frac{NL}{CN} = \frac{2,5}{CN}$ (3); из $\triangle MKB$

$\sin\beta = \frac{MK}{MB} = \frac{5}{MB}$. Подставим в (1)

$\frac{MB^2}{5} = \frac{CN^2}{2,5}$

$MB^2 = CN^2 \cdot 2$ $\quad MB = \sqrt{2}\,CN$

$\frac{MB}{CN} = \sqrt{2} = \frac{AM}{AN}$ $\quad AM = \sqrt{2}\,AN$

(2)

По т. синусов для $\triangle ACM$: $\frac{AC}{AM} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\beta} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\beta}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Обозначим за $I = CM \cap BN$ когда в задаче предлагается найти AI

из т. синусов для $\triangle AIC$

$$\cancel{\frac{AI}{AC} = \frac{\sin\beta}{\sin\angle AIC}} = \frac{AI}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\angle AIC} = \frac{AC}{\sin(90+\alpha)} =$$

$$= \frac{AC}{\cos\alpha}$$

Из ② $\frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot AM}{\sin\beta}$. Подставим

это в $AI = \frac{AC}{\cos\alpha}\cdot\sin\beta$

$$AI = \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot AM}{\cancel{\sin\beta}}\cdot\cancel{\sin\beta}$$

Из ③ $\sin\alpha = \frac{2,5}{CN} = \frac{2,5}{AN} = \frac{2,5\cdot\sqrt{2}}{AM} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha\cdot AM = 2,5\sqrt{2}$, тогда

$\cancel{AI =}$ $AI = 2\cdot\sin\alpha\cdot AM = 2\cdot 2,5\sqrt{2} =$

$= 5\sqrt{2}$

$AI = 5\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [X] 3 [X] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 $a; b; c \geq 1$

1) $ab \vdots 2^{75} \cdot 7^{11} \Rightarrow ab \geq 2^{75} \cdot 7^{11}$

2) $bc \vdots 2^{77} \cdot 7^{78} \Rightarrow bc \geq 2^{77} \cdot 7^{78}$

3) $ac \vdots 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

Перемножим все три получившиеся выражения:
$a^2 b^2 c^2 \vdots 2^{55} \cdot 7^{68}$. Заметим, что тогда abc делится на ~~7^{34}~~ 2^{28}. Пусть $abc \times$ ~~7~~ 2^{28}
Тогда $abc \vdots 2^k$, где $k \leq 27$. Тогда ~~$a^2b^2c^2 \vdots$~~
$(abc)^2 \vdots 2^{2k}$, $\not\vdots\, 2^{2k+1}$. Тогда ~~$abc \not\vdots 2^{55}$~~, что
~~$55 = 2 \cdot 27 + 1$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

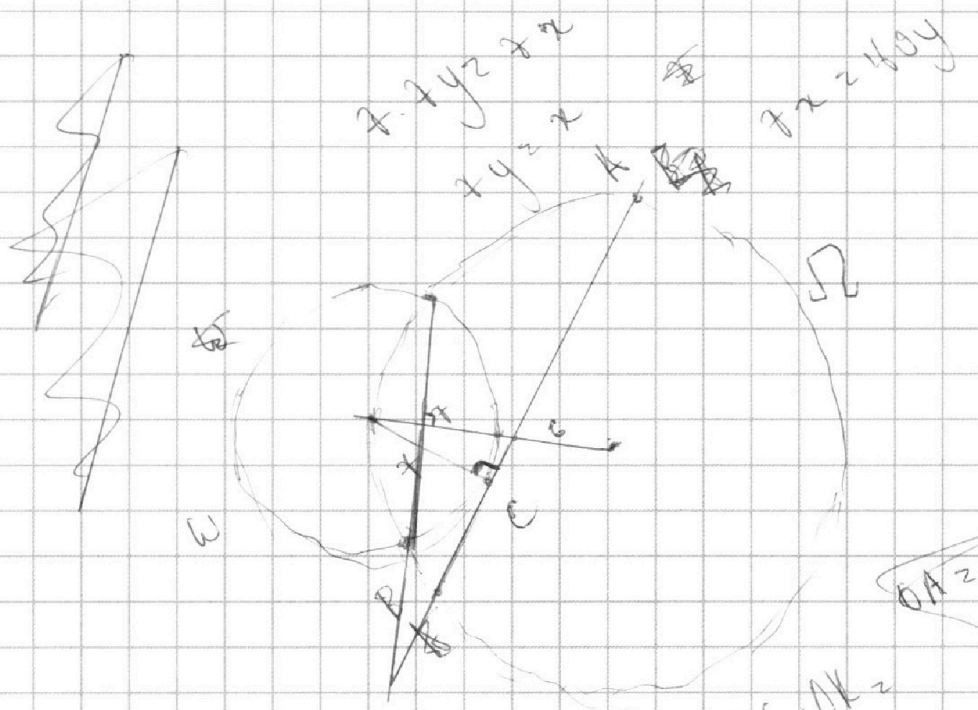
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3)



$7 \cdot 7y = 7x$

$7y = x$

$7x = 49y$

$OA = y$

$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$

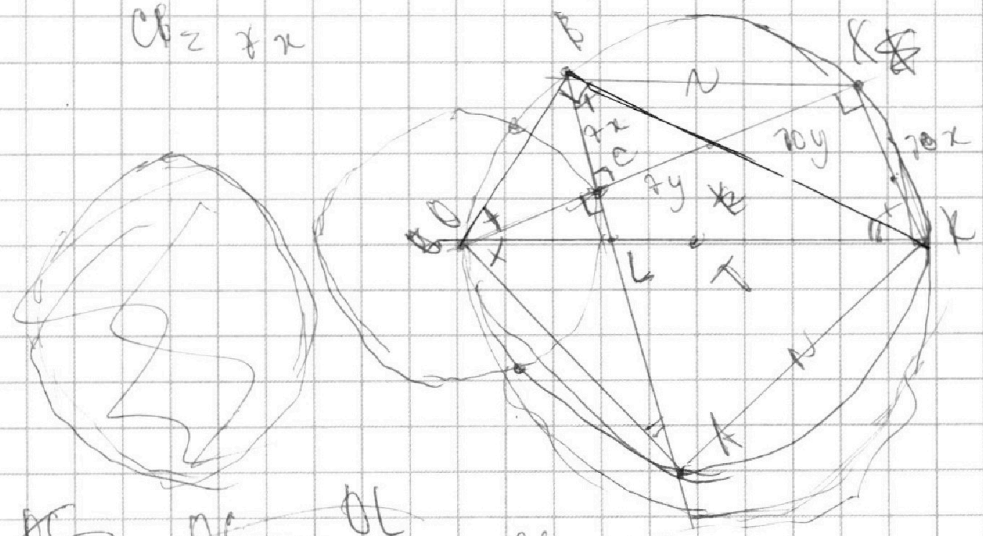
$OB \cdot OA = OC \cdot OK = 7 \cdot 26$

$\frac{OC}{OK} = \frac{OB}{OK}$

$OB = \frac{y}{26}$

$AC = 17x$

$CB = 7x$



$\frac{OC}{CX} = \frac{OL}{LK}$

$\frac{OC}{OX} = \frac{OL}{OK}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

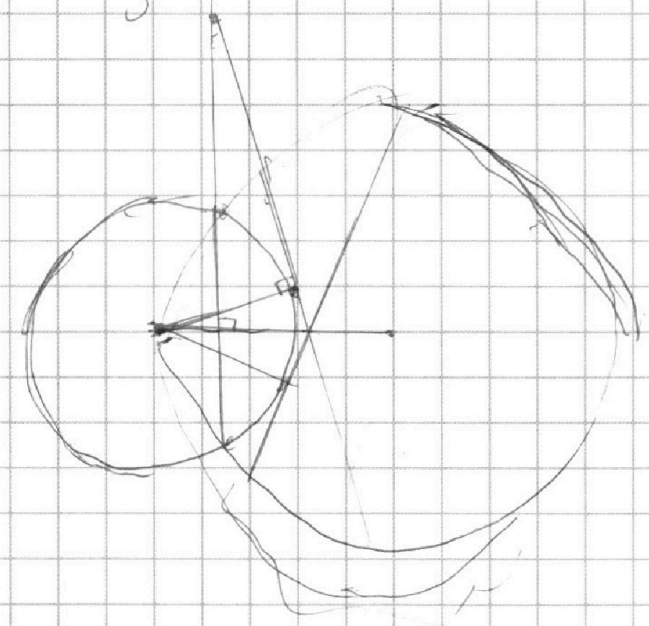
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$y^2 - 7^2 = (17 - x)^2$$

$$\left(\frac{26}{y}\right)^2 - 7^2 = (7 - x)^2$$

$$y^2 - \left(\frac{26}{y}\right)^2 = 10x \cdot 24x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$d = m$

2) $(a;b) = 1$ $(b;d) = 1$

$(a;d) = 1$

$a+b \vdots d$ $a^2 - 7ab + b^2 \vdots d$

$(a+b)(a-8b) \vdots d$

$a^2 + ab - 8ab - 8b^2 \vdots d$

$a^2 - 7ab - 8b^2 \vdots d$

$9b^2 \vdots d$

$9ab \vdots d$

$9 \vdots d$

$d \leq 9$

$a = 4$ $b = 5$ $47 - 740$

$16 + 25 = 740$

При $d = 9$

$a = 4$ $b = 5$ $a + b = 9 \vdots 9$

$a^2 - 7ab + b^2 = 47 - 740 = -99 \vdots 9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{\Sigma}$ $\sqrt{}$ $ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

$\cancel{a = 2^{23} \cdot 7}$

$\cancel{ab}$ $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{23} \cdot 2^{15} \cdot 2^{17} \cdot 7^{11} \cdot 7^{18} \cdot 7^{39} =$

$= 2^{55} \cdot 7^{68}$ $\cancel{\geq 2}$

$\cancel{abc \geq 2}$

$abc \geq \sqrt{2^{55} \cdot 7^{68}} \leq > 2^{27} \cdot 7^{34}$

$\cancel{a}$ $a = 7^{11}$

$b = 7^{18}$

$c = 7$

$abc \mid 2^{27}$

$abc \mid 7^{39}$

$\cancel{b}$ $bc \mid 7^{39}$

$\cancel{ab}$ $abc \mid 7^{39}$

$abc \geq 2^{27} \cdot 7^{39}$

$a \mid 7^{11}$ $c \mid 7^{18}$

$a = 7^{11} \cdot \cancel{2^{12}} \cdot 2^{10}$

$b = \cancel{2^{4}}\ 2^{5}$

$c = 7^{28}$ $\cancel{2^{11}}\ \cancel{2^{12}}\ 2^{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

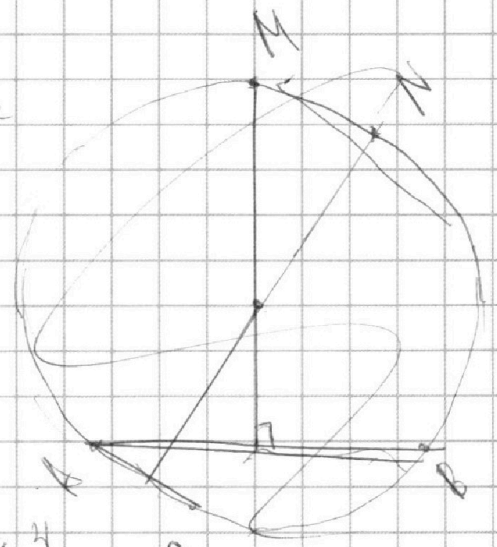
МФТИ

$$LT = \sqrt{7 + \frac{7}{7{,}4 \cdot 3{,}4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{7{,}4 \cdot 3{,}4 + 7}{7{,}4 \cdot 3{,}4}}$$

$$\cancel{7{,}4 \cdot 3{,}4 =}$$

$$\begin{array}{r} 7{,}4 \\ \times\ 3{,}4 \\ \hline 296 \\ 222 \\ \hline 25{,}16 \end{array}$$



$$\frac{2{,}4}{\sqrt{4{,}76}}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times\ 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \times\ 24 \\ \hline 8606 \\ 28 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \times\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$0 = k \cdot \frac{2{,}4}{\sqrt{4{,}76}} + 2{,}4$$

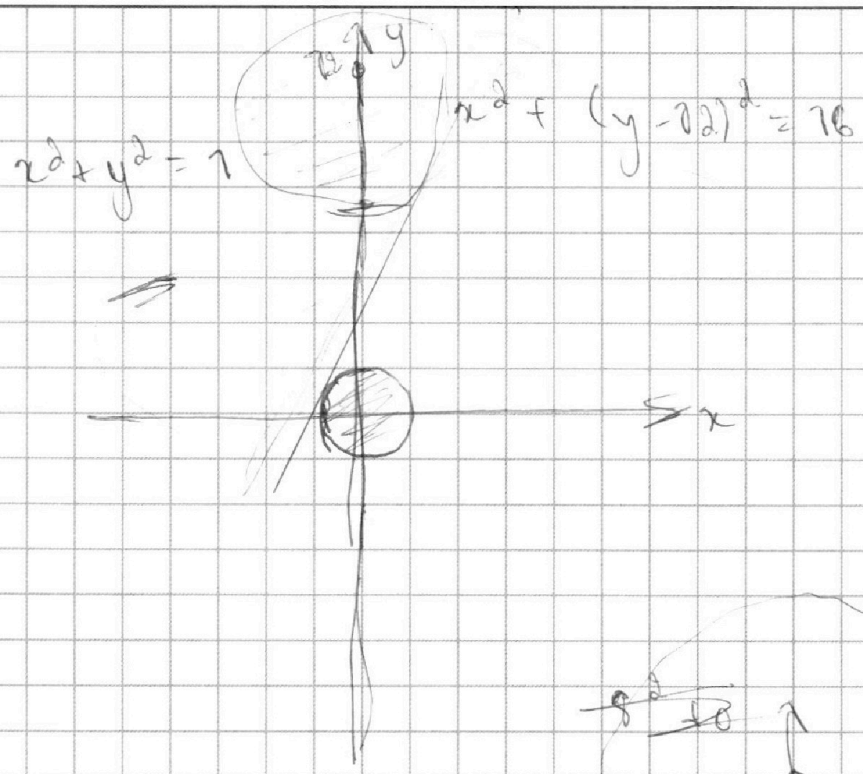
$$\left(\frac{k}{\sqrt{4{,}76}} + 1\right) = 0 \qquad k = -\sqrt{4{,}76}$$

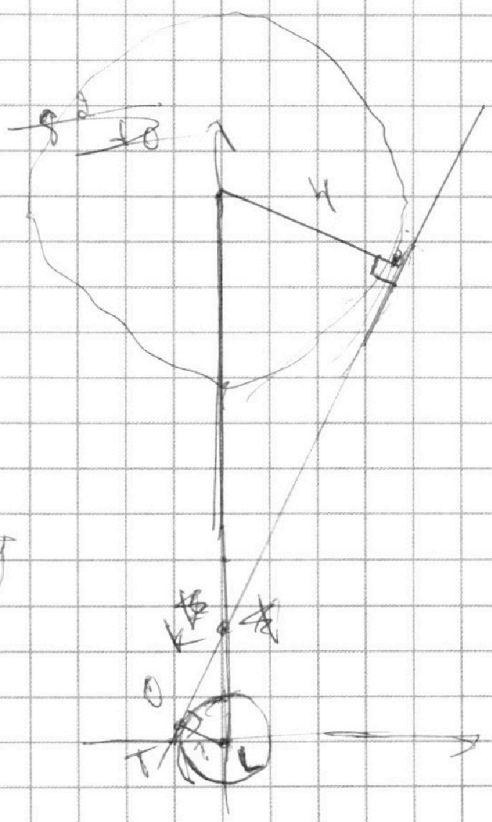
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





$ax+y-86=0$

$\cancel{ax+y=86}$

$\cancel{ax-86=y}$

$y=-ax+86$

$y=kx+c$

$c=2,4$

$S_{\triangle}=12$

$\sqrt{2,4^2-1^2}=$

$=\sqrt{1,4\cdot 3,4}=KO$

$x=\frac{12}{5}=2,4$

$OT=\frac{1}{\sqrt{1,4\cdot 3,4}}$

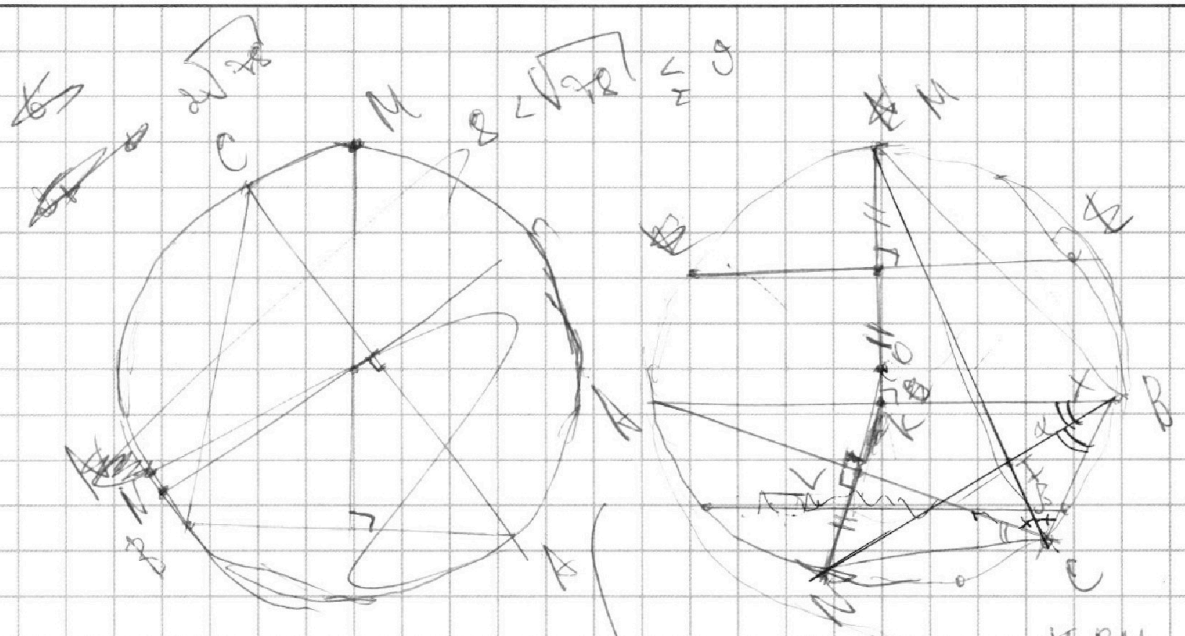
$KO\cdot OT=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\frac{BM}{\sin\beta} =$

$\sin\alpha = \frac{S}{CN}$

$\sin\beta = \frac{S}{MB}$

$\frac{CN}{\sin\alpha} = 2R$

$\sin\alpha = \frac{2S}{CN}$

4) $3x = t$

$3x^2 - 6x = k$

$\sqrt{k+2} - \sqrt{k+t}$

$2 - 3x = t$

$3x^2 - 6x + 2 = k$

$k - t = 3x^2 - 6x + 2 + 3x - 2 =$

$= 3x^2 + 3x + 1$

$\sqrt{k} - \sqrt{k-t} = t$ $\quad k - t \geq 0$

$k \geq 0$

$k + k - t - 2\sqrt{k(k-t)} = t^2$

$k = t^2 + k - t + 2t\sqrt{k-t}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$t - t^2 = 2t\sqrt{k-t}$ $\quad t \neq 0$

$1 - t = 2\sqrt{k-t}$

$1 + t^2 - 2t = 4(k-t)$

$t^2 + 1 - 2t = 4k - 4t$

$t^2 + 1 + 2t = 4k$

$4k = (t+1)^2$

$4(3x^2 - 6x + 2) = (2 - 9x)^2$

$12x^2 - 24x + 8 = 4 + 81x^2 - 36x$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$D = 144 + 16 \cdot 69 = 16 \cdot (9 + 69) =$

$69x^2 - 12x - 4 = 0$

$D = 144 + 16 \cdot 69 = 16(9 + 69) = 16 \cdot 78$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\frac{BM}{\sin\beta} = \frac{CN}{\sin\alpha}$ $\sin\beta = \frac{5}{BM}$

$\sin\alpha = \frac{2,5}{AN}$ $\sin\alpha = \frac{2,5}{CN}$

$\frac{BM^2}{5} = \frac{CN^2}{2,5}$

$BM^2 = 2CN^2$

$AN = \frac{AM}{\sqrt{2}}$ $BM = \sqrt{2}\,CN$

$\sin\alpha \cdot AN = \sin\alpha \cdot \frac{AM}{\sqrt{2}} = 2,5$

$\sin\alpha \cdot AM = \sqrt{2} \cdot 2,5$

$\frac{BM}{CN} = \sqrt{2}$

$AM^2 = 25 = AP^2$

$2CN^2 = 25 = AK^2$

$CN^2 = 6,25 = AL^2$ $2CN^2 = 25 = 2AL^2$

$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin(90+\alpha)} = \frac{AC}{\cos\alpha}$

$AK^2 = 2CN^2 = 25$

$12,5 = 2AL^2 - AK^2$

$\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = CN^2 = 6,25$

$\frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{AM \cdot \sin\alpha \cdot 2}{\sin\beta}$

$AC^2 = 4CN^2 = 25 = 2AM^2 = 25$

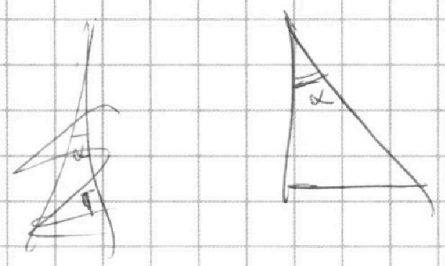
$\frac{AC}{AM} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\beta} = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\beta}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$AI = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{AM \cdot 2\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{AM \cdot 2\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \sin\beta = AM \cdot 2\sin\alpha = 2 \cdot 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$